GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1943

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică".
4. Forţe dirijate după laturile unui triunghiu . . . . . *Gh. D. Simionescu.*
5. Raport pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
6. Note matematice: 1 — 3.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 4986, 5143, 5321, 5659, 5714.
12. Exerciţii: 1 — 5.
13. Probleme propuse: 5837 — 5848.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 837, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Tipografiei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 »	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAIE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XLIX

15 SEPTEMVRIE 1943 — 15 AUGUST 1944

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1943 *)

I. I. CHIȚULESCU, AL. PANTAZI, AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

GENERAL GH. BUICLIU și I. IONESCU. Membri delegați pentru: cereri, diverse și suplimente.

O. N. ȚINO ajutat de G. G. CONSTANTINESCU și G. SIMIONESCU. Raportori.

G-L GH. BUICLIU, G-L GH. I. LITEANU și D. V. STOICA. Membri delegați pentru: schimburi de reviste și primirea lor, reclamațiuni privitoare la tipărire.

G-L GH. BUICLIU și GH. ILIESCU. Membri delegați pentru cercetarea manuscriselor, repartizarea lor și imprimarea revistei.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.

G. G. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, CPT. C. IONESCU-ȚIU, N. N. MIHĂILEANU și F. PĂSĂRICĂ. Membri delegați pentru corecturi.

G-L G. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, M. GHERMĂNESCU, C-DOR I. LINTEȘ, O. N. ȚINO și C-DOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică.

E. ARGHIRIADE, D. BARBILIAN, ADRIAN GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, MAIOR M. FOCȘENEANU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. PANTAZI, AL. ROȘU, G. D. SIMIONESCU și D. V. STOICA. Membri delegați pentru geometrie.

I. S. ANTONIU, VIRGIL GHIȚESCU, G-L GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, CPT. A. I. STAN și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru trigonometrie.

---

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier. (Art. 14 din Statute).

TH. ANGHELUȚĂ, G. G. CONSTANTINESCU, OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, AL. ROȘU, O. N. ȚINO și Ș. ȚIȚEICA. Membri delegați pentru Algebra Elementară.

I. CHIȚULESCU, GH. DUMITRESCU, GH. TH. GHEORGHIU, AL. NICULESCU, AL. PANTAZI și GH. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru Geometrie Descriptivă.

I. S. ANTONIU, EM. BOTEA, GH. D. SIMIONESCU, AL. STOENESCU, C. C. TEODORESCU și GABRIELA ȚIȚEICA. Membri delegați pentru Mecanică.

N. ABRAMESCU, G. G. CONSTANTINESCU, MAIOR M. FOCȘENEANU, GH. TH. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, CPT. A. I. STAN, O. N. ȚINO și GABRIELA ȚIȚEICA. Membri delegați pentru Geometria Analitică.

G. G. CONSTANTINESCU, C. IONESCU-BUJOR, G-L GH. LITEANU și AL. STOENESCU. Membri delegați pentru Cosmografie.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUȚĂ, D. V. IONESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, AL. PANTAZI, TIB. POPOVICIU, P. SERGESCU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru Articole și Note de matematici superioare.

N. ABRAMESCU, I. IONESCU, V. MARIAN și P. SERGESCU. Membri delegați pentru Istoria matematicilor.

I. IONESCU, O. ONICESCU, P. SERGESCU și GH. ZAPAN. Membri delegați pentru Filosofia matematicilor.

O. N. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

G-L GH. BUICLIU, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, CPT. C. IONESCU-ȚIU, G-L GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, CPT. A. I. STAN și CPT. I. GH. ZAMFIRESCU. Membri delegați pentru Exerciții.

GH. TH. GHEORGHIU, P. SERGESCU, GABRIELA ȚIȚEICA, Ș. ȚIȚEICA, R. ȚIȚEICA, CPT. I. GH. ZAMFIRESCU și C-DOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru Chestiuni de examen.

G-L GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU și GEORGETA ROMAȘCAN, Membri delegați pentru alcătuirea Tablei de materii.

MEMBRII

1	1907, Iulie 1*	ABRAMESCU NICOLAE. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Științe Timișoara. — Str. Mocioni, 10. Timișoara.
2	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timișoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timișoara.
3	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licențiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. București 4.
4	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licențiat în Științe Matematice. — Șef de birou tehnic în Direcțiunea de Poduri C. F. R., Asistent la Politehnica din București. — Str. Mihail Cornea, 41. București 2.

*) Data admiterii.

5	1943, Febr. 18	AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL. Inginer Constructor. Diplomat al Politehnicei Bucureşti. Subşeful Secţiei L. 4 C. F. R., Craiova. Calea Impăratul Traian 11. Craiova.
6	1940, Aug. 28	ANDONIE GH. Inginer de mine. — Directorul General al minelor. Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Braziliei, 18. Bucureşti 3.
7	1940, Febr. 8	ANDRONESCU PLAUTIUS. Doctor-Inginer. — Rectorul Politehnicei Timişoara.
8	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii „Regele Ferdinand I". — Str. Eugen de Savoia, 9. Timişoara.
9	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer Inspector General. — Membru în Consiliul Technic Superior. Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P. — Str. C. Dissescu, 17. Bucureşti 2.
10	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer electrician, Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Calea Floreasca, 150. Tel. 29437. Bucureşti 3.
11	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
12	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic. Timişoara.
13	1941, Iunie 5	AVRAMESCU AUREL. Doctor-Inginer electrician dela Politehnica din Dresda. — Şef Serv. Studii Soc. G-lă Gaz şi Electricitate. Asistent la Politehnică. — Str. Sft. Constantin, 24. Et. 3. Bucureşti 2.
14	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor. — Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2.
15	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director S. T. B. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Mareşal Antonescu, 38. Bucureşti 2.
16	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 12. Bucureşti.
17	1942, Aug. 27	BĂDULESCU ALEXANDRA. Licenţiată în Matematici a Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti. — Profesoară de Matematici la Liceul din Târgul Ocna.
18	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo, 560. Republica Argentina.
19	1940, Aug. 28	BĂLAN G. ŞTEFAN. Inginer Constructor. — Str. Lt. Negel, 59. Bucureşti 6.
20	1941, Sept. 18	BALLAN EUGEN. Inginer electromecanic. S. P. B. Licenţiat în Matematici. — Director General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. Director General al Oficiului General al Planurilor de Investiţii. — Str. Brezoianu, 29 (Alee). Bucureşti.
21	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.

22	1940, Febr. 8	BENEŞ PAUL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Bibliotecar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. — Str. Vaporul lui Asan, 13. Bucureşti.
23	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Director General al Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49. Bucureşti 2.
24	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Secţia construcţii. — Subşef de serviciu în Administraţia Comercială a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe apă. — Aleea Alexandru, 11. Bucureşti 3.
25	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar definitiv Politehnica „Gh. Asachi". — Str. N. Iorga, Nr. 2 A/3. Cernăuţi.
26	1926, Iunie 28	BRENNER M. AVRAM. Inginer. — Str. Popa Petre Nr. 1. Bucureşti.
27	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.
28	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Cpt. Licenţiat în Matematici. Inginer Electromecanic. Absolvent al Secţiei de Radio-Comunicaţii. Şeful Serv. Tehnic al stabilimentelor de aeronautică. Profesor la Şcolile Militare. — Str. Aviator Th. Iliescu, 31. Bucureşti 3.
29	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Crimeia, 32. Bucureşti 3.
30	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General/r. din Artilerie. — Însărcinat cu conferinţe la Politehnica din Bucureşti. — Str. M. Cogălniceanu, 10. Bucureşti 2.
31	1938, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. — Directorul Podurilor C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
32	1924, Ian. 30	BUNESCU D. ALEXANDRU. Inginer. — Str. Arcului 26. Bucureşti 1.
33	1943, Aug. 26	BUNESCU D. EUGEN, Inginer. — Director în Societatea Concordia-Ploeşti. — Str. Rahovei, Nr. 19. Ploeşti.
34	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Col. de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Artilerie antiaeriană din Metz (Franţa). Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioare de Război din Paris. — Comand. Centr. de Instr. al Art. ant. aer. şi al Şcoalei de ofiţeri de Artilerie antiaeriană. — Str. Franzelari, 19. Bucureşti.
35	1920, Ian 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer Inspector General. Director C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48, Bucureşti 6.
36	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General. Licenţiat şi Doctor în Matematici dela Paris. — Profesor Universitar onorar. Profesor de metalurgie. Consilier general tehnic al Uzinelor şi Oţelăriilor Rogifer. — Str. General Berthelot, 95. Bucureşti 2.
37	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer-Şef. — Subşef de serviciu. Direcţiunea atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti — Str. Vaselor, 40 Bis. Bucureşti 4.

38	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
39	1921, Mai 4	BUŞILĂ G. IOAN. Inginer Inspector General. — Membru în delegaţia Consiliului Tehnic-Superior. — Str. Dr. Lueger, 8 bis. Bucureşti 1.
40	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer-Şef. — Directorul Întreţinerii din Direcţiunea Generală a Drumurilor. Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Str. Simonide, 3. Bucureşti 1.
41	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
42	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Aron Florian, 4. Bucureşti 3.
43	1942, Aug. 27	CARACOSTEA D. ANDREI, Inginer absolvent al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inspector ajutor în Direcţiunea de Poduri C. F. R. — B-dul Lascăr Catargiu, 28. Bucureşti 3.
44	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Polonă, 9. Bucureşti 3.
45	1920, Mart. 1	CARAMAN ERMIL. Licenţiat în Matematici. — Fost prefect şi deputat. Directorul Liceului „V. Alesandri" din Galaţi. Preşedintele consiliului interşcolar al oraşului Galaţi. — Str. General Berthelot 81. Galaţi.
46	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. Antreprenor. — Intrarea Tudor Ştefan, 4. Bucureşti 2.
47	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. General de Artilerie. — Str. G-ral Ipăteşcu, 20. Bucureşti 4.
48	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2.
49	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE, Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar definitiv de matematici la Seminarul Teologic din Chişinău. — Str. General Dragalina, 27. Chişinău.
50	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
51	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General. — Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă.
52	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer Inspector General. — Director în Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Iancu Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
53	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Administrator Industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
54	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Stradela Bucovina, 7. Bucureşti 2.

55	1940, Febr. 8	CIORAPCIU F. MIRCEA. Inginer Constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Vâlcov, 56. Bucureşti 4.
56	1939, Dec. 7	CLAUDIAN VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.—Str. Lt. Radu Robescu, 24. Bucureşti.
57	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GEORGE. Inginer diplomat al S. P. B. Director General al Uzinelor Rogifer. — Str. B. Mussolini, 22. Bucureşti 3.
58	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Doctor în Matematici. — Str. Aquila, 10. Bucureşti 6.
59	1895,Sept.15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
60	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Inspector conducător al Atelierelor E. C. F. R. Filaret. — Str. Gh. Popescu, 1. Bucureşti 6.
61	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Inginer în Biroul studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov. — Fabrica de Avioane I. A. R. Str. Mihail Eminescu, 17. Braşov.
62	1941, Febr. 20	COSTĂCHESCU V. CONSTANTIN. Căpitan. — Comandantul Submarinului „Delfinul". Profesor la Şcoala Navală. — Nava bază Constanţa.
63	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Str. Polonă, 57. Bucureşti 3.
64	1939, Dec. 7	CRĂCIUNEANU CONST. Căpitan. — B-dul Mărăşti, 47. Bucureşti 2.
65	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Comuna Popeşti, Jud. R.-Sărat. Oficiul Gugeşti.
66	1943, Aug. 26	DAVIDESCU ANA. Inginer constructor. Diplomat Politehnica Bucureşti. — Inginer constructor la Dir. Silozuri din P. C. A. — Str. Silvestru, 85. Bucureşti.
67	1941, Iunie 5	DINESCU P. ALEX. TUDOR. Inginer Constructor.— Asistent suplimentar la Şcoala Politehnică Bucureşti. Şef de Secţie la R. A. C. F. R. — Str. Eufrosina Poteca, 5. Bucureşti 4.
68	1939, Febr. 23	DOBRESCU ANDREI. Licenţiat în Matematici. — Profesor de matematici la Liceul industrial de construcţii civile şi edilitare din Bucureşti. — B-dul Maria, 24. Bucureşti 5.
69	1939, Aug. 31	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici. — Fost asistent la Politehnica din Bucureşti. Profesor titular la Colegiul naţional militar „N. Filipescu". Predeal.
70	1939, Dec. 7	DRAGOMIRESCU-BUZNE EDUARD. Maior de Artilerie, brevetat de Stat Major.—Profesor de Muniţiuni şi Construcţii de guri de foc la şcolile de Artilerie. Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe. M. A. N. Cabinetul Ministrului — Str. General Anghelescu, 159. Bucureşti, 2.
71	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. — Director al Uzinelor Astra şi Union. — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.

*) Data fondării revistei *„Gazeta Matematică"*. Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

72	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef, — Inspector tehnic C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 22. Craiova.
73	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor Colegiul Naţional Sf. Sava Bucureşti. Inspector general în învăţământul secundar din Ministerul Culturii Naţionale. Preşedintele Consiliului Inspectorilor Generali. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti, 6.
74	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezîstenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. Cuza Vodă, 94. Bucureşti 2.
75	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Şos. Ştefan cel Mare, 218. Bucureşti 1.
76	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor S. P. B.. — Inginer C. F. R. Asistent la Politehnica Bucureşti. — Str. Vaselor, 28. Bucureşti 4.
77	1938, Febr. 17	FLORIAN D. ZAHARIA. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. — Profesor. Director la Societatea de Asigurare „Naţionala". — B-dul Elisabeta, 95 bis A., Et. III. Bucureşti, 2.
78	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Maior de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Brevetat de Stat Major. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Porumbaru, 33. Bucureşti 3.
79	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Calea Victoriei 70, ap. 45, etajul 6. Bucureşti 1.
80	1943, Aug. 26	GAFENCU RODICA. Licenţiată în matematici. Profesoară. — Str. Unirii, 99. Buzău.
81	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. — Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Wilson, 13. Etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.
82	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Str. Gh. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
83	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. NICOLAE. Inginer Inspector General. — Director C. A. M. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
84	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică dela Universitatea din Paris. — Director în Ministerul Economiei Naţionale. Profesor la Şcoala de Statistică. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
85	1939, Dec. 7	GEORGESCU-ROEGEN OTILIA. Licenţiată în Matematici.—Profesoară secundară. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
86	1934, Dec. 19	GEORGESCU VAL. N. ION. Maior de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — M. I. A. Dir. Tehnică. — Str. Carol, 124. Câmpina.
87	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General/r. de Artilerie. — Str. Mântuleasa, 5. Bucureşti.
88	1936, Febr 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. Arhitect. — Str. Turda, 209. Bucureşti 2.

89	1941, Iunie 5	GHEORGHIU ALEXANDRU. Inginer constructor. — Directorul Soc. Anonime de Mine de granit, din Poeni. Asistent la Şcoala Politehnică. — Calea Victoriei, 128. Bucureşti.
90	1932, Apr 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Profesor Şcoala Politehnică Timişoara.
91	1914, Ian 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
92	1913, Aug 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Ad-ţia Comercială P. C. A. — Str. Aviator Iliescu, 44. Bucureşti 3.
93	1929, Aug 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Matematici dela Paris. Statistician.— Directorul Statisticei financiare.— Calea Griviţei, 217. Bucureşti 2.
94	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Lalescu, 3. Timişoara, 3.
95	1939, Dec. 7	GHERMANI DIONISIE. Inginer constructor şi electrician. — Profesor. Decan al Facultăţii de Construcţii, Politehnica din Bucureşti. Membru în diverse Comitete şi consilii Tehnice ale Statului. Adm. Delegat la Soc. Edilitatea. — Str. Paris, 45. Bucureşti 3.
96	1942, Febr. 19	GHICA AL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Aleea Alexandru, 16. Bucureşti 3.
97	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. AL. Col. Inginer Radio-electrician. E. S. E. (Paris). — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2.
98	1939, Febr 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici.—Asistent suplinitor Seminarul de Algebră superioară. — Facultatea de Ştiinţe. Timişoara.
99	1936, Aug 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer U. D. R. Bucureşti. — Str. Răspântiilor, 17 Bucureşti 3.
100	1942, Aug. 27	GHIŢESCU SPIRIDON. Licenţiat în Matematici, Diplomat al Institutului de Statistică din Bucureşti.— Profesor secundar la Liceul comercial „Petru Rareş" din Bucureşti.— Inspector General Şcolar în Ministerul Muncii. — Str. Al. Constantinescu, 1. Parcul Domeniilor, Bucureşti. Telefon 4.72.32.
101	1931, Mart 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov. — Str. Dorobanţilor, 5. Braşov.
102	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
103	1936, Febr. 27	GUŢU I. AL. Inginer. — Inginer la Societatea Petroşani. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
104	1941, Iunie 5	GUŢU ION. Inginer constructor. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R. — Str. Vişinilor, 2. Bucureşti 4.
105	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Director C. A. M. — Cartierul C. A. M. Filaret. Str. B, 12. Bucureşti 6.

106	1927, Ian. 28	HANGANU M. D. Doctor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris.— Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
107	1924, Ian 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Şeful serviciului M. II Mărfuri din Direcţia Mişcării C. F. R. — Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.
108	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
109	1928, Aug. 29	ILIESCU TRAIAN. General. — Directorul Liceelor Militare. — Str. Speranţei, 47 bis. Bucureşti.
110	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Buzeşti, 74. Bucureşti 2.
111	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
112	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Sorbona din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj-Sibiu. Decan al Facultăţii de Ştiinţe. — B-dul Diaconovici Loga, 8 B. Timişoara.
113	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Ştiinţele Matematice. — Profesor secundar. — Str. Agricultori, 15. Ap. 13. Bucureşti 4.
114	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU ION. Inginer Inspector General. — Profesor onorific al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Pensionar. — Str. Răsuri, 25. Bucureşti 3.
115	1941, Febr. 20	IONESCU I. PAUL. Profesor definitiv de matematici la Liceul comercial „Gh. Chiţu". — Str. Banu Mihalcea, 29. Craiova.
116	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Inspector şcolar. — Str. Sandu Aldea, 35. Bucureşti 2.
117	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licenţiat în Matematici. — Profesor — Directorul Liceului internat Buftea.
118	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU D. C. Cpt. Inginer constructor. Licenţiat în Matematici. — Şeful secţiei studii şi proiecte din S. S. Marină Serv. Geniu şi Domeniu. — Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
119	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. Secţia Mine şi Metalurgie. — Directorul Fabricei de Timbre. — Ministerul Finanţelor. — Str. Fabrica de Chibrituri, 28. Bucureşti 6.
120	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Comandor-Inginer. — Comandantul Şc. Tehnice ale Aeronauticii, Mediaş.
121	1929, Ian. 30	KAUFMANN NORBERT. Inginer S.N.P.S., Inginer-Consilier, Direcţiunea Lucrărilor Noi, C.F.R.—Str. General Manu 26, Bucureşti 2.
122	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia". — Piaţa Tebec, 2. Timişoara.
123	1939, Febr. 23	LASCU BAL. Licenţiat în Matematici.
124	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer-Şef. — Director în Administraţia C. A. M. Asistent la Şcoala Politehnică. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.

125	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Directorul Şcoalei de Electricieni şi Mecanici. — Bul. Regele Albert, 35. Bucureşti.
126	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Comandor. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnică din Bucureşti. Membru titular al Academiei de Ştiinţe din România. Comisar General-ajutor pentru Industriile de metalurgie şi armament. — Str. Zoe Râmniceanu, 10 B. Bucureşti 2.
127	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General de artilerie, pensionat.—Str. Spătarului, 54. Telefon 2-0940. Bucureşti 1.
128	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — St. Dr. Mirinescu, 23. Bucureşti.
129	1934, Dec. 19	MALAXA C. ELENA. Licenţiată în Matematici şi Fizico-Chimice. — Profesoară de matematici şi Directoarea Şcolii Centrale de fete din Bucureşti. — Str. General Lahovary, 3. Bucureşti 3.
130	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
131	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. Fost Director General al Regiei Monopolului Statului. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
132	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Str. Amiral Bălescu, 10. Bucureşti 3.
133	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Bd. Dacia, 41. Bucureşti 3.
134	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26. Bucureşti 6.
135	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — Intrarea Geneva, 6. Bucureşti 3.
136	1939, Dec. 7	MARIAN VICTOR. Doctor în Fizică. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Bul. Diaconovici Loga, 1 A. — Timişoara.
137	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
138	1943, Aug. 26	MATEESCU DAN, Inginer diplomat. — Inginer la Uzinele Reşiţa. — Str. Gh. Lazăr, Nr. 5. Reşiţa.
139	1943, Aug. 26	MĂTIEŞ V. ION. Licenţiat în matematici. Profesor titular definitiv la Liceul „Sf. Vasile", Blaj. — Aleea Viitorului, Nr. 11. Blaj.
140	1943, Febr. 18	MEHEDINCU VASILE, Profesor titular definitiv de Matematici la Liceul Comercial „N. Bălcescu", Bucureşti. Licenţiat în matematici dela Facultatea de Ştiinţe-Cluj. — Str. Alex. Constantinescu, Nr. 24. Parcul Domeniilor. Bucureşti 2.
141	1939, Aug. 31	MEREUŢĂ EM. Licenţiat în Matematici. — Str. Niculescu Bazar, 7. Parcul Ianculul. Bucureşti.
142	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Intreţinere C. F. R. — Str. Ştefan Burcuş, 12. Bucureşti 2.

143	1939, Dec. 7	MICLESCU ANDREI. Maior de Artilerie. Licenţiat în Fizico-chimice şi Drept, brevetat al Şcoalei de Război din Paris. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. Profesor la Şcoala Ofiţeri A. C. A. — Str. Delea Veche, 15 bis. Bucureşti 4.
144	1942, Aug. 27	MIHĂIESCU S. ŞTEFAN. Inginer, Diplomat al Şcolii Politehnice din Bucureşti. — Societatea Concordia. — Uzinele Metalurgice Concordia. Ploeşti.
145	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Str. Vulturilor, 63. Bucureşti 4.
146	1921, Febr 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.
147	1939, Dec. 7	MIHOC GHEORGHE Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. Director în Casa Centrală a Asigurărilor Sociale. — Str. Agricultori, 83. Bucureşti 4.
148	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Licenţiat în Matematici. — Str. Vulturilor, 48. Bucureşti 4.
149	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia", Gura Ocniţei. Jud. Dâmboviţa. — Aleea Eminescu, 14. Ploeşti.
150	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Director Liceul „N. Bălcescu" din Brăila. — Str. Galaţi, 59. Brăila.
151	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer Inspector General. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
152	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer Inspector General. Licenţiat în Matematici. — Director Tehnic Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovari, 1 A. Bucureşti 3.
153	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti.
154	1940, Febr. 8	MIU M. ION. Inginer Constructor. Licenţiat în Matematici. — Inginer la Direcţia Poduri C. F. R. — Gara de Nord. Bucureşti 2.
155	1939, Febr. 23	MORŢUN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „I. C. Brătianu". Piteşti.
156	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE. Inginer. — Director General S. T. B. — Str. Roma, 59. Bucureşti 3.
157	1928, Aug. 29	NEGURĂ GR. ST. Licenţiat în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Profesor definitiv la Liceul Codreanu din Bârlad. — Str. Dobranici, 16. Bârlad.
158	1939, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. Agricultori, 15. Bucureşti 4.
159	1910, Mai 21	NICHIFOR A. GHEORGHE. Doctor în Ştiinţele Matematice (Specialitatea Geometria Descriptivă). — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Facultatea de Arhitectură. — Str. Poliţiei, 3. Bucureşti 1.
160	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Şcoala Politehnică Timişoara. Director al Soc. A. E. G. Bucureşti. — B-dul T. Ionescu, 22, Bucureşti 1.

161	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-Industrial. Absolvent al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul General al fabricei de hârtie „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
162	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcţiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Constructori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6.
163	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor (r) de Marină. — Piaţa Washington, 2. Etaj III B. Bucureşti.
164	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti. — Str. Sabinelor, 119. Bucureşti 6.
165	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Odesa, 39. Bucureşti 2.
166	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Paris, 14. Bucureşti 3.
167	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.
168	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Inginer-Şef I. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti Secţia Electro-Mecanică. — Sub-Director Docurile Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.
169	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Cadastral Şcoala Politehnică. Inginer Hotarnic şi Operator Topometru. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar titular la Politehnica din Bucureşti la cursul de Construcţii Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfinţii Voievozi, 9. Bucureşti 2.
170	1910, Mai 21	ORĂŞEANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
171	1942, Aug. 27	PANAITE N. THEODOR. Căpitan, Inginer S. S. T. A. A. — Str. Neagoe Basarab, 26. Vila Florian. Braşov.
172	1929, Ian. 21	PANTAZI ALEXÁNDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Statistician-expert. — Profesor Politehnica Bucureşti. Profesor la Şcoala de Statistică. Inspector General actuar la Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Brezoianu, 38 bis. Bucureşti. (Telefon 3-4305).
173	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R. — Str. Istrate, 44. Bucureşti 5. (Telefon 4-6329).
174	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici. — Sub-Director în Direcţia Generală a Monitorului Oficial. — Splaiul Independenţei, 56. Bucureşti.

175	1939, Dec. 7	PAVEL DORIN. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnica Bucureşti. — Str. Dr. Severeanu, 26. Bucureşti 6.
176	1941, Iunie 5	PERLEA G. DAN. Inginer C. F. R. — Str. Dr. Severeanu, 8. Bucureşti 6.
177	1939, Dec. 7	PERSU AUREL. Inginer. — Conferenţiar la Politehnica Bucureşti. — Calea Victoriei, 159. Bucureşti.
178	1939, Dec. 7	PETRESCU S. GHEORGHE. Doctor în Matematici. — Asistent la Observatorul din Bucureşti. — Str. Tutunari, 38. Bucureşti 6.
179	1940, Aug. 28	PETRESCU PETRE. Lt.-Col. rez. din Artilerie.—Str. Roma (Intrarea Roma, 5). Bucureşti 3.
180	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5
181	1939, Dec. 7	POPESCU M. IOAN. Maior activ de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Brevetat de Stat Major. — Profesor de Matematici la diferite Şcoli Militare din Bucureşti. — Str. Dr. C. Severeanu, 23. Bucureşti 6.
182	1935, Apr. 10	POPESCU A. VICTOR. Inginer — Director la Soc. Comunală a Tramvaelor Bucureşti. Conferenţiar Politehnica Bucureşti. — Str. Comand. E. Botez, 12. Bucureşti 3
183	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer electromecanic. — Director al Fabricei de motoare de aviaţie I. A. R. — Str. N. Iorga, 14. Braşov.
184	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar. — Str. Lăţescu, 22. Iaşi.
185	1931, Mart. 11	POPP N. Comandor. Inginer. — Subsecretariatul de Stat al Aerului. — Str. Viitor, 16. Bucureşti 3.
186	1927, Mai 11	POPP I. TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Colegiul Naţional „Sf. Sava". Inspector general didactic, Min. Apărării Naţionale. — Str. Clucerului, 10. Bucureşti 2.
187	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor.— B-dul Basarab (Alee) 9. Bucureşti 2
188	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. General de Divizie. Comandantul Corpului II Teritorial. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
189	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. — Consilier Controlor la Inalta Curte de Conturi. — Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2
190	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel/r. din Artilerie. — B-dul Lascăr Catargiu, 16. Bucureşti 3
191	1941, Iunie 5	PROVINCEANU MIHAIL. Inginer electromecanic. Diplomat al Şc. Politehnice Bucureşti şi Şcoala Superioară de Electricitate Paris. — Inginer la Soc. de Gaz şi Electricitate. — Parcul Jianu. Str. Q, 24. Bucureşti

192	1941, Febr. 20	RĂDULESCU I. MIRCEA. Inginer constructor.—Diplomat al Şcoalei Politehnice. Şef de secţie în Direcţiunea Podurilor C. F. R. Secţia I Poduri C. F. R. Sinaia.
193	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Consilier în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti.
194	1943, Febr. 18	ROMAŞCAN GEORGETA. Inginer constructor. Licenţiată în Matematici. Inginer referent la Consiliul Tehnic Superior. — Str. Romană, 182. Bucureşti 3.
195	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în drept. Doctor în ştiinţele Politico-Economice. — Ad-tor financiar de Constatare Indirecte. Sect. 4 Verde. — Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6.
196	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer, Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
197	1941, Febr. 20	RUZVAN I. THEODOR. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer Direcţia Podurilor C. F. R. — Bd. G-ral Traian Moşoiu, 11. Bucureşti 5.
198	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Subdirector General la Monitorului Oficial şi Imprimeriile Statului. — Cartierul C. A. M. Filaret Str. B. 28. Bucureşti 6.
199	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor. — B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
200	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer Constructor. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5 (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
201	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer-Şef. — Direcţia de Studii a Căilor Ferate Române. Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti.—Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
202	1938, Aug. 31	SAVIN C. I. Căpitan. Licenţiat în Matematici. — Str. Dr. Severeanu, 35. Bucureşti 3.
203	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer-Mecanic-Electrician. — Director P. T. T. — Str. Ştirbey-Vodă, 65. Bucureşti.
204	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Inginer la Consiliul Tehnic Superior. — Str. Paleologul, 3 bis. Bucureşti 4.
205	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer de mine. S.M.P. Licenţiat în Matematici şi Drept. — Director Tehnic la Societatea „Steaua Română". — Str. C. A. Rosetti, 25. Bucureşti.
206	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor la Universitatea din Cluj. Membru corespondent al Academiei Române — Str. Milano, 12. Timişoara.
207	1921, Febr. 6	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Şos. Kiseleff 25. Bucureşti 2.
208	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Inspector în învăţământul secundar. — B-dul Pache, 99. Corp. VI. Bucureşti.

209	1940, Aug. 28	SIMIONESCU MIRCEA. Inginer constructor. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. Inginer la S. T. B. — Str. Varşovia, 2. Bucureşti 3.
210	1941, Iunie 5	ŞLEAHTENEA DUMITRU. Inginer constructor. Diplomat Şcoala Politehnică Bucureşti 928. — Soc. Comunală Locuinţe ieftine Bucureşti. — Parcul Ianculul II. Str. Gabrielescu, 5. Bucureşti.
211	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General cl. I în Corpul Tehnic. Subdirector General în Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
212	1943, Febr. 18	STAMATE I. IONEL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Liceul Militar Timişoara.
213	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. — Subdirector Direcţia de Studii C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
214	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
215	1938, Febr. 17	STAN I. AURELIAN. Căpitan de Artilerie. Inginer electromecanic Licenţiat în Matematici. Absolvent al Şcoalei de Aplicaţie a Artileriei dela Fontainebleau (Franţa). — Str. Atena, 3. Bucureşti 1.
216	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
217	1941, Febr. 20	STANCU S. MARIN. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer, Secţia I Poduri C. F. R. — Staţia Ploeşti-Triaj.
218	1941, Iunie 5	STANCU S. MIRCEA. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Şef de Şantiere la Soc. Comunală de Locuinţe ieftine, Bucureşti. — Calea Şerban Vodă, 272. Bucureşti.
219	1943, Aug. 26	STĂNCULESCU I. ION. Inginer. Asistent suplinitor la catedra de Poduri şi Construcţii Metalice S. P. — Inginer în Direcţia de Studii şi Lucrări Noi P. C. A. din M. L. P. C. — Str. Poet Macedonski, 8. Bucureşti.
220	1941, Aug. 28	ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE. Sublocotenent. Ofiţer de Transmisiuni. Instructor la Şcoala de Ofiţeri de Transmisiuni. — Str. Popp de Băseşti, 52. Bucureşti 4.
221	1941, Iunie 5	ŞTEFĂNESCU-GOANGĂ AUREL. Inginer ord. clasa II, Politehnica Bucureşti, construcţii. Sublocotenent de rezervă A. C. A. — Inginer în Serviciul construcţiilor şi instalaţiilor C. A. M. Asistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă la Politehnica Bucureşti. — Parcul Ianculul, Str. Lt. Ionescu Anton, 27. Bucureşti 4.
222	1939, Febr. 23	STOENESCU I. ALEXANDRU. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R.. — Str. Caragea Vodă, 21. Bucureşti 3.
223	1943, Febr. 18	STOICA D. ALEXANDRU. Inginer diplomat al Politehnicei din Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.

224	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Directorul Societăţii Comunale pentru Construirea de Locuinţe ieftine Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
225	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Lic. Industrial băieţi, Buzău.
226	1941, Iunie 5	STOIKA VICTOR. Inginer Inspector General. — Preşedintele Consiliului de Administraţie C. F. R. — Str. Paris, 12. Bucureşti 3
227	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de rezervă. — Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
228	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici. Doctor Inginer mecanic. — Profesor de Radio-Comunicaţii la Politehnica din Bucureşti. — Str. Cazărmei, 52. Aleea Bagdad, 5. Bucureşti 6.
229	1900, Noem. 1	TEODOREANU VASILE. Profesor onorar. Pensionar. — Str. Zlataust, 7. Iaşi.
230	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Rector al Politehnicei din Bucureşti.
231	1937, Ian. 28	THEODORU G. HENRI. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Antreprenor. — Str. Alex. Donici, 27. Telef. 2.37.89. Bucureşti 3.
232	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Str. Basarabia, 12. Bucureşti 2.
233	1940, Aug. 28	TULLEA C. GH. Inginer Inspector General. — Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Aviator Theodor Iliescu, 69. Bucureşti 3.
234	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
235	1939, Dec. 7	ŢINTEA M. ION. Inginer Diplomat. Doctor-Inginer, Şcoala Politehnică Berlin-Charlottenburg. — Inginer la S. S. A. — Profesor la Şcoala de Ofiţeri de Aviaţie şi la Şcoala de Sub-Ingineri. — Str. Leova, 42. Bucureşti 4.
236	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3.
237	1939, Aug. 31	ŢIŢEICA RADU. Doctor în Fizică. Licenţiat în Matematici, Inginer. — Profesor la Labor. Optică, Facultatea de Ştiinţe din Cluj-Timişoara. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3.
238	1941, Febr. 20	ŢIŢEICA ŞERBAN. Licenţiat în matematici, licenţiat în ştiinţe fizico-chimice, doctor în ştiinţe. — Str. Vovidenie, 23. Iaşi.
239	1936, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer. — Intrarea Geneva, 4. Bucureşti 3.
240	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. Dr. Lister, 65. Bucureşti 6.
241	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI VICTOR. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Profesor la Universitatea din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. — Director al Institutului de Aerodinamică. — Str. Odesa, 44. Bucureşti 3.

242	1914, Dec. 20	VARDALA ION. Inginer Inspector General. — Preşedintele Comitetului de Direcţie P. C. A. şi al Consiliului Superior al Apelor. — Str. Wilson, 15. Bucureşti 1.
243	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General. — Profesor şi Subdirector al Liceului Industrial Nr. 1. — Str. Viitorului, 48. Bucureşti 3.
244	1932, Mart. 26	VASILESCU GR., Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti (1919). Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi Industriale din Bucureşti. — Profesor Politehnica din Bucureşti. Subdirector în Direcţia Generală a Porturilor şi a Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Str. Brezoianu, 27. Bucureşti 1.
245	1920. Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef. — Str. Popovici, 22. Bucureşti, 2.
246	1940, Febr. 8	VASILESCU I. TEODOR. Inginer constructor.
247	1931, Apr. 10	VASILIU G. DAN. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Director la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. N. Bălcescu, 17. Bucureşti.
248	1941, Febr. 20	VASILIU C. EUGENIU. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Antreprenor de Lucrări publice şi particulare. — Str. Vornicul Mogoş, 6. Bucureşti 4.
249	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. — Parc. Voevod Mihai, 14. Câmpina.
250	1941, Febr. 20	VASILIU C. ION. Inginer constructor S. P. B. — Subşeful Serviciului Construcţiilor în Direcţia rectificării — Str. Roger Nanu, 5. Piatra-N.
251	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 1.
252	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Ştiinţe fizice. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Cluj, Banca Albina.
253	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar Mihai Viteazul din Tg.-Mureş. — Str. Mărăşeşti, 12. Timişoara 1.
254	1933, Febr. 22	WOINAROVSKY R. Licenţiat în Matematici. — Calea Moşilor, 133. Bucureşti 3.
255	1941, Iunie 5	ZAMFIRESCU GH. ION. Căpitan de Artilerie. — Inginer Minist. Inzestrării Armatei Direcţia Tehnică. — Bd. Elisabeta, 97. Bucureşti 2.
256	1929, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti. — Directorul Institutului Politehnic din Bucureşti. Str. Pasteur, 44. Bucureşti 6.
257	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Comandor. Inginer în Subsecretariatul de Stat al Aerului. Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris). — Str. Pasteur, 44. Bucureşti 6. (Telefon 4-3929).
258	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich. — Antreprenor. — Bulevardul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAȚI *)

	Data admiterii	Data morții
1. ANGELESCU A.	1919 Septemvrie 12	1938 Apr. 6
2. BANCIU I.	1911 Februarie 20	1940 Sept. 16
3. BOTEA N.	1932 Aprilie 20	1937 Dec. 18
4. BRATU GH.	1920 August 15	1941 Sept. 1
5. BUNGEȚIANU D. PREDUȚA	1938 Februarie 27	1940 August 21
6. FILIPESCU E. G.	1909 Iulie 1	1937 Noembrie 24
7. FUNDĂȚEANU C. I.	1928 Mai 9	1940 Sept. 23
8. IOACHIMESCU GH. ANDREI	1895 Septemvrie 15	1943 Martie 13
9. PANAITESCU SC.	1914 Decemvrie 20	1938 Martie 22
10. PATRICIU G. TITUS	1911 Decemvrie 17	1937 Ian. 5
11. POPESCU I.	1922 August 31	1936 Sept. 20
12. TEODORESCU V. N	1911 Mai 18	1943 Ianuarie 23
13. ȚIȚEICA GH.	1895 Noemvrie 1	1939 Februarie 5
14. ZAMFIRESCU C. GRIGORE	1924 Ianuarie 30	1943 Iunie 8

PREMIILE, BURSELE ȘI PUBLICAȚIILE SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ“

I. **Premii.** In cursul anului XLVIII de aparație a *Gazetei* (anul școlar 1942—1943) situația premiilor anunțate ca disponibile în Nr. 1 (Septemvrie 1942), a fost următoarea:

1. *Premiul de aritmetică*, în valoare de lei 5.000, a fost acordat elevei TUDORAN LIDIA dela Școala Centrală de fete, din București în baza raportului publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 7, pag. 299.

2. *Premiul de geometrie elementară* «G. ȚIȚEICA», în valoare de lei 5.000, a fost acordat D-lui P. P. DRĂGHICESCU, după cum s'a arătat la Nr. 11, pag. 502.

3. *Premiul de algebră*, s'a acordat de asemenea D-lui P. P. DRĂGHICESCU, în conformitate cu raportul publicat în *Gazeta Matematica*, Nr. 9, pag. 406.

*) Aci sunt trecuți în ordinea alfabetică numai redactorii și membrii decedați în ultimii 7 ani și cari au stat la „*Gazeta Matematică*“ până la sfârșitul vieții lor.

4. *Premiul de trigonometrie* « V. CRISTESCU », nu s'a acordat anul acesta conform raportului publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 10, pag. 448.

5. *Premiul de mecanică şi astronomie* « SPIRU HARET », s'a împărţit studenţilor E. MODÂLCĂ şi R. VOINEA, fiecăruia câte 5.000 lei, cu raportul publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 12 pag. 546.

6. *Premiul de filosofia matematicilor* « VASILE CONTA », în valoare de 4.000 lei, n'a fost atribuit nici în anul acesta, din lipsă de lucrări, conform prevederilor regulamentare după cum arată raportul publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 3, pag. 107.

7. *Premiul de matematici superioare pure sau aplicate* « ING. H. CAPRIEL », în valoare de 1.000 lei, urmează să se acorde în anul 1944, la terminarea perioadei de 5 ani regulamentare, pentru una din lucrările ce se vor fi primit în termen, asupra subiectului propus de Comisiunea acestui premiu, subiect care a fost publicat în vol. XLV, pag. 461.

8. *Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare* « GENERAL SC. PANAITESCU ». Cu anul acesta începe o nouă perioadă de 5 ani, la sfârşitul căreia se va acorda un premiu cu acest nume. Conform raportului ce se publică în numărul de faţă se va ţine seamă pentru premiere, de lucrarea D-lui CĂP. GH. GHEORGHIU, „Studiu Matematic al perforării plăcilor de blindaje" (manuscris).

9. *Premiul* « LT. COL. GH. TĂNĂSESCU », a revenit elevilor POPESCU GH. MARIN şi DUMITRESCU F. DAN, primii clasificaţi la concursul *Gazetei Matematice*, din 1943.

10. *Premiul de geometria triunghiului şi tetraedrului* « NICOLAE G. BOTEA, a fost decernat elevului JULIAN PETRESCU; raportul de premiere se găseşte publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 5, pag. 207.

11. *Premiul anual* « ING. AL. ROŞU », a fost dat şi anul acesta tot D-lui PAUL P. DRĂGHICESCU, deoarece a fost cel mai harnic corespondent al Gazetei în anul precedent (Vol. XLVII). Raportul de premiere a fost publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 8, pag. 347.

* * *

Pentru anul XLIX al Gazetei (anul şcolar 1943—1944), în conformitate cu *regulamentele ce se se pot cumpăra dela Gazeta Matematică* se vor putea acorda următoarele premii:

1. *Premiul anual de aritmetică de 5.000 lei.*

2. *Premiul anual de geometrie elementară* « GH. ŢIŢEICA », *de 5.000 lei.*

3. *Premiul anual de algebră de 5.000 lei.*

4. *Premiul anual de trigonometrie* « VASILE CRISTESCU », dispune anul acesta de 20.000 lei, din care se va putea acorda fie un singur premiu de această valoare, fie 2—4 în valoare minimă de câte 5.000 lei.

5. *Premiul anual de mecanică sau astronomie* « SP. HARET », va dispune anul acesta de suma de 10.000 lei, putându-se acorda fie un singur premiu de această valoare, fie unul sau două premii de câte 5.000 lei, fiecare.

6. *Premiul anual de filosofia matematicilor* « VASILE CONTA », va dispune anul acesta de 16.000 lei şi se vor acorda 1—4 premii de câte 4.000 lei sau premii mai mari, eventual unul singur de valoarea întregei sume disponibile.

7. *Premiul anual* « LT. COL. GH. A. TĂNĂSESCU », constând din cărţi de matematici cumpărate din venitul fondului cu acest nume, este destinat primului clasificat la concursul anual al Gazetei.

8. *Premiul anual de geometria triunghiului şi tetraedului* « NICOLAE GH. BOTEA », din venitul fondului cu acest nume.

9. *Premiul anual* « ING. GH. A. ROŞU », constând din venitul fondului respectiv, este destinat celui mai harnic corespondent al volumului XLVIII.

II. **Burse.** Din venitul fondului « PROFESOR ION IONESCU », nu s'a acordat în anul şcolar 1942—1943 nicio bursă din lipsă de candidaţi.

Conform regulamentului, venitul rămas disponibil se va adăoga la venitul din anul ce începe şi va servi pentru acordarea de burse în anul şcolar 1943/1944.

Pentru prima oară se va acorda în 1933/944 şi o bursă din fondul «INGINER GH. EM. FILIPESCU».

III. **Publicaţii.** In biblioteca tehnică a *Gazetei Matematice*, căreia îi sunt destinate veniturile fondului « ANGHEL SALIGNY », nu s'a făcut nicio publicaţie anul acesta.

Din disponibilităţile curente ale Societăţii „*Gazeta Metemetică* s'a tipărit:

1. Culegerea de Probleme de Mecanică de A. G. IOACHIMESCU sub îngrijirea D-rei G. ŢIŢEICA.

2. Trigonometrie sferică de V. CRISTESCU sub îngrijirea D-lui GENERAL GH. LITEANU.

3. Culegere de probleme de geometrie descriptivă de D-l ING. I. I. CHIŢULESCU şi

4. Algebra Superioară de D-l N. ABRAMESCU, ediţia VIII-a.

COMISIUNEA PENTRU ADMINISTRAREA FONDURILOR SPECIALE ALE SOC. « GAZETA MATEMATICĂ »

AL. AL. ROŞU, ING. D. A. STAN.

FORŢE DIRIJATE DUPĂ LATURILE UNUI TRIUNGHIU

Rândurile ce urmează au ca punct de plecare problema 5725 rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 379 *).

1°. Reamintim că faţă de triunghiul de referinţă ABC, ecuaţia

$$lx + my + nz = 0 \qquad (1)$$

reprezintă, în coordonate baricentrice, o dreaptă, iar l, m, n sunt proporţionale cu distanţele dela vârfurile A, B, C la această dreaptă.

2°. Fie F_a, F_b, F_c trei forţe dirijate după laturile triunghiului ABC şi R rezultanta lor, aşezată pe dreapta-suport Δ.

Ne propunem să găsim ecuaţia baricentrică a dreptei Δ luând pe ABC ca triunghiu de referinţă. Vom nota cu d_a, d_b, d_c distanţele dela vârfuri la dreaptă şi vom lua momentele în raport cu vârfurile triunghiului. Avem:

$$\mathfrak{M}_a = F_a h_a = R \cdot d_a \qquad \therefore \qquad d_a = \frac{F_a h_a}{R}$$

*) Asupra aceleiaşi probleme a se vedea articolele:

1. *Asupra unei matrice din calculul vectorial* de V. VÂLCOVICI, G. M., Vol. XLVIII, pag. 401.

2. *Sisteme de vectori cu rezultante paralele cu o dreaptă sau un plan* de D. V. IONESCU, G. M., Vol. XLVIII, pag. 441.

şi analog:

$$d_b = \frac{F_b h_b}{R} \quad ; \quad d_c = \frac{F_c h_c}{R}$$

unde h_a, h_b, h_c sunt înălţimile triunghiului. Ţinând seama de cele dela 1° şi suprimând factorul $\frac{1}{R}$, ecuaţia dreptei Δ va fi:

$$F_a h_a x + F_b h_b y + F_c h_c z = 0.$$

Insă

$$h_a = \frac{2S}{a} \quad , \quad h_b = \frac{2S}{b} \ldots$$

aşa încât suprimând factorul 2S găsim forma definitivă a ecuaţiei dreptei-suport a rezultantei:

$$\frac{F_a}{a} x + \frac{F_b}{b} y + \frac{F_c}{c} z = 0. \tag{2}$$

2° Ca o primă aplicaţie să dăm o nouă soluţie problemei 5725. Fie P_a, P_b, P_c alte trei forţe dirijate după laturile triunghiului, având rezultanta P. Pentru ca R şi P să fie paralele va trebui ca suporturile lor şi dreapta dela infinit să fie concurente. Ecuaţiile celor trei drepte sunt:

$$x + y + z = 0$$

$$\frac{F_a}{a} x + \frac{F_b}{b} y + \frac{F_c}{c} = 0$$

$$\frac{P_a}{a} x + \frac{P_b}{b} y + \frac{P_c}{c} = 0,$$

iar condiţia ca ele să fie concurente este

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{F_a}{a} & \frac{F_b}{b} & \frac{F_c}{c} \\ \frac{P_a}{a} & \frac{P_b}{b} & \frac{P_c}{c} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{adică} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ F_a & F_b & F_c \\ P_a & P_b & P_c \end{vmatrix} = 0$$

tocmai ce se cerea în problemă.

3°. Procedând la fel, se vede imediat că dacă luăm trei grupuri de forţe F_a, F_b, F_c; P_a, P_b, P_c; G_a, G_b, G_c, atunci condiţia ca rezultantele lor să fie concurente este

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} F_a & F_b & F_c \\ P_a & P_b & P_c \\ G_a & G_b & G_c \end{vmatrix} = 0.$$

4°. Dacă F_a, F_b, F_c sunt proporţionale cu laturile triunghiului, ecuaţia (2) devine $x + y + z = 0$, adică dreapta dela infinit. Regăsim deci propoziţia cunoscută că în acest caz sistemul de forţe se reduce la un cuplu.

5°. Dacă F_a, F_b, F_c sunt invers proporţionale cu a, b, c atunci $aF_a = bF_b = cF_c = k$. Scoţând pe F_a, F_b, F_c şi ducând valorile în (2) găsim că suportul rezultantei este

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 0$$

adică dreapta lui LEMOINE.

Observaţie. In acest fel se poate continua. Se poate pune şi probleme inversă de a determina pe F_a, F_b, F_c pentru ca rezultanta să fie pe o anumită dreaptă a triunghiului. Pentru aceasta e deajuns să se scrie că acea dreaptă şi ecuaţia (2) au coeficienţii proporţionali.

6°. *Dacă între forţele F_a, F_b, F_c dirijate după laturile unui triunghiu există o relaţie lineară omogenă, rezultanta lor trece printr'un punct fix.*

Fie $$mF_a + nF_b + pF_c = 0$$

relaţia între forţe.

Se observă că ecuaţia dreptei Δ

$$\frac{F_a}{a}x + \frac{F_b}{b}y + \frac{F_c}{c}z = 0$$

este verificată de punctul fix $T(ma, nb, pc)$ în baza relaţiei date.

7°. *Dacă între forţele F_a, F_b, F_c există o relaţie care nu este lineară, atunci rezultanta lor înfăşoară în general o curbă.*

Fie (4) $\varphi(F_a, F_b, F_c) = 0$ relaţia *omogenă* între forţe. Să notăm cu D prima parte a ecuaţiei (2). Infăşurătoarea se găseşte eliminând pe F_a, F_b, F_c între ecuaţiile

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial F_a}}{\frac{\partial D}{\partial F_a}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial F_b}}{\frac{\partial D}{\partial F_b}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial F_c}}{\frac{\partial D}{\partial F_c}} \quad \text{sau} \quad (5)\ \frac{a\frac{\partial\varphi}{\partial F_a}}{x} = \frac{b\frac{\partial\varphi}{\partial F_b}}{y} = \frac{c\frac{\partial\varphi}{\partial F_c}}{z}$$

şi ecuaţia (2) sau (4).

8°. Ca aplicaţie să găsim înfăşurătoarea rezultantei în cazul când avem relaţia

$$(6) \qquad m\sqrt{F_a} + n\sqrt{F_b} + p\sqrt{F_c} = 0.$$

Rapoartele (5) devin:

$$\frac{am}{x\sqrt{F_a}} = \frac{bn}{y\sqrt{F_b}} = \frac{cp}{z\sqrt{F_c}} = \frac{1}{k}$$

$$\therefore\ \sqrt{F_a} = k\frac{am}{x}\ ;\ \sqrt{F_b} = k\frac{bn}{y}\ ;\ \sqrt{F_c} = k\frac{cp}{z}$$

care duse în (6) ne dă înfăşurătoarea

$$(7) \qquad \frac{am^2}{x} + \frac{bn^2}{y} + \frac{cp^2}{z} = 0$$

o conică *circumscrisă* triunghiului ABC. Dacă $m = \sqrt{a}$; $n = \sqrt{b}$; $p = \sqrt{c}$, conica este *cercul circumscris*; dacă

$$m = \frac{1}{\sqrt{a}}\ ;\ n = \frac{1}{\sqrt{b}}\ ;\ p = \frac{1}{\sqrt{c}},$$

conica este *prima lipsă a lui* STEINER.

9°. Să căutăm înfăşurătoarea rezultantei când relaţia este

$$\frac{m}{F_a} + \frac{n}{F_b} + \frac{p}{F_c} = 0.$$

Rapoartele (5) devin

$$\frac{ma}{xF_a^2} = \frac{nb}{yF_b^2} = \frac{pc}{zF_c^2} = \frac{1}{k^2}$$

$$\therefore\ F_a = \pm k\sqrt{\frac{ma}{x}}\ ;\ F_b = \pm k\sqrt{\frac{nb}{y}}; \ldots$$

care duse în relaţia dată ne dă:

$$(8) \qquad \pm\sqrt{\frac{m}{a}x} \pm \sqrt{\frac{n}{b}y} \pm \sqrt{\frac{p}{c}z} = 0$$

care este ecuaţia unei conice înscrise, al cărui punct GERGONNE este $U\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}\right)$. Dacă $m = a$, $n = b$, $p = c$, conica este elipsa lui STEINER înscrisă. Dacă $m=a(p-a)$; $n=b(p-b)$; $p=c(p-c)$, conica este cercul înscris triunghiului.

10°. Să revenim la cazul când avem două grupe de forţe F_a, F_b, F_c şi P_a, P_b, P_c. Suporturile rezultantelor vor avea drept ecuaţii:

$$\frac{F_a}{a}x+\frac{F_b}{b}y+\frac{F_c}{c}z = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{P_a}{a}x+\frac{P_b}{b}y+\frac{P_c}{c}z = 0.$$

Să calculăm unghiul făcut de cele două rezultante. Vom folosi formula [1])

$$\operatorname{tg}\theta = 2S \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} : N$$

unde $N = a^2uu' + b^2vv' + c^2ww' - \Sigma(vw' + wv')\,bc\cos A$,

iar u, v, w; u', v', w' sunt coeficienţii celor două drepte. In cazul nostru înlocuind $u = \frac{F_a}{a}$ $u' = \frac{P_a}{a}$ etc. şi scoţând înafara determinantului pe $\frac{1}{abc} = \frac{1}{4RS}$ găsim că unghiul este dat de:

$$(9) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{1}{2R}\begin{vmatrix} a & b & c \\ F_a & F_b & F_c \\ P_a & P_b & P_c \end{vmatrix}}{\Sigma F_a P_a - \Sigma(F_b P_c + F_c P_b)\cos A}$$

Cele două rezultante vor fi perpendiculare dacă

$$(10) \qquad \Sigma F_a P_a - \Sigma(F_b P_c + F_c P_b)\cos A = 0.$$

GH. D. SIMIONESCU.

---

1) *Coordonnées barycentriques* par C. COSNITZA, pag. 49.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU"

Domnilor Membri,

Pentru premiul « GENERAL SCARLAT PANAITESCU », examinând lucrările apărute în cursul anului 1942—1943, care au aplicaţiuni de matematici la Ştiinţele Militare, am remarcat, printre numeroasele publicaţiuni apărute sau de care am luat cunoştinţă sub formă de manuscript, lucrarea D-lui Cpt. GHEORGHIU GHEORGHE din Direcţia Tehnică tratând despre:

„Studiul matematic al perforării plăcilor de blindaje".

D-sa, fiind licenţiat în matematici şi luând parte la campania din Rusia, a făcut unele interesante observaţiuni în timpul tragerilor anti-car, pe care le-a transformat într'un studiu matematic al şocului, utilizând ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale.

Concluziile la care a ajuns sunt deocamdată pur teoretice, iar o verificare a lor prin trageri urmează a se face cu ocazia tragerilor de poligon pe care Direcţia Tehnică le are în program.

Studiul ne-a fost prezentat numai sub formă de manuscript, pe care am fost nevoiţi să-l predăm Revistei Artileriei spre publicare.

Socotind că această aplicaţiune matematică la ştiinţele militare este cea mai interesantă, îl propunem spre premiere, fapt ce va încuraja pe Domnul Cpt. GHEORGHIU GHEORGHE pentru perfectarea studiului.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI
« SCARLAT PANAITESCU »

ING. AL. BUNESCU, COMANDOR I. LINTEŞ,
CPT. GH. ION ZAMFIRESCU.

Acest raport a fost citit şi aprobat în Adunarea Generală din 26 August 1943.

NOTE MATEMATICE

1. *Asupra problemei 3292.* In G. M., XXXV — 106 se pune întrebarea: *Când putem avea:* $\varphi(N+1) < \varphi(N)$, *unde* $\varphi(i)$ *este indicatorul lui* i ?

Soluţia dată acolo neprecizând clasele de soluţii numerice, vom da mai jos câteva din ele.

1. Pentru $N = p > 3$ unde p este prim, avem o clasă de soluţii. In adevăr avem:

$$1) \qquad \varphi(p+1) < p - 1.$$

Pentru a dovedi însă aceasta, voi arăta că în cazul când $(p+1)$ este par, avem:

$$2) \qquad \varphi(p+1) \leqslant \frac{p+1}{2}.$$

Vom nota deci:

$$p + 1 = 2^k \cdot m$$

unde m este impar. Atunci:

$$\varphi(p+1) = 2^{k-1} \cdot \varphi(m).$$

Dar cel mai mare indicator al lui m este în cazul numerelor prime, deci:

$$\varphi(p+1) \leqslant 2^{k-1} \cdot (m-1).$$

Prin urmare am avea:

$$2^{k-1} \cdot (m-1) < \frac{p+1}{2}$$

deoarece:

$$m - 1 < m$$

urmează că neegalitatea din 2) este demonstrată.

Atunci avem:

$$\frac{p+1}{2} < p - 1$$

pentru $p > 3$.

2. Pentru $N = p \cdot q$ unde numerele p şi q sunt prime, iar $p > 3$ şi $q > p$, avem iarăşi o clasă de soluţiuni.

In adevăr, avem:

3) $$(p-1)(q-1) > \varphi(p \cdot q+1).$$

Cum $(p \cdot q+1)$ este par, atunci:

$$\varphi(p \cdot q+1) \leqslant \frac{p \cdot q+1}{2}$$

deci va trebui să avem:

$$(p-1)(q-1) > \frac{p \cdot q+1}{2}.$$

Sau:

4) $$p \cdot q+1 > 2(p+q).$$

Admitem:

$$p = 3+x \quad \text{şi} \quad p = 3+x+y$$

unde $x \geqslant 1$ şi $y \geqslant 1$. Inlocuind, obţinem:

$$2x+y+x(x+y) > 2$$

ceea ce este evident.

In mod analog pot fi găsite şi alte clase de soluţii.

C-DOR I. LINTEŞ.

2. *Valoarea numerică a polinoamelor.* Fie $P(x)$ un polinom de gradul m, căruia vrem să-i aflăm valoarea numerică pentru $x=a$.

Dacă în cazul valorilor raţionale ale lui a, înlocuirea lui a cere calcule uşoare, în cazul valorilor de forma $m+\sqrt{p}$ calculul devine migălos. Propun în acest caz, metoda ce urmează.

Asociem lui $m+\sqrt{p}$, valoarea conjugată $m-\sqrt{p}$ şi căpătăm uşor trinomul Ax^2+Bx+C care se anulează pentru $x = m \pm \sqrt{p}$.

Avem relaţia evidentă:

$$P(x) \equiv (Ax^2+Bx+C) \cdot Q(x) + R(x)$$

în care $R(x)$, restul împărţirii lui $P(x)$ prin Ax^2+Bx+C, este un binom de gradul 1.

Cum însă Ax^2+Bx+C se anulează pentru $x = m \pm \sqrt{p}$ rezultă că

$$P(m \pm \sqrt{p}) = R(m \pm \sqrt{p})$$

Deci *valoarea numerică a polinomului* $P(x)$ *pentru* $x=m+\sqrt{p}$, *se află împărțind* $P(x)$ *prin trinomul de gradul 2:* Ax^2+Bx+C, *care se anulează pentru* $x=m\pm\sqrt{p}$, *și înlocuind pe* x *cu* $m+\sqrt{p}$ *în restul acestei împărțiri, rest care este un binom de gradul 1.*

Exemplu: *Să se afle valoarea numerică a polinomului*

$$P(x)\equiv x^5-4x^4+3x^3-5x^2-6x+8$$

pentru $x=2-\sqrt{3}$.

Trinomul care are rădăcinile $x=2\pm\sqrt{3}$, este:

$$(x-2-\sqrt{3})\ (x-2+\sqrt{3})\equiv x^2-4x+1.$$

Restul împărțirii lui $P(x)$ prin x^2-4x+1 este:

$$R(x)\equiv 4x+5.$$

$$\text{Deci: } P(2-\sqrt{3})=R(2-\sqrt{3})=4(2-\sqrt{3})+5$$

$$P(2-\sqrt{3})=13-4\sqrt{3}.$$

CONSTANTIN G. ILIOVICI.

3. *Câteva identități curioase.* Studiul unor ecuații multigrade m'au condus la unele identități numerice curioase, din care dau câteva pentru cititorii aceste reviste:

1^0 $\quad 2+3+19+22=(-2)+10+15+23$

$$2^2+3^2+19^2+22^2=(-2)^2+10^2+15^2+23^2$$

$$3^2+19^2+22^2=6^2+17^2+23^2$$

$$3^4+19^4+22^4=6^4+17^4+23^4$$

$$3^6+19^6+22^6=10^6+15^6+23^6$$

2^0. $\quad 3+19+22+5+8+16+21+30=$

$$=10+15+23+1+9+12+26+28$$

$$3^3+19^3+22^3+5^3+8^3+16^3+21^3+30^3=$$

$$=10^3+15^3+23^3+1^3+9^3+12^3+26^3+28^3$$

$$3^4+19^4+22^4+5^4+8^4+16^4+21^4+30^4=$$

$$=10^4+15^4+23^4+1^4+9^4+12^4+26^4+28^4$$

3^0. $\quad 9^2+625^2+1444^2=49^2+400^2+1521^2$

$$\sqrt{9}+\sqrt{625}+\sqrt{1444}=\sqrt{49}+\sqrt{400}+\sqrt{1521}.$$

A. MOESSNER.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN CLUJ

Secţia de Matematici la Timişoara

Examenele din sesiunea Octomvrie 1942

ANUL I.

Matematici Generale. *Proba I-a.* Se consideră ecuaţia de tip RICCATI

$$y' - \frac{3x^2}{x^5-1} - \frac{x^4}{x^5-1}y + \frac{2x}{x^5-1}y' = 0.$$

1°. Să se arate că ecuaţia admite o soluţie particulară de forma $y_1 = ax^m$ şi să se determine această soluţie calculând valorile a şi m.

2°. Să se integreze ecuaţia găsind soluţia ei generală.

3°. Să se arate că curbele integrale au două asimptote paralele cu Oy, sau nu au de loc asemenea asimptote, după valorile constantei, arbitrare; se va arăta că una din curbele integrale are o singură asimptotă paralelă cu Oy şi este o conică.

4°. Să se reprezinte grafic această ultimă curbă integrală.

Proba II-a. Să se calculeze valoarea integralei.

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\,dx.$$

Geometrie Analitică. *Proba I-a.* Să se scrie ecuaţia parabolelor cu focarul în originea O şi trecând prin punctul A de pe axa Ox. Să se afle locul polului lui Ox în raport cu aceste parabole.

Proba II-a. Să se afle şi să se construiască înfăşurătoarea dreptelor $u^3(x-a)+3ux-2y=0$, u fiind variabil.

Algebră superioară. *Proba I-a.* 1°. Să se studieze seria cu termenul general $u_n = \frac{n!\,n^n}{(2n)!}$.

2°. Să se calculeze numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^4+x^3+x-1=0$.

3°. Să se calculeze funcţia simetrică $\Sigma x_1^2 x_2$ de rădăcinile acestei eucaţii.

4°. Să se reprezinte grafic funcţia $y = x^4+x^3+x-1$.

5°. Să se dea intervalul de existenţă al funcţiunii $y = e^x - Lx$ şi să se arate că derivata este crescătoare în acest interval. Să se deducă de aici că y este pozitiv în intervalul găsit. Să se dea graficul şi să se arate că minimul funcţiei este cuprins între $\frac{1}{2}$ şi $\frac{2}{3}$.

Proba II-a. Să se afle rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$x^4+x^3+x-1=0$$

cu o aproximaţie de două zecimale.

ANUL II.

Calcul Diferenţial şi Integral (Partea I-a). *Proba I-a.* Să se calculeze cu ajutorul formulei lui GREEN

$$\iint_B \frac{dxdy}{x}$$

unde B e interiorul buclei curbei $x^3 + y^3 = xy$.

Proba II-a. Se consideră funcţiunile x, y, z definite de relaţiile

$$x = u + 2v + 2w\ ,\quad y = -1 - uv - 2vw - wu - v^2 - w^2\ ,\quad z = u + v + w.$$

1°. Să se arate că între x, y, z există o relaţie independentă de u, v, w.

2°. Să se scrie efectiv această relaţie, care defineşte pe z ca funcţie de x şi de y.

3°. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinele întâi şi doi ale funcţiunii z în raport cu x şi cu y.

Mecanică (Partea I-a). *Proba I-a.* 1°. Să se demonstreze teorema compunerii viteselor în mişcarea relativă.

2°. Se consideră corpurile solide S_0, S_1, S_2, S_3, corpul S_0 fiind fix iar mişcările lui S_1 faţă de S_0, lui S_2 faţă de S_1, lui S_3 faţă de S_2, fiind cunoscute. Să se deducă vitesa unui punct oarecare al corpului S_3 faţă de S_0. Să se examineze cazul când mişcarea lui S_1 faţă de S_0, lui S_2 faţă de S_1, lui S_3 faţă de S_2 sunt rotaţii concurente.

3°. Să se determine componentele rotaţiei instantanee în mişcarea unui corp solid cu un punct fix, în funcţie de unghiurile lui EULER şi de derivatele lor.

Proba II-a. 1°. Să presupunem axele dreptunghiulare şi un mobil M ale cărui coordonate x, y, z sunt următoarele funcţiuni de timp

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\cos t\ ,\quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\sin t\ ,\quad z = t.$$

Să se calculeze: vitesa, acceleraţia, acceleraţia tangenţială şi normală, precum şi raza de curbură a traiectoriei la momentul t.

2°. Un punct material M este supus la acţiunea unei forţe F care întâlneşte axa oz. Forţa are proiecţia pe oz egală cu $-\frac{b^2}{z^3}$, iar pe planul xoy o proiecţie egală cu $-\frac{a^2}{r^3}$, unde r este distanţa lui M la axa oz. Să se calculeze travaliul forţei F şi să se deducă că forţa derivă dintr'o funcţiune de forţă. Să se determine suprafeţele de nivel şi liniile de forţă.

3°. Să se determine centrul de greutate al arcului AM de cardioidă, a cărei ecuaţie în coordonate polare este $r = a(1+\cos\theta)$. A şi M fiind punctele de pe cardioidă, care corespund la $\theta = 0$ şi $\theta = \alpha$ $(\alpha \leq \pi)$.

ANUL III.

Calcul Diferenţial şi Integral. (Partea II-a). *Proba I-a* Să se determine suprafaţa integrală a ecuaţiei

$$z - px + q^2 = 0$$

care trece prin dreapta $x = y = z$.

Proba II-a. Se consideră suprafaţa

$$zx^2 = (y + z)^2.$$

1°. Să se reprezinte parametric x, y, z prin funcţii raţionale de u şi r.

2°. Să se afle liniile asimptotice ale suprafeţei şi să se verifice că ele sunt intersecţii de suprafeţe algebrice.

Astronomie. *Proba I-a.* O localitate are coordonatele: $L = 1^h\ 35^m\ 25^s$; $\lambda = 45^0\ 12'\ 12''$. Luna trece la meridian la 15 Martie 1942 la ora siderală $22^h\ 49^m\ 15^s$. Să se calculeze intervalul de timp în care poate fi ea observată dacă în momentul trecerii sale la meridian: $AR = 12^h\ 13^m$ şi $P = 3^0\ 15'\ 10''$.

Proba II-a. Cunoscând elementele orbitei terestre, cum se conduc calculele pentru stabilirea efemeridei Soarelui?

Cum se calculează aceste elemente ale orbitei terestre?

Mecanică (Partea II-a). *Proba I-a.* Mişcarea unui corp ce are un punct fix şi care este solicitat de o forţă a cărei direcţie trece prin punctul fix.

Presupunem că avem un corp solid ce are un punct fix şi asupra căruia lucrează mai multe forţe şi anume forţe direct aplicate. Aceste forţe admit o rezultantă unică ce trece prin punctul fix. Vitesa unui punct M într'o astfel de mişcare este $\vec{V}_m = \vec{\omega} \times \vec{OM}$, unde $\vec{\omega}$ este rotaţia instantanee, iar $\vec{OM}$ este distanţa dela punctul fix O la punctul M. Vectorul $\vec{\omega}$ este egal cu suma rotaţiilor $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\Psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, adică $\vec{\omega} = \varphi' + \Psi' + \theta'$ unde φ, Ψ, θ sunt unghiurile lui EULER.

Proba II-a. 1°. Să se calculeze momentele de inerţie ale unei plăci omogene, limitate de parabola $y^2 = 2px$ şi dreapta $y = a$, în raport cu axele Ox şi Oy.

2°. Presupunând că placa precedentă este grea, că se mişcă pe un plan vertical şi că are punctul O fix, să se determine mişcarea ei şi lungimea pendulului sincron.

ANUL IV.

Teoria Funcţiunilor. *Proba I-a.* I. 1°. Să se scrie condiţiile lui CAUCHY-RIEMANN folosind modulul şi argumentul variabilei z şi să se deducă ecuaţia lui LAPLACE în coordonate polare.

2°. Să se determine funcţia $f(z) = A(r_1\theta) + iB(r_1\theta)$, unde $z = re^{i\theta}$, ştiind că $A(r_1\theta) = \varphi(r)\,\Psi(\theta)$, unde $\varphi(r)$ este o funcţie numai de r şi $\Psi(\theta)$

numai de θ. Se vor determina constantele prin condițiile $-\Psi''(0) = \Psi(0)$, $\Psi(0) = 1$, $\Psi'(0) = 0$, $\varphi(0) = 1 + c^2$, $\varphi'(0) = 1 - c^2$, iar $B(r_1\theta)$ să fie nul pentru $\theta = 0$.

3°. Să se calculeze integrala

$$\int_c f(z\ dz$$

unde $f(z)$ este funcția determinată la 1°, iar C un cerc cu centrul în origine.

4°. Punctele singulare ale funcției $\frac{1}{f(z)}$ și desvoltarea acestei funcții în vecinătatea punctului *ic*.

II. Se dă funcția $f(z)$ olomorfă în domeniul interior arcului (c) și exterior cercului (c), cercul din urmă fiind în interiorul cercului întâi. Să se dea desvoltarea în serie a funcției $f(z)$ în acest domeniu

Aplicație la funcția $\frac{1}{(z+2)(2z-1)}$, cercul (c) fiind cu centrul în origine și raza 1, iar cercul (c) având centrul în $\frac{1}{2}$ și raza oricât de mică vrem.

Proba II-a. Să se calculeze integrala.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

prin metoda rezidurilor.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Politehnicei din București. An. XIII. 1942. Nr. 3—4. R. ROȘCA: Sur les réseaux (M). D. CIURILEANU: Le rapporteur autoréducteur. A. STOENESCU: Sur les systèmes de forces sous l'action desquelles un mobile parcourt une trajectoire donnée. I. CÂRSTOIU: Sur le mouvement général d'un fluide parfait. V. DUMITRESCU: Auftrieb und Wiederstand für mittlere und kleinere REYNOLD'sche Zahlen. G. SIKORSKI: Applications des fonctions elliptiques à l'étude de quelques cas de la flexion des tiges. E. BRATU: Die Aktivitätskoeffizienten der Gasen. N. CERNESCU: Erklärung einer beim Kationenumtausch auftretenden Gesetzmäsigkeit. ER. TOPORESCU: Sur le mécanisme de la précipitation des substances colloïdales. C. BELCOT: Sur le dosage du phénol. M. D. ILIE: L'importance de l'accident tectonique de *Coada Malului-Schitului*. P. CREȚOIU: Verzeichnis der bisher aus Eurasien bekannt gewordenen Carpinus-Arten. P. CREȚOIU: Die Fundorte der bisher aus Rumänien bekanntgewordenen Arten der Gattung *Usnea*. O. VLĂDUȚIU: L'arbre

bronchique et les zones pulmonaires chez les animaux domestiques. A. AVRAMESCU: Erwärmungsberechnung Elektrischer Kontakte Differentialgleichung' Anfangs- und Randbedingungen. D. PAVEL: Wasserwirtschaftliche Betrachtungen für die Donauwerke beim Eisernen Tor. C. PARTENI-ANTONI şi N. POPINCEANU: Le fonctionnement d'une machine à courant continu quand la vitesse varie. T. TĂNĂSESCU: La réaction mixte dans les amplificateurs. I. LINTEŞ: L'accélération du projectile dans l'âme.

Chestiuni de examen. 1943. Nr. 6. Propuse la secţia de matematici a Facultăţii de Ştiinţe din Cluj.

Deutsche Mathematik. Caietul 6. Aug. 1942. K. STRUBECKER: Zum CAUCHY'schen Problem der Differentialgleichung $rt - s^2 = k$. F. JUNG: Die Feldableitung. FR. HOHENBERG: Die Kegelschnitte mit gemeinsamen Hauptachsen. ER. GEORGE: Eigentlich offene Kurven in regulären Kurvenscharen. A. KNESCHKE: Wechselbeziehungen zwischen Differentialgleichungen und Integralgleichungen. G. TAUTZ: Approximation von absolut additiven Mengenfunktionen durch absolut stetige. W. VON KOPPENFELS: Bemerkungen zu der Arbeit von E. GRAESER. M. DRAEGER: Mathematic und Rasse. J. E. HOFMANN: Über zwei geodätische Briefe von C. F. GRAUSZ aus dem Jahr 1800.

Idem. Caietul 1. Noemvrie 1942. MARIA-PIA GEPPERT: Das Bayessche *Rückschluszproblem*. G. SCHULZ: Über die Häufigkeit der Iterationen in einer Beobachtungsfolge. W. KRAUS: Beweis einiger neuen Ungleichungen und Sätze in der äuszeren Ballistik. H. R. WEBER: Über die biharmonische Differentialgleichung als Strömungsgleichung Zäher, inkompressibler Flüssigkeiten in der Ebene. F. LETTENMEYER: Über die von einem Punkt ausgehendem Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. M. SCHNEIDT: Über eine spezielle Mannigfaltigkeit von W-Strahlensystem. FR. HOHENBERG: Das Apollonische Problem im Rn. F. NEISZ: Eine Bemerkung zur Hauptachsentransformation. ST. LIPKA: Die Descartesschen Zeichenregel und interszendenten Polynome. F. W. NEUHAUS: Affektlosigkeit der Gleichungen für fast alle Werte des linearen Koeffizienten. J. E. HOFMANN: Über Herrn Anderhubs Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Theaetet.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXIII. Nr. 6 Aug. 1943. E. VIŞA: Insumări prin părţi. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXIX. Nr. 2. Aprilie — Iunie 1943. VERA MYLLER LEBEDEFF: DAVID HILBER. P. G. SPACU: Metalcarbonylii şi importanţa lor în chimie şi industrie. STAN IONESCU: Rolul pigmenţilor vegetali roşii, violeţi şi albaştri în lumina noilor cercetări. EUG. V. NICULESCU: Supremaţia omului şi imperfecţiunile sale organice. I. GUGIUMAN: Lunca Prutului în regiunea Huşilor. MARGARETA GHEORGHIU: LAVOISIER (1743 — 1794).

România Aeriană. An. XVII. Nr. 7. Iulie 1943. Număr închinat zburătorilor Români.

I. LINTEŞ: Notes sur quelques questions techniques de bouches à feu. (Ext. din Comptes rendus des séances de l'Académie de Sciences de Roumanie. Tome VI. No. 1 — 4, 1942).

AL. PANTAZI: Elemente de Geometrie diferenţială proiectivă a curbelor şi suprafeţelor.

I. STAMATE: O problemă de aplicaţii geometrice ale analizei matematice. (Ext. din „Revista Matematică din Timişoara", An. XXIII. Nr. 5).

CERERI

Răspuns la Cererea Nr. 322, pag. 553. Vol. XLVIII. Pentru alcătuirea unui Calendar al *„Gazetei Matematice"*, s'a oferit D-l P. F. IONESCU, bacalaureat Craiova. Munca la care s'a angajat D-l P. F. IONESCU este grea şi migăloasă. Îi primim oferta pe care a făcut-o cu entusiasm spontan şi dorim să o ducă în scurt timp la bun sfârşit.

Redacţia.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

RODOLPHE GUIMARAES. Les mathématiques en Portugal. Coimbre 1909.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

Un ancien élève de l'École Polytechnique. Note sur la théorie des projections. Paris.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

A. AMIOT. Solutions raisonnées de problèmes. Paris 1861.
Donată de D-na MARIA D. LAMBRU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4986. *Să se arate că cercurile osculatoare la o conică cu centru, în patru puncte conciclice, retaie conica în patru puncte conciclice.*

AD. GHEORGHIU.

Soluţia I. Pentru *elipsă* considerăm reprezentarea parametrică

$$x = a\cos\theta \quad , \quad y = b\sin\theta.$$

Un punct de pe conică e bine determinat dându-se argumentul θ — *anomalia excentrică*. Fie patru puncte A, B, C, D pe conică, de argumente respectiv α, β, γ, δ.

Scriem că sunt conciclice scriind că coardele AB şi CD (de exemplu) sunt egal înclinate pe axele conicei:

$$\frac{b(\sin\alpha - \sin\beta)}{a(\cos\alpha - \cos\beta)} + \frac{b(\sin\gamma - \sin\delta)}{a(\cos\gamma - \cos\delta)} = 0.$$

De unde se deduce, exceptând cazul că A se confundă cu B şi C se confundă cu D:

$$\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}} = 0.$$

Presupunând că $\alpha + \beta \neq 0$ şi $\gamma + \delta \neq 0$, rămâne ca esenţială condiţia:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

pentru ca A, B, C, D să fie conciclice pe elipsă.

Dacă $\alpha + \beta = 0$, adică punctele A, B sunt simetrice faţă de axa mare a elipsei, atunci cercul ABCD având centrul pe această axă, punctele C, D sunt şi ele simetrice faţă de aceeaşi axă şi rezultă $\gamma + \delta = 0$. Adică şi cazurile exceptate mai sus se regăsesc în condiţia generală.

Cu acestea, în cazul cercului osculator, în A, de exemplu, unde prin definiţie se confundă trei puncte: A, B, C, putem scrie:

$$3\alpha + \delta = 0.$$

De unde rezultă că argumentul punctului în care cercul osculator în punctul de argument α, retaie elipsa este -3α.

Deci cercurile osculatoare în A, B, C, D conciclice retaie elipsa în punctele A', B', C', D' de argumente -3α, -3β, -3γ, -3δ şi astfel că:

$$-3\alpha - 3\beta - 3\gamma - 3\delta = -3(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$$

adică A', B', C', D' sunt *conciclice*.

Pentru *hiperbolă* considerăm reprezentarea parametrică:

$$x = a\,ch\theta \quad , \quad y = b\,sh\theta$$

şi prin calcule analoage se obţine acelaşi rezultat.

Pentru *parabolă*, considerăm reprezentarea parametrică:

$$x = \frac{v^2}{2p}, \quad y = v$$

şi fie $v = a, b, c, d$ pentru cele patru puncte A, B, C, D. Scriind şi aci condiţia că coardele AB şi CD sunt egal înclinate pe axa parabolei, avem:

$$\frac{a-b}{\frac{a^2}{2p} - \frac{b^2}{2p}} + \frac{c-d}{\frac{c^2}{2p} - \frac{d^2}{2p}} = 0$$

de unde:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{a+b+c+d}{(a+b)(c+d)} = 0$$

adică exceptând cazul $(a+b)(c+d) = 0$, ce se tratează uşor direct, condiţia generală de conciclicitate este

$$a + b + c + d = 0.$$

Restul ca în cazul elipsei şi *proprietatea este adevărată şi pentru parabolă.*

Soluţia II. Se consideră pentru *elipsă* de exemplu, reprezentarea:

$$x = a\frac{t^2+1}{2t}, \quad y = b\frac{t^2-1}{2it}$$

în care $i = \sqrt{-1}$, $t = e^{i\theta}$, θ fiind anomalia excentrică. Reprezentare dedusă din cea dela soluţia I prin scrierea lui $\sin\theta$ şi $\cos\theta$ în funcţiune de exponenţiala $e^{i\theta}$.

Inlocuind coordonatele punctului curent de pe elipsă în ecuaţia unui cerc:

$$x^2 + y^2 + 2Mx + 2Ny + P = 0$$

obţinem ecuaţia de gradul 4 în t, dând parametrii a patru puncte conciclice pe elipsă:

$$a^2(t^2+1)^2 - b^2(t^2-1)^2 + 4Mat(t^2+1) - 4Nbit(t^2-1) + 4Pt^2 = 0$$

sau, ordonând:

$$(a^2 - b^2)t^4 + 4(Ma - Nbi)t^3 + 2(a^2 + 2P + b^2)t^2 + 4(Ma + Nbi)t + a^2 - b^2 = 0$$

observând relaţiile între rădăcini şi coeficienţi avem:

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$$

relaţie ce exprimă conciclicitatea punctelor A, B, C, D pe elipsă. Pentru cercul osculator în A, avem atunci:

$$t_a^3 \cdot t_a' = 1.$$

Urmează deci că parametrii punctelor A', B', C', D' sunt t_a', t_b', t_c', t_d' între care avem relaţia:

$$t_a' t_b' t_c' t_d' = \frac{1}{t_a^3} \cdot \frac{1}{t_b^3} \cdot \frac{1}{t_c^3} \cdot \frac{1}{t_d^3} = 1$$

deoarece $t_a t_b t_c t_d = 1$, şi deci sunt conciclice.

Pentru *hiperbolă* calculele fiind analoage să considerăm cazul *parabolei*. Având reprezentarea

$$x = \frac{v^2}{2p} \quad , \quad y = v,$$

introducem în ecuaţia aceluiaşi cerc, obţinem ecuaţia de gradul 4 în v dând deci parametrii celor patru puncte conciclice, pe parabolă:

$$\frac{v^4}{4p^2} + \left(1 + \frac{M}{p}\right) v^2 + 2Nv + P = 0$$

ţinând seama de relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, condiţia de conciclicitate pe parabolă se exprimă:

$$v_a + v_b + v_c + v_d = 0.$$

Pentru cercul osculator în A de exemplu rezultă relaţia:

$$3v_a + v_a' = 0.$$

Urmează deci că parametrii punctelor A', B', C', D' sunt v_a', v_b', v_c', v_d' astfel că între ei avem relaţia:

$$v_a' + v_b' + v_c' + v_d' = -3v_a - 3v_b - 3v_c - 3v_d = 0$$

şi deci A', B', C', D' sunt conciclice.

Observaţiuni. 1°. Problema a fost propusă în lunie 1938, primindu-se o soluţie parţială analoagă soluţiei I în Septemvrie 1938 dela D-l O. SACTER.

2°. Ulterior şi după ce problema a fost tratată de D-l Prof. N. DONCIU în Revista „*Ştiinţă şi Progres*", Aprilie—lunie 1940, s'au mai primit soluţii dela D-nii: MIREL D. STOENESCU (Şc. of. aviaţie) şi PAUL P. DRĂGHICESCU (Lic. Milit. Iaşi).

3°. Proprietatea e adevărată pentru orice conică.

4°. Problema a fost propusă plecând dela aceleaşi reprezentări date pe altă cale în „*Compléments de Géométrie Moderne*" de CHARLES MICHEL în capitolul „*Conicele considerate ca curbe unicursale*".

PROBLEMA 5143. *Să se rezolve ecuaţia*

$$8x^4 - 8x^3 + x + a = 0$$

şi să se verifice soluţiile pentru $a = 0$.

I. V. MĂTIEŞ.

Soluţia I, dată de D-nii: C. PANTELIMON, P. P. DRĂGHICESCU, MIRCEA D. POPA, GR. MARTEŞ, N. D. GANEA, SANDU R. TURCU, S. LEIBOVICI, AL. I. ROHR şi AL. G. JILETCOVICI.

Ecuaţia dată se poate pune sub forma

$$2(2x^2 - x)^2 - (2x^2 - x) + a = 0.$$

Facem substituţia

$$2x^2 - x = y$$

şi obţinem ecuaţia

$$2y^2 - y + a = 0 \tag{1}$$

ale cărei rădăcini sunt

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8a}}{4}.$$

Ducând aceste valori în (1) şi rezolvând ecuaţia de gradul al doilea în x, găsim următoarele 4 rădăcini ale ecuaţiei propuse

$$x_{1,2,3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3 \pm 2\sqrt{1 - 8a}}}{4}.$$

Pentru $a = 0$, aceste rădăcini sunt, în ordinea mărimii

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \; ; \quad x_2 = 0 \; , \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \; , \quad x_4 \quad \frac{1}{2},$$

iar ecuaţia dată devine

$$x(8x^3 - 8x^2 + 1) = 0$$

$$\therefore \quad x\left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 2x - 1) = 0$$

care, se vede uşor că este verificată de cele 4 rădăcini.

Soluţia II, dată de D-nii: T. A. ŞERBAN (Student, Politehnica Bucureşti); H. M. BODNĂRESCU, MIREL D. STOENESCU, N. E. MOSCOVICI (Bacalaureaţi, Bucureşti); M. I. TREFILOV (Liceul „N. Bălcescu", Brăila); CICERONE ROMANESCU, GH. BOGDAN (Liceul militar, Iaşi) şi OCT. E. GHEORGHIU.

Facem substituția

$$x = y + h$$

cu condiția ca ecuația în y ce se obține să nu aibă termen de gradul al treilea. Se găsește ușor $h = \frac{1}{4}$, iar ecuația în y este

$$8y^4 - 3y^2 + \frac{5}{32} + a = 0$$

o ecuație bipatrată ușor de rezolvat. Rădăcinile acestei ecuații fiind y_i, rădăcinile ecuației propuse vor fi

$$x_i = \frac{1}{4} + y_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Se găsesc soluțiile dela prima soluție.

Soluția III, dată de D-nii: SLT. M. GRUMĂZESCU, AL. JIPA (Șc. Ofițeri de Geniu) și H. L. REISCHER (Iași).

Aplicăm metoda lui DESCARTES [1]) punând

$$8x^4 - 8x^3 + x + a = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha' x + \beta').$$

Identificând coeficienții se găsește

$$\alpha = \alpha' = -\frac{1}{2}, \quad \beta, \beta' = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8a}}{8}$$

așa că ecuația din enunț se descompune în următoarele 2 ecuații de gradul II:

$$8x^2 - 4x - 1 \pm \sqrt{1 - 8a} = 0.$$

Notă. 1°. Problema este o aplicație la articolul publicat de D-l I. V. MĂTIEȘ în *Gazeta Matematică*, Vol. XLV, pag. 565 sub titlul *Contribuțiuni la rezolvarea ecuațiilor de gradul al patrulea.* S'a arătat în acel articol că dacă între coeficienții ecuației

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

avem relația

$$B^3 + 8A^2D - 4ABC = 0$$

ecuația este pseudo-bipatrată și se transformă în ecuația

$$y^2 + my + n = 0$$

prin substituția

$$y = a'x^2 + b'x.$$

---

1) NIEWENGLOWSKI: Cours d'Algèbre, Tome II, p. 450.

Acestea sunt tocmai transformările dela soluţia I, ai cărei rezolvitori au urmat o cale directă.

2°. Colegul de societate D-l C. MIHU, în August 1939, pe când era la Chişinău şi înainte de a fi membru al societăţii *Gazeta Matematică* a trimis o soluţie sprijinindu-se pe proprietăţile ecuaţiilor *pseudo-bipatrate,* publicate de D-l I. V. MĂTIEŞ în *Ştiinţă şi Progres,* Vol. V.

3°. Problema nu a fost discutată decât de D-l GH. BOGDAN (Liceul militar, Iaşi) găsind că condiţiile de realitate ale tuturor rădăcinilor sunt

$$-\frac{5}{32} < a \leqslant \frac{1}{8}.$$

4°. Nu citâm numele unui harnic rezolvitor, anunţat pe copertă, care aplicând metoda lui DESCARTES a greşit calculele şi a obţinut rezultate false, care pentru $x = 0$ l-au dus la rădăcinile

$$x_{1,2} = 0, \ \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad x_{3,4} = 1, \ -\frac{1}{2}$$

ceea ce se vede imediat că este greşit.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5321. *Se dă un triunghiu* ABC *şi o transversală* Δ, *care întâlneşte laturile* BC, CA, AB *respectiv în* M, N, P. *Paralelele duse prin* M, N, P *respectiv la* AB, BC, CA *întâlnesc din nou laturile triunghiului în trei puncte aşezate pe o dreaptă* Δ′. *Dreptele* Δ *şi* Δ′ *se taie în punctul* O.

Să se arate că paralelele duse prin B, C; C, A; A, B *la* Δ′ *şi* Δ *se întâlnesc respectiv pe* AO, BO, CO.

GH. D. SIMIONESCU

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA STĂNCULESCU, C. D. EFTIMIE (elevi ingineri Şc. Polit. Buc.), CONSTANTIN PANTELIMON (Şc. Of. A. C. A. Bucureşti), MIHAI I. TREFILOV (Brăila), GH. D. SBÂRNEA (clasa VIII-a Tecuci), PAUL P. DRĂGHICESCU (clasa VII-a, Lic. Mil. Iaşi), ŞERBAN STOIANOVICI (Col. naţ. „N. Filipescu").

Se ştie că paralelele duse prin M, N, P la AB, BC, CA (sau la AC, BA, CB) întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte M′, N′, P′ colineare. Fie Δ′ această nouă dreaptă.

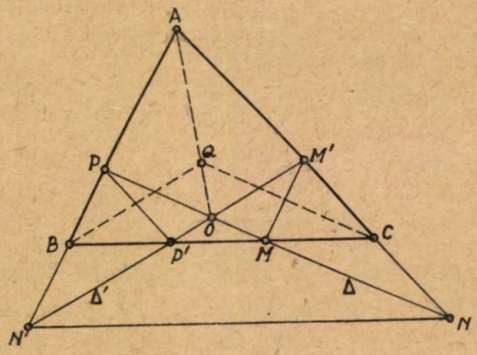
Paralela dusă din B la Δ′ taie pe AO în Q_1, iar paralela dusă din C la Δ taie pe AO în Q_2. Avem evident:

$$\frac{\overline{Q_1 A}}{\overline{Q_1 O}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BN'}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{Q_2 A}}{\overline{Q_2 O}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}}$$

Insă NN′ fiind paralelă la BC, $\frac{\overline{BA}}{\overline{BN'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}}$, încât rezultă

$$\frac{\overline{Q_1A}}{\overline{Q_1O}} = \frac{\overline{Q_2A}}{\overline{Q_2O}}.$$

Punctele Q_1 şi Q_2 împărţind segmentul AO în acelaşi raport, coincid. La fel se arată că celelalte perechi de drepte se întâlnesc pe BO şi CO.



Soluţie dată de D-l MIRCEA D. POPA (bacalaureat, Lic. Mil. Iaşi). Fie Q intersecţia paralelelor duse din B şi C la Δ′ şi Δ. Triunghiurile NN′O şi CBQ sunt omotetice, deoarece au laturile paralele. Atunci dreptele N′B, OQ, NC care unesc vârfurile lor, sunt concurente, adică Q se găseşte pe AO.

D-L PAUL P. DRĂGHICESCU a trimes şi o soluţie analitică. D-sa observă că dacă Δ variază trecând printr'un punct fix, Δ′ înfăşoară o conică înscrisă. In particular dacă punctul fix este centrul de greutate al triunghiului ABC, conica înscrisă este a doua elipsă a lui STEINER.

Notă. Toţi rezolvitorii problemei au *demonstrat* că punctele M′, N′, P′ sunt colineare, folosind teorema lui MENELAUS.

PROBLEMA 5659. *Să se arate că în orice triunghiu avem relaţia:*

$$\sum \frac{\cos(A-B)\cos(B-C)}{\sin C \sin A} = 3 + 8\cos A \cos B \cos C.$$

ION. S. ANTONIU.

1°. *Soluție* dată de Domnii ADRIAN GH. I. POPESCU (Politechnica din Timișoara) și ION GR. ENĂCHESCU (cl. 7-a Liceul Militar Timișoara).

Folosind relațiile cunoscute

$$\Sigma \cos^2 A = 1 - 2\cos A \cos B \cos C \quad , \quad \Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\Sigma \cot A \cot B = 1,$$

prima parte o relației din enunț se poate scrie succesiv :

$$\Sigma \frac{\cos(A-B)\cos(B-C)}{\sin C \sin A} = \Sigma \frac{\cos(A-C)+\cos(A+C-2B)}{2\sin C \sin A} =$$

$$= \Sigma \frac{\cos(A-C)+\cos 3(A-C)}{2\sin C \sin A} =$$

$$= \Sigma \left\{ \frac{1}{2} \cot A \cot C + \frac{1}{2} + \frac{\cos(A+C)[4\cos^2(A+C)-3]}{2\sin C \sin A} \right\} =$$

$$= \Sigma \left(\frac{1}{2} \cot A \cot C + \frac{1}{2} + 2\cot A \cot C \cos^2 B - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \cot A \cot C + \frac{3}{2} - 2\cos^2 B \right) =$$

$$= 3 + 4\cos A \cos B \cos C + \cot A \cot B \cot C \, \Sigma \sin 2A =$$

$$= 3 + 8\cos A \cos B \cos C,$$

adică tocmai partea a doua a relației din enunț.

2°. *Soluție* dată de Domnii MINEA V. ALDEA (Student ing. Buzău), AUREL GH. ANDREI (Liceul Militar Iași), C. BAKONYI (Timișoara), MARCEL D. COTARIU (Brăila), OCTAV C. GHEORGHIU (cl. VIII Liceul Internat Iași), Locot. MIRCEA GRUMĂZESCU, S-Lt. Av. MIREL D. STOENESCU (București) și DUMITRU GH. VASILIU (cl. 7 Liceul Militar Iași).

Transformând produsele dela numărătorii primului membru în sume obținem succesiv :

$$\Sigma \frac{\cos(A-B)\cos(B-C)}{\sin C \sin A} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\cos(A-C) - \cos 3B}{\sin A \sin C} =$$

$$= \frac{\Sigma[\cos(A-C) - \cos 3B]\sin B}{2\sin A \sin B \sin C} =$$

$$= \frac{\Sigma(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C - \sin 4B)}{4\sin A \sin B \sin C} = \frac{3\Sigma \sin 2A - \Sigma \sin 4A}{4\sin B \sin B \sin C} =$$

$$= 3 + 8\cos A \cos B \cos C$$

căci

$$2\cos(A - C)\sin B = \sin 2A + \sin 2C$$

$$2\cos 3B \sin B = \sin 4B - \sin 2B$$

şi

$$\Sigma \sin 4A = -4\sin 2A \sin 2B \sin 2C = -$$

$$- 32\sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C.$$

Observaţii. 1°. Alte soluţii foarte bune s'au primit dela Domnii: ION I. BUZINCU (Student Politechnică), S-Lt. CONST. PANTELIMON (Bucureşti) şi EUGEN N. WEGENER (Bucureşti).

2°. Soluţii bune însă foarte lungi au dat Domnii: DUMITRIU-TIGRAN (Liceul Naţional, Iaşi) şi VLAD GH. JURIST (clasa VII-a Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal).

3°. Domnul MARIN GH. POPESCU (clasa VIII-a reală Liceul I. C. Brătianu din Piteşti) *rezolvă* problema dând soluţia indicată pentru exerciţiul 31, Cap. X, pag. 20 din *Culegere de probleme de Trigonometrie* de V. CRISTESCU revăzută de GH. TH. GHEORGHIU. Problema de faţă îşi are obârşia tocmai în acest exerciţiu şi am găsit-o căutând să-l rezolv direct şi nu prin artificiul indicat în culegerea de probleme.

I. S. A.

PROBLEMA 5714. *De un corp de greutate* G, *aşezat pe un plan, înclinat cu unghiul* α *pe orizontală, este prins un fir, care urcă paralel cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat, trece apoi peste un scripete de rază* R_1, *mobil în jurul axei fixe* O_1, *coboară după aceasta vertical şi prinde axa* O_2 *a unui al doilea scripete de rază* R_2. *Pe acest al doilea scripete este aşezat un alt fir de capetele căruia atârnă greutăţile* P *şi* Q.

1°. *Să se studieze mişcarea greutăţilor* G, P, Q *şi a scripetelor* O_1 *şi* O_2.

2°. *Să se determine tensiunile în fire în timpul mişcării.*

3°. *Să se determine condiţiile pentru care cu toată mişcarea sistemului, una din greutăţile* P *sau* Q *să rămână fixă.*

Greutatea firelor, a scriptelor, frecărilor şi rezistenţa aerului se vor neglija.

Aplicaţie: $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

ALEXANDRU STOENESCU.

Putem presupune fără a particulariza enunțul problemei $P \geqslant Q$.

Notând cu:

W *accelerația corpului de greutate* G *în lungul planului înclinat;*

ε_1 *accelerația unghiulară a scripetelui* O_1;

ε_2 *accelerația unghiulară a scripetelui* O_2;

N *reacțiunea planului înclinat asupra corpului de greutate* G;

R *reacțiunea în axa scripetelui* O_1;

T; T_1; T_2; T_3 *tensiunile în fire* prin introducerea *forțelor de inerție* și aplicarea principiului *echilibrului dinamic* al lui D'ALEMBERT obținem:

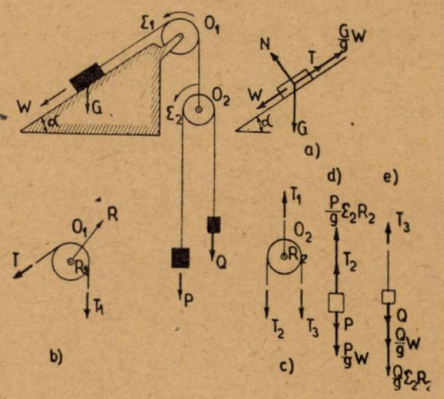


Fig. 1.

a) Pentru corpul de greutate G situat pe planul înclinat, prin proiecția tuturor forțelor pe linia de cea mai mare pantă

$$T = G \sin\alpha - \frac{G}{g} W. \qquad (1)$$

b) Pentru scripetele O_1 prin momente în centrul său:

$$T = T_1 \qquad (2)$$

Observăm că la studiul echilibrului dinamic al scripetelui O_1 *nu intervin forțele de inerție, greutatea și prin urmare și masa scriptelui fiind neglijabilă.*

c) Pentru scripetele O_2 prin proiecția pe verticală și momente în centrul său

$$T_1 = T_2 + T_3 \quad ; \quad T_2 = T_3. \qquad (3)$$

d) Pentru corpul de greutate P vom avea în vedere că *mişcarea absolută* a acestui corp se compune dintr'o *mişcare relativă* datorită *rotirii* scripetelui O_2 în jurul centrului său şi din *mişcarea de târîre* datorită *ridicării* (sau coborîrii) pe verticală a axei scripetelui.

Rezultă *acceleraţia relativă:*

$$W_r = \varepsilon_2 R_2$$

acceleraţia de târîre:

$$W_t = W,$$

iar *acceleraţia lui* CORIOLIS este nulă *mişcarea de târîre fiind o translaţie.* La studiul *echilibrului dinamic* al corpului de greutate P vor interveni *forţele de inerţie*

$$\frac{P}{g} W_r = \frac{P}{g} \varepsilon_2 R_2 \quad \text{şi} \quad \frac{P}{g} W$$

îndreptate conform figurii 2.

Scriind condiţia de echilibru prin proiecţie pe verticală obţinem:

$$T_2 = P + \frac{P}{g} W - \frac{P}{g} \varepsilon_2 R_2 . \tag{4}$$

e) Pentru corpul de greutate Q se obţine prin consideraţii analoage cazului precedent:

$$T_3 = Q + \frac{Q}{g} W + \frac{Q}{g} \varepsilon_2 R_2 . \tag{5}$$

Rezolvind sistemul de ecuaţii (1), (2), (3), (4) şi (5) căpătăm:

$$\begin{aligned} W &= g \frac{G(P+Q)\sin\alpha - 4PQ}{G(P+Q)+4PQ} = W_t \\ \varepsilon_2 &= g \frac{G(P-Q)(1+\sin\alpha)}{R_2[G(P+Q)+4PQ]} \\ T = T_1 &= \frac{4GPQ(1+\sin\alpha)}{G(P+Q)+4PQ} \\ T_2 = T_3 &= \frac{2GPQ(1+\sin\alpha)}{G(P+Q)+4PQ} \end{aligned} \tag{6}$$

Rezultă:

$$\varepsilon_1 = \frac{W}{R_1} = g\frac{G(P+Q)\sin\alpha - 4PQ}{R_1[G(P+Q)+4PQ]}$$
$$W_r = \varepsilon_2 R_2 = g\frac{G(P-Q)(1+\sin\alpha)}{G(P+Q)+4PQ} \qquad (7)$$

Notând cu W_P și W_Q *accelerațiile absolute* ale corpurilor respectiv de greutate P și Q avem:

$$W_p = W_t - W_r = g\frac{G(2Q\sin\alpha - P + Q) - 4PQ}{G(P+Q)+4PQ}$$
$$W_Q = W_t + W_r = g\frac{G(2P\sin\alpha - Q + P) - 4PQ}{G(P+Q)+4PQ} \qquad (8)$$

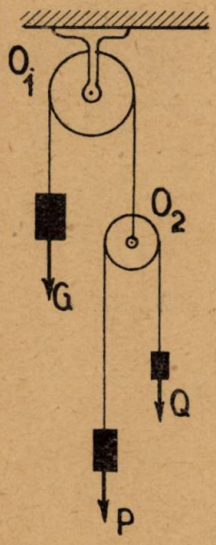


Fig. 2.

Din cele de mai sus, accelerațiile corpurilor de greutate G, P și Q precum și accelerațiile unghiulare ale scripeților O_1 și O_2 fiind *constante*, rezultă că mișcările acestor corpuri sunt *uniform accelerate*.

Pentru $W_t > 0$, adică pentru

$$G < \frac{4PQ}{(P+Q)\sin\alpha},$$

numai corpul de greutate P poate să rămână fix, *dacă nu i se dă sistemului iuțeala inițială, iar* $W_p = 0$ adică:

$$G = \frac{4PQ}{2P\sin\alpha - P + Q} \qquad (9)$$

Pentru $W_t < 0$, adică pentru

$$G < \frac{4PQ}{(P+Q)\sin\alpha},$$

numai corpul de greutate Q poate să rămână fix, *dacă nu i se dă sistemului iuțeala inițială, iar:*

$$G = \frac{4 \cdot PQ}{2P\sin\alpha - Q + P}. \qquad (10)$$

O altă posibilitate ca una din greutăţile P sau Q să rămână pe loc, cu respectarea condiţiei (9) respectiv (10), este ca să se dea greutăţii G o *iuţeală iniţială* v_0, iar scripetelui O_2 o *iuţeală unghiulară iniţială* ω_0 de direcţie convenabilă *legate însă prin relaţia:*

$$v_0 = \omega_0 R_2 .$$

Pentru $P = Q$; $G \sin\alpha = 2P$ suntem în cazul *echilibrului static* şi *toate acceleraţiile sunt nule.*

Pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ suntem în cazul figurii 2.

Rezultatele în acest caz se obţin imediat din formulele precedente prin introducerea $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

La această problemă s'au primit două soluţii incomplecte.

AL. ST.

EXERCIŢII

1. Ştiind că

$$2^{x^2yz} \cdot 3^{xy^2z} \cdot 4^{xyz^2} = k.$$

să se calculeze maximul expresiei

$$E = x^8y^8z^8 + x^4y^4z^4$$

CPT. E. ŞT. IACOB,

R. Expresia dată se pune sub forma

$$E = \left(x^4y^4z^4 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

al cărei maxim are loc odată cu acela al lui

(1) $$E_1 = x^4y^4z^4 = (x^2yz)\,(xy^2z)\,(xyz^2)\cdot$$

Relaţia de condiţii dă

(2) $$x^2yz \log 2 + xy^2z \log 3 + xyz^2 \log 4 = \log k.$$

Conform celor stabilite în *Gazeta Matematică*, Vol. XIX, pag. 401, maximul lui E_1 are loc când

$$\frac{x^2yz \log 2}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{xy^2z \log 3}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{xyz^2 \log 4}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}$$

de unde ţinând seamă de (2)

$$(3)\qquad \frac{x^2yz^{\log 2}}{1}=\frac{xy^2z^{\log 3}}{1}=\frac{xyz^{2\log 4}}{2}=\frac{\log .k}{3}.$$

Din (1) şi (3) avem

$$\max.\,E_1=\frac{1}{\log 2\,.\,\log 3\,.\,\log 4}\left(\frac{\log k}{3}\right)^3$$

$$\therefore\qquad \max.\,E=\left[\frac{1}{\log 2\,.\,\log 3\,.\,\log 4}\left(\frac{\log k}{3}\right)^3=\frac{1}{2}\right]^2-\frac{1}{4}.$$

2. Să se rezolve sistemul

$$a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1$$
$$a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2.$$

E. N. WEGENER.

R. Împărţind ecuaţiile date membru cu membru avem

$$(1)\qquad \frac{a_1x^2+b_1xy+c_1y^2}{a_1x^2+b_2xy+c_2y^2}=\frac{d_1}{d_2}.$$

Punem $\frac{x}{y}=z$; ecuaţia (1) devine

$$\frac{a_1z^2+b_1z+c_1}{a_2z^2+b_2z+c_2}=\frac{d_1}{d_2}$$

o ecuaţie de gradul al doilea uşor de rezolvat. Fie z_i rădăcinile ei. Se face în una din ecuaţiile enunţului substituţiei $x=yz_i$ şi se ajunge tot la rezolvarea unei ecuaţii obişnuite de gradul II.

3. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x^n}{x^{2n}+k_2}+\frac{y^n}{y^{2n}+k_3}=\frac{k_1}{a}\qquad \frac{y^n}{y^{2n}+k_3}+\frac{z^n}{z^{2n}+k_1}=\frac{k_2}{b}$$

$$\frac{z^n}{z^{2n}+k_1}+\frac{x^n}{x^{2n}+k_2}=\frac{k_3}{c}$$

CPT. E. ŞT. IACOB.

R. Din suma ecuaţiilor din enunţ

$$\frac{x^n}{x^{2n}+k_2}+\frac{y^n}{y^{2n}+k_3}+\frac{z^n}{z^{2n}+k_1}=\frac{k_1}{2a}+\frac{k_2}{2b}+\frac{k_3}{2c}$$

scădem pe rând ecuaţiile date şi obţinem

$$\frac{z^n}{z^{2n}+k_1}=\frac{k_2}{2b}+\frac{k_3}{2c}-\frac{k_1}{2a}$$

$$\frac{y^n}{y^{2n}+k_3}=\frac{k_1}{2a}+\frac{k_2}{2b}-\frac{k_3}{2c}$$

$$\frac{x^n}{x^{2n}+k_2}=\frac{k_3}{2c}+\frac{k_1}{2a}-\frac{k_2}{2b}$$

care este un sistem de 3 ecuaţii de gradul II în x^n, y^n, z^n uşor de rezolvat.

4. Se dau: sfera (O) de rază R; planul (P); punctul A, fixe în spaţiu. Conurile cu vârfurile în punctele M, variabile în planul (P) sunt tangente sferei după cercurile (C). Să se afle locul geometric al centrelor de greutate ale conurilor cu vârful în A şi cu baza (C).

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Fie O′ centrul lui (C). Având:

$$\overline{OO'} \cdot \overline{OM} + R^2,$$

rezultă că locul geometric al punctelor O′ este o sferă (O_1), transformata prin inversiune a planului (P), polul de inversiune fiind O, iar modulul R^2. Locul centrelor de greutate C_1, ale conurilor considerate va fi sfera (O_2), omotetica sferei (O_1), polul de omotetie fiind A, iar raportul de omotetie

$$\frac{\overline{AG_1}}{\overline{AO'}} = \frac{3}{4}.$$

5. Să se calculeze integrala

$$I = \int \frac{x'^2 - 1}{x'^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x}.$$

T. STOICESCU.

R. Se va face substituţia $x^6 = e^t$ şi integrala devine

$$I = \int \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt = L\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) + C \qquad \therefore \quad I = L\, acht$$

unde a este o constantă de integrare.

Revenind la variabila iniţială, avem

$$y = L\, a\,(x^6 + x^{-6}).$$

PROBLEME PROPUSE

5837. Pentru pardosirea camerelor se întrebuinţează nişte pavele mici de ciment cu feţele paralele, limitate la două laturi opuse cu cilindre convexe egale şi la alte două laturi opuse cu cilindre concave egale care se pot alipi de celelalte aşa ca să acopere planul complet. Rosturile acestor pavele, numite *pişcoturi* sunt racordate la întâlnire. Să se determine feţele lor laterale. Cilindrele sunt circulare.

I. IONESCU.

5838. Să se determine cinci numere prime consecutive în şirul crescător al numerelor prime, astfel încât suma bipatratelor lor să fie de asemenea un număr prim.

IOAN B. FLORESCU.

5839. Să se reprezinte grafic funcția:

$$y = \frac{x(x-1)^2+3}{2(x+1)}.$$

2°. Prin punctul de intersecție al curbei reprezentative cu parabola $x = y^2$, se duce un cerc cu centrul în origine.

Să se calculeze aria cuprinsă între cerc și parabolă.

CPT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

5840. Să se discute rădăcinile ecuației:

$$f(x) \equiv 3x^5 - 8x^3 + 3x + \alpha = 0,$$

α fiind un parametru variabil.

AL. ȚIGĂNOIU.

5841. Să se arate că, dacă $c = 3ab - 2a^3$, atunci polinomul

$$P(x) \equiv x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d$$

se descompune într'un produs de doi factori de gradul al doilea. Să se discute apoi natura rădăcinilor ecuației

$$P(x) = 0.$$

I. ST. TEODORESCU.

5842. Să se arate, că expresia:

$$E \equiv \sin^{4p}\alpha + \cos^{2q}\alpha - 1$$

se împarte exact cu $e \equiv \cos^2 2\alpha - 1$ și să se calculeze câtul împărțirii.

IONEL I. STAMATE.

5843. Să se arate, că:

$$\lim_{n\to\infty} S^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{S'}\right)^n,$$

unde:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_3^i - S_1^i}{S_2^i - S_1^i} \quad ; \quad S' = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_4^i - S_1^i}{S_3^i - S_1^i},$$

iar:

$$S_p^i = 1^p + 2^p + \ldots + i^p.$$

CERCHEZ MIHU.

5844. Fie O un punct în planul triunghiului ABC. Perpendicularele în O pe OA, OB, OC întâlnesc laturile BC, CA, AB în trei puncte colineare pe o dreaptă Δ. Fie H ortocentrul triunghiului, iar ω ortopolul dreptei Δ față de triunghiul ABC. Să se arate, că:

1°. Există un punct, O', pentru care dreapta Δ, construită în același fel, este aceeași cu a punctului O.

2°. Punctele O, O', ω, H sunt pe aceeași dreaptă.

P. P. DRĂGHICESCU.

5845. Se consideră patru drepte în același plan.

1°. Să se construiască un sistem de trei cercuri (C_1), (C_2), (C_3) astfel ca centrele de asemănare ale acestor cercuri, luate câte două, să coincidă cu cele șase puncte de intersecție — presupuse distincte — ale celor patru drepte considerate.

Se va obține, că centrele cercurilor (C_1), (C_2), (C_3) sunt fixe și că sistemul este complet determinat, dacă se cunoaște raza unuia din aceste cercuri.

2°. Să se arate că cercurile ortogonale cercurilor (C_1), (C_2), (C_3) ale aceluiași sistem, au același ax radical.

ȘERBAN GHEORGHIU.

5846. Vârful M al triunghiului AMB se mișcă pe o dreaptă Δ, în vreme ce vârfurite A și B rămân fixe. Fie P un punct fix în plan și Q intersecția lui MA cu paralela din P la MB. Să se afle locul lui Q.

Să se rezolve aceeași problemă pentru cazul când M se mișcă pe o elipsă cu focarele în A și B.

G-L GH. BUICLIU.

5847. Un punct greu se mișcă fără frecare pe un plan ce se rotește uniform în jurul unui ax fix, de care este invariabil legat. Se cere mișcarea punctului și reacția planului.

M. GHERMĂNESCU.

5848. Dintr'un autobuz, care merge cu o viteză convenabilă, sare o persoană și în același timp se urcă altă persoană.

Admițând că cele două persoane au greutăți egale și că șoferul nu schimbă cu nimic mersul autobuzului, se întreabă: *Se va modifica viteza autobuzului?*

COMANDOR I. LINTEȘ.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (A, P); *Caramalău E.* (5684, 754, 60, 78, 91, 831); *Cotariu D. M.* (5750, 91, 801, 13, 28, 31); *Cubat H. A.* (5760, 65, 88, 91, 830, E); *Donţu G. G.* (5575, 683, 729, 30); *Drăghicescu P. P.* (5675, 817, 25, 32); *George M. Nicolae* (4928, 5730, 812, 13, 17); *Leon A. M.* (5832); *Păläceanu D. V.* (5575); *Pârvulescu V. C.* (5575, 817); *Teodorescu St. I.* (5464, P); *Ţincu C. C.* (5730, 801); *Turcu C. Const.* (5760); *Vasilescu-Stabu A. M.* (5546, 51, 58, 93, 95, 606, 18, 49, 782, 813, 17, P); *Wegener N. E.* (4257, 5796, 832).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea «*Gazetei Matematice*» se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 19.867

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1943

SUMARUL

1. Din proprietăţile patrulaterelor complete. *G-l Gh. I. Popescu.*
2. Maximilian Hell (Höll) şi activitatea sa la Cluj . . . . . *Victor Marian.*
3. O problemă de cinematică . . . . . *Cpt. I. Gh. Zamfirescu.*
4. Concursul „Gazetei Matematice“ din 1944. *Delegaţia Societăţii.*
5. Note matematice: 4 — 6.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 323.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1412, 3965, 5056, 5303, 5470, 5580, 5669, 5710, 5718, 5760, 5763, 5788, 5836.
11. Exerciţii: 6.
12. Probleme propuse: 5825, 5849 — 5859.

BIBLIOTECA CENTR... SIBIU

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 837, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

A. ANGELESCU, *Calcul diferenţial şi Analitic* . . . . . Lei 250

DIN PROPRIETĂȚILE PATRULATERELOR COMPLETE

Fie patrulaterul complet ABCDEF, cu punctul lui MIQUEL la intersecția cercurilor ABC, ADE, BDF și CEF de centre O, O_a, O_b și O_c.

In cele ce urmează, vom expune câteva proprietăți ale patrulaterului complet și cazurile particulare ce se prezintă.

1. *La un punct* N, *din planul unui patrulater complet, corespunde un cerc* (N), *care trece prin 9 puncte caracteristice:* M, *punctul lui* MIQUEL *al patrulaterului;* N, P, Q *și* R, *vârfurile analoage ale triunghiurilor direct asemenea, construite pe laturile celor 4 triunghiuri de patrulaterului; a, b, c și d, intersecțiile laturilor analoage ale triunghiurilor asemenea considerate* (Fig. 1).

Fie punctul N, în planul triunghiului ABC.

Dreptele care unesc punctul N, cu vârfurile triunghiul ABC, întâlnesc cercurile ADE, BDF și CEF, a doua oară, respectiv, în punctele *a*, *b* și *c*.

Punctele M, N, *a* și *b* sunt pe un cerc (N), fiindcă unghiul ANB este suplimentar cu unghiul *aMb*, iar acesta este egal cu suma celorlalte două unghiuri din triunghiul ANB. (Unghiul *a*MD este egal cu unghiul *a*AD, etc.).

Tot astfel, se arată că și punctul *c* este pe cercul (N).

In triunghiul ADE, se consideră punctul P, astfel ca triunghiurile NBC și PDE să fie direct, asemenea.

Laturile analoage NC și PE, se întâlnesc în punctul *c*, fiindcă fac un unghiu egal cu unghiul EFC și tot același unghiu, fac și laturile omoloage NB și PD, care se întâlnesc în *b*.

De unde, rezultă că punctul P, din triunghiul ADE, omologul punctului N, se găsește pe cercul (N).

Punctele Q și R din triunghiul BDF și CEF, sunt vârfurile triunghiului QFD și REF, direct asemenea respectiv, cu triunghiul NCA și NAB. Laturile omoloage vor concura în punctele *c*, *a* și *a*, *b*, de unde rezultă ca punctele Q și R, sunt pe cercul (N).

Tot pe cercul (N), se găsește și punctul *d*, intersecția laturilor omoloage PA cu RC din triunghiurile asemenea PAD și RCF și cum unghiul lor este egal cu unghiul ABC rezultă că punctul *d*, se găsește la intersecția cercurilor ABC și (N) — al doilea punct de intersecție fiind M.

2. *Cazuri particulare ale poziției punctului N.*

a) Dacă punctul N se găsește în O, centrul cercului ABC, punctele P, Q și R devin centrele O_a, O_b și O_c, iar cercul (N), devine *cercul* (O), *cercul lui* MIQUEL, al patrulaterului complet, considerat.

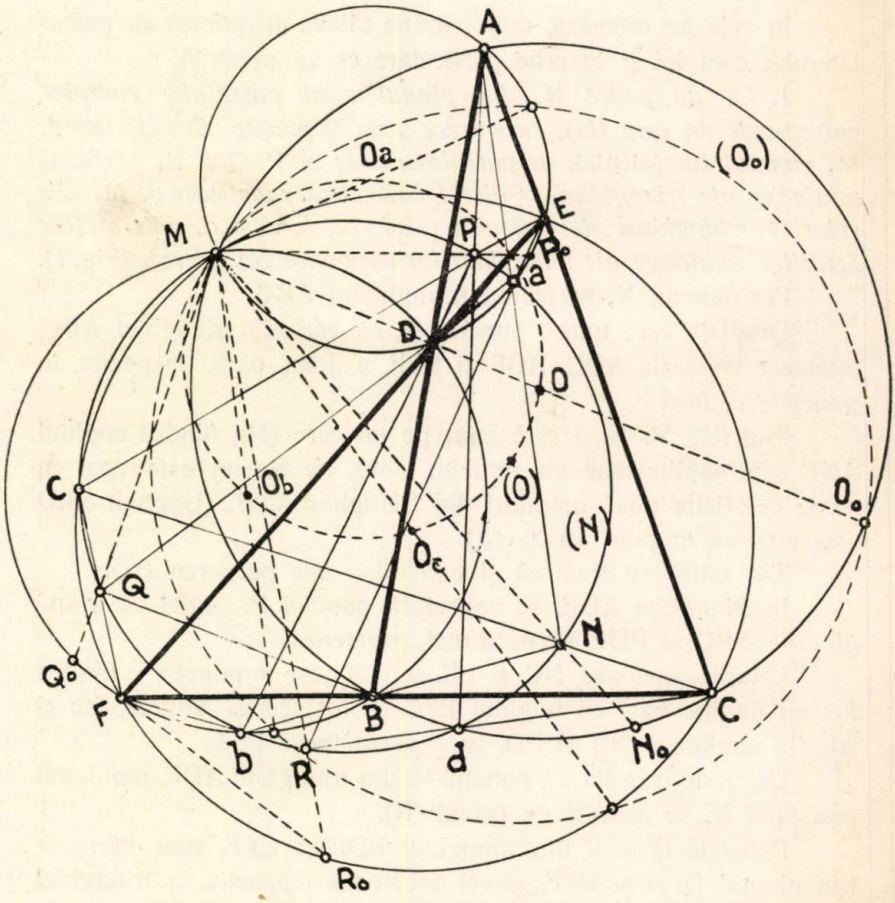


Fig.1

Unghiurile OBC și OCB, sunt egale cu $90^0 - A$ și tot aceeași valoare o au unghiurile triunghiului isoscel O_aDE și deci O și O_a sunt vârfuri omoloage, etc. Cercul (O), trece deci prin centrele cercurilor circumscrise celor 4 triunghiuri, ale patrulaterului complet, proprietate cunoscută.

a) Dacă punctul N se găseşte în N_0. pe cercul ABC şi pe dreapta MN, punctul *d*, se confundă cu N în N_0, *a* cu P în P_0, etc. şi se obţine cercul (N_0), $MN_0P_0R_0Q_0$, omotetic cu cercul (N) în raportul $\frac{MN}{MN_0}$. Triunghiul $P_0Q_0R_0$ este asemenea cu ABC şi laturile sale, trec respectiv, prin punctele D, E şi F.

c) Când N se confundă cu O, punctele P_0, Q_0 şi R_0 sunt extremităţile diametrelor MO_a, MO_b şi MO_c şi se obţine cercul (O_0), tangent în M cu cercul MIQUEL (O) şi omotetice în raportul $^1/_2$. Centrul cercului (O_0) se găseşte pe cercul (O).

3. In cazul când *punctul* MIQUEL M, vârfurile D, E, F *în linie dreaptă, sunt fixe iar triunghiul* ABC *rămâne asemenea cu el însuşi,* punctele M, P, Q, R, *a*, *b* şi *c* de pe cercul (N), rămân fixe iar punctele N şi *d*, se mişcă pe acest cerc, funcţie de poziţia triunghiului ABC.

Cercurile MDE, MDF şi MEF fiind fixe, ca şi punctele *a*, *b* şi *c* de pe aceste cercuri, unghiurile *a*AD, *b*BD şi *c*CE rămân constante, de unde rezultă că punctul N se va găsi pe cercul M*abc* (N). Punctele P, Q şi R fiind la intersecţii de drepte fixe, sunt fixe, iar *d* se va găsi pe cercul (N) când triunghiul ABC rămâne asemenea cu el însuşi, laturile acestui triunghiu, trecând respectiv, prin punctele fixe D, E şi F.

De unde rezultă, când N se confundă cu O, că *pe cercul lui* MIQUEL (O) *se găsesc centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor, asemenea* ABC.

4. *Prin inversiune, luând ca pol punctul* M, *vârfurile patrulaterului complet, se transformă în alt patrulater complet, invers asemenea cu cel dat* (Fig. 2).

Din triunghiurile direct asemenea MDE şi MBC, MEA şi MEB, se deduc relaţiile:

MA . MF = MB . ME = MC . MD, astfel că pe razele vectorii MA şi MF, MB şi ME, MC şi MD, se obţin punctele inverse F′ şi A′, E′ şi B′, D′ şi C′ vârfurile noului patrulater complet, egal cu cel dintâi.

Faţă de polul dublu M, cele două patrulatere sunt două figuri inverse, egale.

Cercurile MFBD şi MFCE, fac un unghiu, egal cu unghiul BAC iar cercurile MAED şi MACB cu unghiul CFE.

Prin inversiune cercurile MABC, MAED, MDBF şi MFCE devin laturile patrulaterului transformat şi cum unghiurile se meţin în transformare, se vede că şi noul patrulater, are aceleaşi unghiuri ca cel de origină.

5. *Cercul* MIQUEL *din primul patrulater se transformă în linia ortocentelor triunghiurilor patrulaterului complet, transformat şi invers.*

Cercul MIQUEL (O) din primul patrulater ABCDEF, trecând prin M, se transformă în o dreaptă (Δ') în patrulaterul transformat A'B'C'D'E'F'.

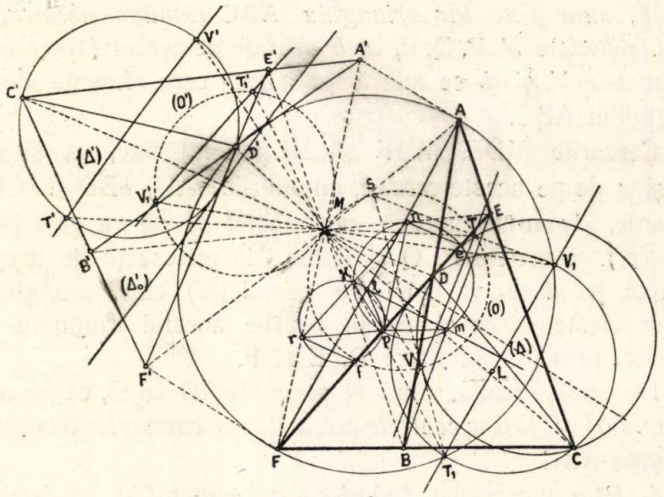


Fig. 2

Ori cum diametrele MO, MO_a, MO_b şi MO_c, (Fig. 1), fac 90^0 cu cercurile ce trec prin M şi prin câte 3 vârfuri ale patrulaterului, rezultă că prin transformare, aceste diametre, devin perpendiculare pe laturile patrulaterului transformat. (Δ'_0) este dreapta care uneşte proiecţiile lui M pe laturile acestui patrulater şi deci, această dreaptă, este inversa cercului (O_0).

Cum inversul centrului unui cerc, ce trece prin pol, este simetricul polului de inversiuue, faţă de dreapta transformată cercului, rezultă că cercul (O), cercul lui MIQUEL din patrulaterul dat, se transformă în (Δ'), linia centrelor ortocentrelor triunghiurilor din patrulaterul transformat, fiindcă simetricul lui M, faţă de

(Δ'_0) se găseşte pe (Δ'). Se verifică apoi şi faptul că cercurile (O) şi (O_0) fiind tangente şi în raportul de omotetie $^1/_2$, dreptele (Δ'_0) şi (Δ') sunt paralele şi în acelaşi raport faţă de M.

Prin transformare punctele fixe F, D şi E în linie dreaptă, formează triunghiul fix A'B'C', dreapta (Δ'_0) este dreapta lui SIMSON, faţă de M în acest triunghiu.

Ortocentrul acestui triunghiu fiind fix, dreapta (Δ'), trece prin acest punct fix. Dreapta variabilă F'D'E', are condiţia ca simetricul punctului M, faţă de această dreaptă, să se găsească pe (Δ'), fiind o latură a patrulaterului transformat.

Aceste consideraţiuni de puncte fixe şi drepte variabile, sunt făcute în cazul când patrulaterul dat, este deformabil, punctele D, E şi F fiind fixe iar triunghiul ABC, rămâne asemenea cu el însuşi.

6. *Pe cercul lui* MIQUEL (O), *se găsesc două puncte astfel, că trei cercuri trec prin aceste puncte şi prin extremităţile uneia din diagonalele patrulaterului complet.*

Cu aceste două puncte, *cercul lui* MIQUEL, trece prin *11 puncte caracteristice.*

In un patrulater complet, pe linia ortocentrelor celor 4 triunghiuri, se găsesc 2 puncte, intersecţia celor 3 cercuri descrise pe diagonale, ca diametre.

In patrulaterul transformat pe (Δ'), fie T' şi V', aceste puncte.

Atunci, inversele acestor puncte T şi V, se vor găsi pe cercul (O) din patrulaterul dat.

Cercurile descrise pe A'F', E'B' şi C'D' ca diametre şi trecând prin T' şi V', se transformă în cercurile AFTV, EBTV şi CDTV.

Fie (O') cercul lui MIQUEL din patrulaterul transformat şi fie T_1 şi V_1 punctele, unde concură cercurile descrise pe diagonalele patrulaterului dat.

Punctele T_1 şi V_1 sunt inversele punctelor T' şi V' de pe cercul (O') şi inversa acestui cerc este dreapta (Δ), analoagă cu dreapta (Δ'), din patrulaterul transformat.

In patrulaterul TVT_1V_1, triunghiurile MTV_1 şi MVT_1 sunt direct asemenea, laturile TV_1 şi VT_1 fiind omoloage, concură pe cercul (O) în punctul S, de unde rezultă şi construcţia punctelor T şi V.

Se construesc punctele T_1 şi V_1 de pe linia ortocentrelor (Δ) şi se obţine punctul S, la intersecţia cercului MT_1V_1 cu cercul (O). Apoi unind pe T_1 şi V_1 cu S se obţin pe (O), punctele căutate T şi V.

Toate cele arătate mai sus, reies ţinând seamă că perechile de drepte: MF şi MA, MB şi ME, MC şi MD sunt izogonale, iar cele două patrulatere, cel dat şi transformatul său, sunt egale şi simetrice (Fig. 2), faţă de bisectoarea exterioară a unghiurilor formate de dreptele izogonale, de mai sus, cele două patrulatere pot să fie simetrice şi faţă de bisectoarea inferioară a acestor unghiuri.

7. *In patrulaterele complete, variabile, în cazul când punctul* MIQUEL *şi 3 vârfuri în linie dreaptă, sunt fixe, dreapta ce uneşte mijloacele diagonalelor, precum şi axul radical al cercurilor descrise pe diagonale ca diametre, trec prin câte un punct fix* (Fig. 2).

Dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor, trece prin punctul de intersecţie al celor 3 cercuri, obţinute astfel: luând faţă de unul din vârfurile fixe, ale patrulaterului, omoteticul cercului care trece prin celelalte 2 vârfuri fixe şi prin punctul MIQUEL, în raportul $^1/_2$. Cele trei vârfuri fixe, sunt în linie dreaptă.

Fie *p*, *e*, *f*, *n*, *r*, *l* şi *m*, mijloacele segmentelor FE, DE, DF, EM, FM, FA şi EB.

Considerăm cercurile *pmen* şi *plrf* care se taie în *p* şi *k*. Cercul *pmen* este omoteticul cercului MDF, faţă de vârful E.

Punctul *k*, se găseşte pe dreapta *nr*, fiindcă în paralelogramul *enrf*, segmentul *pk* este egal cu segmentele *ne* şi *fr*, fiind coardă comună, în cele două cercuri considerate.

In triunghiul *pml*, unghiul *lmp*, este egal cu unghiul 180° unghiu — ACB, (*lp*, paralel cu AC, etc), egal cu unghiul EMF.

Unind pe *k* cu *m* şi cu *l* avem unghiul *pmk* = unghiul *kep* = unghiul *npe* = MFE.

Unghiul *plk* = unghiul 180° — unghiul *kfp* = unghiul 180° — unghiul MEF. Rezultă că, unghiul *plm* = unghiul MEF şi deci, punctele *m*, *l* şi *k*, sunt în linie dreaptă.

Dreapta mijloacelor diagonalelor, *ml*, trece prin punctul *k*, care rămâne fix, odată cu cele trei cercuri considerate.

Cum simetricul punctului MIQUEL, faţă de laturile patrulaterului complet, se găseşte pe linia ortocentrelor triunghiurilor acestui patrulater, şi cum latura FDE este fixă, dreapta (Δ) va trece prin L, simetricul lui M faţă de FE, punct fix.

G-L GH. I. POPESCU.

MAXIMILIAN HELL (HÖLL) ŞI ACTIVITATEA SA LA CLUJ

Intre profesorii universităţii iezuite din Cluj, — universitate ce a funcţionat dela 1591 (cu o întrerupere între 1605—1693) până la 1773, — personalitatea ştiinţifică cea mai de seamă a fost profesorul german M. HELL. In timpul celor trei ani cât a funcţionat la Cluj, unde a fost trimis din partea ordinului său, HELL a muncit cu mult entusiasm pentru promovarea ştiinţelor matematice şi a astronomiei la Cluj. Atât prin activitatea desvoltată la catedră, cât şi prin cărţile pe care le-a tipărit acolo, HELL merită atenţia noastră, fiind, alături de P. SIPOS, cel mai distins reprezentant al matematicilor în Ardeal, în veacul al XVIII-lea.

* * *

MAXIMILIAN HELL (HÖLL) s'a născut la Schemnitz, în Mai 1720. A studiat matematicile la Viena, fiind elev al lui JOSEPH FRANZ şi ERASMUS FROELICH şi a intrat în ordinul iezuiţilor. In 1743 ajunge asistent al astronomului FRANZ, iar în 1746 profesor la liceul din Leutsch (Löcse) unde rămâne abia un an. In 1752 este trimis ca profesor de matematici la universitatea din Cluj, iar de aici, în 1752, e chemat la Observatorul astronomic nou înfiinţat al universităţii din Viena, unde între 1755—57 predă şi mecanica. Intre anii 1768—70 face o călătorie la Wardoehuus, în Norvegia pentru a observa trecerea lui Venus peste discul Soarelui. Publicarea rezultatelor acestei expediţii a dat loc la controverse, unele din rezultate fiind contestate, în urmă însă s'a dovedit că observaţiile lui HELL au fost corecte. A murit în Viena la 1790.

* * *

HELL a publicat mai multe manuale de matematici elementare pentru învăţământ şi a îngrijit tipărirea ediţiei a treia a cărţii lui CRIVELLIUS, ce poartă titlul *„Elementa arithmeticae numericae et literalis“* Viena 1745, pe care a revăzut-o şi completat-o cu multă îngrijire. HELL îşi datoreşte însă renumele lucrărilor de astronomie, din care o parte sunt publicate în *„Ephemerides astronomicae ad meridianum Vindobonensem“*, apărute în Viena, sub direcţia sa, între anii 1757—86.

Lucrările publicate separat sunt următoarele:

Von der Osterfeier, Wien, 1761.

Tabulae solares N. L. *de la* CAILLE *cum supplemento,* etc. Ib. 1763.

Tabulae lunares TOB. MAYER *cum supplemento,* etc. Ib. 1763.

De satellite Veneris, Ib. 1765.

Dissertatio de transitu Veneris ante discum solis die 3 Iun. 1769 Wardoehuusi in Finnmarchia observato, Hafn. 1770, Viennae 1770.

De paralaxi solis ex obs. transitus Veneris anni 1769, Ib. 1773.

Meth. astron., sine usu quadrantis... item sine notitia refractionis ope solius tubi instructi micrometro... elevationem poli... accuratiss. definire, Ib. 1774.

Von der wahren Grösse, die der Durchmesser des vollen Mondes oder der Sonne zu haben scheinen, wenn man ihn mit freiem Auge ansieht, în *„Beiträge zu verschied. Wissenschaften".* Wien, 1775.

Aurorae borealis theoria nova, în *„Appendix ad Ephem. anni 1777",* Wlen, 1777.

Afară de acestea HELL a publicat o broşură cu titlul *„Anleitung zur nützl. Gebrauch der künstl. Stahlmagnete",* Wien 1762, în care stabileşte o teorie a magnetismului, enunţând că „magnetismul este electricitate ce acţionează într'o anumită măsură în mod constant". El a mai căutat să verifice ipoteza lui NEWTON, că forţa de atracţie între doi poli magnetici este invers proporţională cu cubul distanţei, fără însă a-i reuşi. Mai târziu COULOMB a arătat că această forţă este invers proporţională cu patratul distanţei.

* * *

In timpul funcţionării sale la Cluj, HELL a publicat un manual de matematici în două volume, de formatul 8°, legate într'unul. Primul volum are 304 pagini, iar al doilea 64 pagini, plus o planşă înafara textului.

Volumul întâi are următorul titlu: ELEMENTA | MATHEMATICA | NATURALI | PHILOSOPHIAE | ANCILLANTIA | AD | *Praefixam in Scholis nostris normam* | *Concinnata* | A. P. MAXIMILIANO HÖLL |, *e S. J. Philosophiae Doctore, Matheseos* | *Prof.*

Publ. & Ord. | IN ACADEMIA S. J. CLAUDIOPOLITANA | TRANSYLVANIAE |. TOMULUS I. | *Complectens,* | *Elementa Arithmeticae numericae, & literalis* | *seu Algebrae.* | CLAUDIPOLI, | TYPIS ACADEMICIS S. J. ANNO 1775 |. El are o prefaţă de 4 pagini, o Introducere de 7 pagini, Indrumări pentru studenţii în matematici pe 2 pagini, Cuprinsul Aritmeticei numerice pe 1 pagină, Elementele de Aritmetică (pp. 1—100), Indicele problemelor de Aritmetică pe 2 pagini numerotate. Urmează Algebra, înaintea căreia găsim iarăşi o prefaţă de 2 pagini, Cuprinsul pe 2 pagini, apoi Elementele de Algebră (pp. 113—304) şi în sfârşit Indicele problemelor de Algebră.

In prefaţă HELL povesteşte că înainte cu zece ani, când a îngrijit scoaterea unei noi ediţii a Algebrei lui I. CRIVELLIUS, pentru uzul studenţilor în filosofie, nici prin gând nu-i trecea că va scrie o carte de matematici, mai ales că apăruse cartea lui ERASMUS FROELICH: *Introductio facilis in Mathesim, ad usum tyronum Phylosophiae Provinciae Austriae S. J.* Viena, 1746. Continuă apoi: „Dar schimbându-se Regulamentul de studii pentru academiile noastre, Norma stabilită pentru lecţiile publice ale Colegiilor matematice pretindea o carte în care primele principii ale *aritmeticei, algebrei, geometriei, trigonometriei,* şi *ambelor architecturi,* teoretică şi practică, precum şi cele aplicate la întrebuinţările comune să fie tratate astfel, încât mai întâi ea să fie potrivită studenţilor, să cuprindă mult material, să fie lipsită de balast, scurtă în ce priveşte regulile necesare, cuprinzând multe exemple alese cu mare grijă, şi să fie utilă mai ales acelora, care nu cunosc nici măcar primele principii ale aritmeticei". Cartea lui HÖLL înseamnă realizarea începutului acestui program, ceea ce rezultă şi din faptul că pe foaia de titlu se menţionează că ea este tomul întâi.

Manualul lui HELL are meritul de a fi cea dintâi carte de matematici tipărită în Ardeal, având caracterul de originalitate. Dacă în unele părţi s'a folosit de alţi autori, pe aceştia îi citează. „Apoi dacă în această carte am introdus ceva din truda străină, a Societăţii mele, în acel loc nu am tăinuit numele celebrului autor, ferindu-mă totuşi de a aduce laudă autorilor Societăţii mele; şi aceasta fiindcă tot ce se află în această carte a mea mai clar decât celelalte, mărturisesc că le-am învăţat odinioară dela vestiţii

bărbaţi ai Societăţii noastre R. P. JOSEPH FRANZ şi ERASMUS FROELICH dintre care celui dintâi îi datoresc cu mulţumiri întreaga îndemânare matematică, în special astronomia şi disciplinele fizice, celuilalt teoria matematicilor); dacă ceva însă este expus mai puţin corect, doresc să se atribuie nesăbuinţei (imbecillitatis) mele şi grabei lucrului".

La sfârşitul prefeţei justifică în modul următor titlul dat cărţii: „Nu doresc ca cineva să caute aici lucruri mai înalte, dorind ca aceste Elemente ale mele să *servească* numai filosofiei naturale, nu să *domineze* disciplinele matematice".

In Introducere arată ce este matematica, cum se împarte, ce este o definiţie, postulat, axiomă, ipoteză, experienţă, etc.

In Indrumările pentru studenţi arată în XIII puncte cum trebuesc cetite cărţile de matematici.

Elementele aritmeticei numerice se împart în trei părţi.

Partea întâia se ocupă cu „natura şi algoritmii numerelor vulgare întregi". Ea începe cu definiţii şi axiome. Dintre definiţii amintesc următoarele: „I. *Aritmetica numerică* este ştiinţa numerelor. II. *Număr* este mulţimea ordonată a unităţilor. III. *Unitatea* este începutul numărului. IV. *Numărarea* este arta de a enunţa şi scrie orice numere după valorile lor totale". Ca axiome ale aritmeticei enunţă după CHR. WOLFF pe cele ce urmează: „I. *Intregul* este egal cu toate părţile sale luate împreună, şi invers. II. *Intregul* este mai mare decât partea sa. III. *Partea* este mai mică decât întregul ei. IV. Cele egale cu al treilea sunt egale între ele.

Partea a doua tratează „despre logistica zecimală sau despre cele patru specii ale aritmeticei zecimale a geometrilor". HELL explică modul de tratare al acestei părţi într'o notă pusă la început şi în care spune: *Aritmetica zecimală* a geometrilor, pe care alţii o numesc *a fracţiilor zecimale*, unii o tratează în geometrie, cu ajutorul căreia îşi fac geometrii calculele, alţii o pun după doctrina fracţiilor vulgare. Noi urmând ordinea naturală a doctrinei, nu am voit nici să o amestecăm cu geometria (ca nu cumva cu regulile aritmeticei să întrerupem firul geometriei) nici să o deplasăm la doctrina fracţiunilor vulgare, deoarece ea nu are nimic comun cu ele, decât numirea seacă şi tristă pentru studenţi de fracţii, ci să o tratăm în această parte cu algoritmii absoluţi ai numerelor întregi, (fiindcă logistica zecimală se foloseşte de aceleaşi reguli ale numerelor întregi ale aritmeticei)".

In scopul menţionat, autorul se serveşte de următoarele ipoteze: „I. La fel cu geometrii, fizicienii se folosesc la determinarea mărimilor lor de măsuri pe care le numesc stânjeni, picioare, degete, linii, etc. II. Stânjenul simplu se împarte în zece părţi, pe care geometrii le numesc picioare...; piciorul iarăşi îl împart în zece degete şi astfel stânjenul are 100 de degete. Apoi degetul îl împart în zece linii, deci stânjenul are 1000 de linii, etc. III. *Semnele* sau *notele*, sau exponenţii acestor specii sunt următoarele: semnul *stânjenului* este (o) sau zero, al *picioarelor* este (') sau o virgulă! al *degetelor* (") sau două virgule; al liniilor ("') sau trei virgule. Aceste semne se pun deasupra numerelor corespunzătoare. De ex. numărul logistic zecimal $\overset{0}{5}\ \overset{'}{7}\ \overset{''}{8}\ \overset{'''}{4},\ldots$ se exprimă astfel: 5 stânjeni simpli, 7 picioare simple, 8 degete simple, 4 linii simple". Cu ajutorul acestor mărimi defineşte apoi unităţile de suprafaţă şi volum: stânjenul patrat şi cubic, piciorul patrat şi cubic, etc. Pentru *patrat* utilizează semnul □, iar ca exemplu de scriere dă numărul $\overset{0}{24}$, 63, $\overset{''}{84}$, $\overset{'''}{70}$, care ce ceteşte 24 stânjeni □, 63 picioare □, 84 degete □, şi 70 linii □. Pentru *cubic* nu are semn special, iar ca exemplu dă numărul $\overset{0}{5}$, $\overset{'}{678}$, $\overset{''}{329}$, $\overset{'''}{453}$, care se ceteşte 5 stânjeni cubici, 678 picioare cubice, 329 linii cubice.

Materialul părţii III îl formează „reducerea numerelor mixte şi observaţii asupra semnelor numerice". Aici găsim indicaţii preţioase asupra măsurilor şi greutăţilor întrebuinţate pe atunci în Ardeal. Astfel măsurile civile de lungime erau *orgya*, *piciorul* şi *degetul*, rapoartele cărora sunt date de tabloul următor:

$\frac{1}{4}$ digiti

	Digit.	4
Pes	12	48
Una Orgya	6	72	288

Adaogă că în volumul de geometrie va da mărimea piciorului, care variază. Acest volum însă nu a mai apărut.

Suntem mai norocoşi cu greutăţile civile sau comerciale, aceleaşi în Austria, Ungaria şi Transilvania, pe care le cuprinde în tabloul de mai jos:

1 Drachma, seu Quintl. $\frac{1}{4}$ loth

1 Semiuncia seu Loth			4
1 Libra		32	128
1 Centenarius	100	3200	12800

Spune că valoarea unui funt austriac este de un funt, 2 uncii, 4 gros, şi 22 grăunţe pariziene. Calculând echivalentul acestora în grame obţinem valoarea de 567,15 g, de acord cu valoarea cunoscută a funtului comercial vienez de pe atunci.

Ca măsuri de volum ne dă tabloul cu „măsurile de vin din Transilvania:“

				Quadrans
1 Sextarius seu media				2
1 Cupa seu mensura			2	4
1 Urna Transylv.		8	16	32
1 Urna Germ, in Trans.	5	40	80	160

In notă menţionează că 2 măsuri ardeleneşti fac o măsură austriacă sau o cupă ungurească. Având în vedere că o urnă austriacă făcea cca. 58 litri, avem pentru urnă din Ardeal valoarea de cca. 11 litri.

Interesant este tabloul „greutăţilor farmaciştilor noştri“, de mai jos:

Granum				
20	1 Scrupulus			
60	3	1 Drachma		
450	24	8	1 Uncia	
5760	288	96	12	1 Libra

Ca lămurire ne spune: „Un grăunte (granum) este aproximativ greutatea unui grăunte de piper alb. Greutatea unui astfel de funt şi 7 uncii fac un funt de al nostru din tabloul III, de

asemenea o uncie cântăreşte 562 gr. pariziene". In baza acestor lămuriri am calculat (V. MARIAN: *Vechile greutăţi medicale din Ardeal*, în Clujul Medical, 1939, Nr. 12) greutatea unciei medicale, obţinând valoarea de 28,6 g, destul de apropiată de uncia din Nürnberg, fapt ce dovedeşte că pe la 1755 în Ardeal se folosea sistemul de măsuri medicale din Nürnberg.

In „Observaţii asupra semnelor numerice" se dau explicaţii asupra originii cifrelor împreună cu un tablou comparativ al cifrelor evreeşti şi greceşti. Asupra utilităţii cunoaşterii acestora spune că „în cele mai multe temple şi case vechi, în Austria, Ungaria şi mai ales în Transilvania în comitatele numite săseşti, vedem anii notaţi, de ex. anul edificării caselor..., pe care nimeni nu le va putea interpreta, decât un cetitor erudit".

Elementele Algebrei umplu două treimi ale cărţii. Ele sunt precedate de o prefaţă, în care se arată importanţa algebrei, care duce la „culmea cea mai înaltă a ştiinţelor". „Această ştiinţă — scrie mai departe — este cea mai de seamă dintre matematicile acestui ev şi cea mai nobilă, care prin problema analitică descopere, explică, inventează, în mod fericit adevărurile matematice oricât de necunoscute şi complicate, cu o admirabilă sagacitate, cele descoperite le demonstrează cât se poate de scurt şi clar, şi le ordonează după metoda sintetică spre admiraţia cetitorilor. O stimă atât de profundă a cuprins inimile matematicienilor faţă de această ştiinţă, încât au numit-o *divină*"...

Algebra se împarte în patru părţi.

Partea întâia se ocupă cu operaţiile algebrice ale întregilor şi fracţiilor. Ea începe cu definiţii, axiome, ipoteze, etc. Reproduc primele două definiţii: „I. Algebra este ştiinţa, care cu ajutorul literelor alfabetului şi anumitor semne inventate, prin reguli proprii ei caută cantităţi adevăruri necunoscute şi le află în mod infailibil din oarecare date cunoscute, potrivit axiomelor egalităţii şi le determină prin demonstraţii. Se numeşte şi *calcul universal*, deoarece literele în general înseamnă orice cantitate în locul căreia se folosesc. II. Se numeşte *cantitate* tot ce se poate mări prin adunare, sau micşora prin scădere. Iar *întreg* (totum) se numeşte ceea ce presupunem că constă din părţi; în această privinţă se numeşte şi *tot*". Numărul axiomelor algebrei este de trei, dintre care pe cele dintâi două le numeşte axiome fundamentale:

„I. Cantitatea, ce poate cădea sub consideraţia, şi calculul matematic sau algebric este de trei feluri: 1. Cantitate *pozitivă* sau *afirmativă*, care se zice şi *mai mare decât nimic*. 2. Cantitate *nulă*, sau *egal cu nimic*. 3. Cantitate negativă sau *mai mică decât nimic*. II. Cantitatea pozitivă împreună cu o cantitate negativă *egală*, este egală cu *nimic* sau *zero* (0), adecă se distrug reciproc complet". Axioma a treia sună astfel: „III. Scoaterea, sau scăderea cantităţii pozitive, este poziţia negativă a cantităţii de scăzut; şi invers, scoaterea sau scăderea cantităţii negative, este poziţia pozitivă a cantităţii negative de scăzut".

Semnele algebrice utilizate de HELL sunt, cu mici excepţii, cele de azi. Astfel ca semn al egalităţii, pe lângă (=) găsim şi (::) sau (∞), deci $a = b$, sau $a :: b$, sau $a \infty b$. Pentru înmulţire pe lângă ($\times$) mai are (.) şi (,).

Partea a doua tratează „despre puterile şi rădăcinile cantităţilor". Aici întroduce numerele iraţionale şi imaginare. Astfel, într'o observaţie la pag. 230 cetim: „Calculul rădăcinilor imaginare se face la fel ca al celor reale, trebuie numai să avem în vedere că la înmulţire şi împărţire semnele negative puse după semnul radicalului nu se schimbă în pozitive, astfel că din cantitatea imaginară şi imposibilă s'ar obţine una reală şi pozitivă, ceea ce e absurd; de aceea regulile date asupra semnelor sunt valabile numai în ce priveşte semnele puse înainte de $\sqrt{\ldots}$. La fel înmulţind $\sqrt{-6}$ cu $\sqrt{-3}$ se obţine produsul $\sqrt{-18}$, iar împărţind $\sqrt{-18}$ cu $\sqrt{-3}$ se obţine câtul $\sqrt{-6}$. Dar şi despre acestea, ca să nu fiu prolix, să se caute mai pe larg în autorii citaţi mai jos". Modul acesta de operaţie îl justifică astfel: „Ştim că vestiţii analişti italieni învaţă că înmulţind sau împărţind rădăcini imaginare cu imaginare, semnele — trebuesc schimbate în +, ceea ce încearcă să demonstreze între alţii însuşi ilustrul Domn MARTINE. Observ însă că rădăcina imaginară nu este negativă, după cum nu e nici pozitivă, căci de aceea se numeşte imposibilă fiindcă nu e nici pozitivă nici negativă, astfel că niciodată nu am putut înţelege cum se poate ca din cantităţi care nu sunt nici pozitive nici negative să se obţină cantităţi pozitive, după cum nu pot pricepe în ce fel din două entităţi cuprinzând o contrazicere, se poate compune o entitate posibilă". Ne putem imagina ce dificultăţi întâmpinau studenţii în operaţiile cu imaginare, dacă profesori ca

HELL se încurcau în ele. De aici se poate vedea importanţa introducerii lui $i = \sqrt{-1}$, de către EULER în 1777, şi întrebuinţarea lui sistematică de către GAUSS.

Partea a III-a se ocupă cu „analiza specială, sau arta de a rezolva probleme şi chestiuni întru câtva mai îndepărtate", adecă mai grele. Cuprinde rezolvarea ecuaţiilor de gradul I şi II, precum şi a ecuaţiilor nedeterminate.

Partea a IV-a a algebrei conţine noţiuni „despre proporţii, progresii, întrebuinţarea regulii de aur, a aflării teoremelor şi problemelor". Vorbind despre folosul proporţiilor spune: „Nimeni (decât un ignorant) nu va nega că nimic mai util pentru întreaga matematică şi filosofia naturală unită cu ea printr'o legătură de soră, şi pentru celelalte ştiinţe ale artelor liberale, nimic mai util pentru orice ocupaţie a vieţii omeneşti ca ştiinţa proporţiilor... In adevăr, grăieşti, dar nu ştii ce spui, dacă nu cunoşti doctrina proporţiilor... Ea este acea metodă de raţionare,... pe care dacă o înlături, ai nimicit ştiinţele şi artele şi ai deformat frumoasa ocupaţie a minţii omeneşti într'un desgustător monstru haotic"...

Notaţiile rapoartelor diferă întru câtva de cele de azi, după cum rezultă din următoarele: „*Definiţia VII. Proporţie* este *egalitatea* a două rapoarte; în special proporţia geometrică este egalitatea a două rapoarte având *aceiaşi* exponenţi, încât să fie $a^m : b$, şi $c^m : d$, sau $8^2 : 4$ şi $6^2 : 3$. *Proporţia aritmetică* este *egalitatea* a două rapoarte având aceeaşi diferenţă, încât să fie a^d, b şi c^d, f, sau 5^2, 3 şi 7^2, 9". *Ipoteza III.* Proporţia geometrică *se exprimă astfel: a, b, c* sau şi punând înainte semnul $\div\div$ ca $\div\div$ *a. b. c. d.* etc. şi se enunţă *a* este către *b*, şi *c* către *d*, precum şi *b* către *c*, şi *b* este către *c* precum *c* către *d*, etc.". „*Definiţia IX.* Se numeşte *progresie* o anumită serie a cantităţilor continuu proporţionale, precum 1^3. 3^3. 9^3. 27^3. 81^3. 243^3. etc".

La sfârşit citează autorii de care s'a folosit la scrierea volumului, amintind în primul rând pe CHR. CLAVIUS S. J.: *Epitome Arithmeticae practicae*; R. P. ANDREAS TACQUET: S. J.: *Theoria et praxis Arithmetices,* apoi pe CRIVELLIUS, FROEHLICH şi în urmă pe B. H. LECHI S. J.: *Arithmetica universalis* NEUTONI.

Volumul al doilea este o culegere de probleme şi exerciţii de aritmetică şi poartă titlul: EXERCITATIONUM | MATHEMATICARAM | PARS I |. EXERCITATIONES ARITHMETICAE |

Quibus pertractantur... ad | usum privatum studiosae juventutis | conscriptae | A. P. MAXIMILIANO HÖLL |, e S. J. Philosophiae Doctore, Matheseos | Prof. Publ. & Ord. | IN ACADEMIA S. J. CLAUDIOPOLITANA | TRANSILVANIAE |. CLAUDIPOLI |, Typis Academicis S. J. 1754.

In prefaţă HELL spune că această întâie parte „cuprinde primele practice aritmetice, punând — dacă-i va plăcea lui D-zeu — în a doua parte pe celelalte"... A doua parte însă, care avea să cuprindă exerciţii de algebră, nu a mai apărut.

Problemele tratate sunt din domeniul algoritmului numerelor mixte şi a aplicaţiilor lor în viaţa civilă şi comercială, şi a regulii societăţiii. Ea este cea dintâi culegere de probleme de matematici apărută în Ardeal.

Intors la Viena HELL nu a mai avut răgaz că continue tipărirea celorlalte manuale ce le avea plănuite. In schimb însă a apărut la Posnana o nouă ediţie a cărţii de mai sus în 1760, şi în 1763 la Viena a treia ediţie.

* * *

La activitatea din Cluj a lui HELL trebuie să mai adăogăm experienţele de fizică pe care le-a făcut acolo, în deosebi pe acele asupra magneţilor, pe care le-a publicat mai târziu în Viena, şi mai ales preocupările sale astronomice. In chilia sa de călugăr a instalat un mic observator astronomic, ale cărui instrumente se mai păstrează şi azi în Cluj şi cu care a început observaţiile sale astronomice. Experienţa din Cluj i-a folosit la instalarea observatorului astronomic din Viena. HELL a avut ca elev pe I. MARTONFFI, ajuns mai târziu astronom la Alba-Julia. In felul acesta activitatea din Cluj a lui HELL, deşi de scurtă durată, a fost cât se poate de rodnică, contribuind mult la răspândirea interesului faţă de matematici în Ardeal.

VICTOR MARIAN.

O PROBLEMĂ DE CINEMATICĂ

In cele ce urmează îmi propun să prezint câteva chestiuni referitoare la următoarea problemă de cinematică.

Fie Δ *o dreaptă fixă,* O *un punct fix şi* D *o dreaptă mobilă în plan astfel că un punct* A, *solidar legat de dreaptă, alunecă*

pe dreapta Δ, *iar dreapta* D *însăşi, trece necontenit prin punctul fix* O.

1°. *Traiectoria unui punct oarecare de pe* D *este o concoida* NICOMEDE. Intr'adevăr, fie B punctul considerat, la distanţa *a* de A. Luând O ca pol, punctul B fiind constant depărtat de intersecţia razei vectoare cu dreapta fixă Δ, descrie, după cum se ştie, *concoida* lui NICOMEDE.

In general, oricare ar fi curba plană pe care s'ar mişca A, este evident că B ar descrie concoida acelei curbe.

2°. *Curba bază a mişcării sistemului este o parabolă cu vârful în* O *şi parametrul* P, *egal cu semidistanţa dela* O *la* Δ, *axa ei fiind normală* OO_1 *la* Δ.

Se ştie că baza mişcării unui sistem în plan sau spaţiu este locul geometric al centrului instantaneu de rotaţie. Se ştie deasemenea că centrul instantaneu de rotaţie al unei mişcări este punctul care se poate considera ca centrul în jurul căruia se face, la un moment dat, rotaţia sistemului şi este determinat de intersecţiile normalelor la traiectoriile diverselor puncte ale sistemului îm momentul considerat.

Din cele de mai sus rezultă că este suficient să se cunoască două normale la un moment dat spre a se putea determina centrul instantaneu.

Traiectoria punctului A fiind Δ, una din normale este perpendiculară în A pe Δ.

Pentru a doua normală, voi considera pe cea corespunzătoare punctului de pe D care se găseşte în momentul considerat în O.

Spre a determina direcţia acestei normale, raţionez după cum urmează.

Consider o poziţie A, ca iniţială pentru A. Presupun că A se deplasează în sensul din figură, în A'. Punctul din D se deplasează în D' deasupra lui OA. Consider apoi o deplasare a lui A în sens contrar, în A"; punctul din O va veni O" tot deasupra lui OA. Când deplasarea lui A se face dela A' şi A" spre A, punctele O' şi O" se apropie necontenit de O, rămânând continuu deasupra dreptei AO, la limită ele venind în O, singurul punct comun cu AO. Rezultă că punctul considerat descrie o traectorie tangentă în O la AO şi că deci normala la traiectorie în acest punct este normala la dreapta AO.

Plecând dela acest raţionament, se deduce că un arc O'OO", simetric cu cel dintâi, se reproduce pentru poziţii A'A, A" simetrice cu primele, faţă de OO_1 adică în O avem un punct dublu al traiectoriei, O_1 fiind proiecţia lui O pe Δ.

Se mai deduce de asemenea, că dacă considerăm poziţia iniţială a lui A în O_1, punctul din O va descrie pentru punctele A deasupra lui OO_1 arce deasupra acestei drepte şi pentru punctele A dedesubtul lui OO_1, arce dedesubtul lui OO_1 ambele arce fiind însă simetrice şi tangente în O la OO_1.

Am reprodus astfel ceea ce se cunoaşte deja, asupra curbelor concoide: că dacă parametrul a este mai mare decât distanţa $2p$ a polului de curba de referinţă, concoida trece de două ori prin O, iar dacă distanţa şi parametrul sunt egale, polul reprezintă un punct de întoarcere al concoidei, oricare ar fi natura curbei de referinţă.

Pentru determinarea locului lui I, adică al bazei, consider sistemul de axe OO_1 şi normala în O pe aceasta.

Ecuaţia dreptei OA este $y = mx$, a dreptei OI : $y = -\frac{1}{m}x$, iar a dreptei AI este $y = \frac{2p}{m}$.

Eliminând pe m între ultimele 2 ecuaţii avem

$$y^2 = 2px$$

adică ecuaţia unei parabole de centru O şi parametru p, egal cu semidistanţa lui O la Δ.

Demonstraţia se poate reproduce şi geometric elementar.

In adevăr, fie F punctul pe O_1O, astfel ca $OF = \frac{p}{2}$ adică egal cu $\frac{OO_1}{4}$ şi M simetricul lui F faţă de O normala în M la OO_1 taie pe AI în B, iar normala în O pe OO_1 taie aceeaşi dreaptă în P. In fine, BF taie pe OP în N. Fie de asemenea R mijlocul segmentului AP.

Deoarece BP = OF rezultă că BN = NF adică IN este mediană în triunghiul IBF şi PN = NO adică IN este mediană şi în triunghiul POI. Triunghiurile IOP şi AOP sunt asemenea

astfel că medianele corespunzătoare OR şi IN fac unghiuri egale cu laturile corespunzătoare OA şi IO şi cum IO şi OA sunt perpendiculare, rezultă că şi medianele sunt perpendiculare.

Dar BN este paralelă cu RO, trecând prin mijloacele laturilor RP şi PO ale triunghiului RPO şi deci IN este perpendiculară pe BO şi prin urmare punctele egal depărtate de N, adică F şi B sunt egal depărtate de punctul I.

Sau, I *descrie parabola de factor* F *şi de directoare* OB, *având parametrul p.*

3°. Din cele ce preced rezultă construcţia tangentei într'un punct la o concoidă, când se cunoaşte normala în punctul de intersecţie al razei vectoare, cu curba de referinţă.

Pentru acesta, se uneşte punctul de pe concoidă cu polul şi din intersecţia acestei raze cu curba de referinţă, se duce normala curbei iar din pol se duce normala razei. Unind intersecţia lor cu punctul dat se obţine normala şi de aci tangenta.

4°. O altă proprietate imediată este următoarea: fiind dată o curbă oarecare şi un punct fix, normalele tuturor punctelor de pe o aceeaşi rază vectoră la concoidele corespunzătoare curbei date în raport de punctul fix şi având ca parametrii distanţele punctelor la intersecţia razei vectoare cu curba, sunt concurente iar prin punctul lor de concurenţă trece şi normala la curbă în punctul de intersecţie cu raza vectoare.

5°. *Rostogolitoarea mişcării sistemului este o curbă astfel încât ecuaţia sa redusă se obţine din ecuaţia unei hiperbole căreia i se înmulţeşte ordonata prin abscisa corespunzătoare, axele hiperbolei fiind* 2 *şi* 4*p.*

Se ştie că se numeşte rostogolitoarea mişcării unui sistem în plan, locul geometric al centrului instantaneu de rotaţie în planul presupus solidar legat de sistemul mobil, deci mobil şi el peste planul în care se înregistrează mişcarea sistemului.

Este uşor de imaginat că curba descrisă de I în planul mobil este aceeaşi dacă în locul său s'ar mişca planul fix, el însuşi rămânând fix.

In acest caz, rămâne de rezolvat chestiunea: care este locul geometric al centrului instantaneu de rotaţie al sistemului format dintr'un unghiu drept, la care una din laturi trece necontenit prin punctul fix A al dreptei fixe D iar un punct O, — depărtat constant

de vârful O_1 al unghiului —, de pe cealaltă latură, alunecă pe dreapta fixă D.

Pentru acest sistem, curba rostogolitoare este curba bază a primului sistem, iar curba bază este rostogolitoarea primului sistem. Noi trebuie să determinăm deci baza noului sistem.

Normalele ce vom considera, după raţionamentul precedent analog, sunt: perpendiculara în A pe AO_1 şi în O pe AO.

Ecuaţiile vor fi stabilite în sistemul de axe AO şi normala în A la AO.

Ecuaţia dreptei AO_1 este $y = mx$, a dreptei AI, $y = -\frac{1}{m}x$, a dreptei OO_1, $y = -\frac{1}{m}x + n$.

Intersecţia dreptelor AO_1 şi OO_1 este dată de

$$O_1 \left| x_1 = \frac{mn}{m^2+1} \quad , \quad y_1 = \frac{m^2 n}{m^2+1} \right|.$$

Punctul O are coordonatele

$$O\ (x_2 = mn \quad , \quad y_2 = 0).$$

Distanţa OO_1 este constantă, egală cu $2p$:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4p^2$$

unde înlocuind cu valorile de mai sus am:

$$\frac{m^4 n^2}{m^2+1} = 4p^2.$$

Punctul I având coordonatele:

$$I\ (x = mn \quad , \quad y = -n)$$

înlocuind pe m şi n în relaţia precedentă obţinem:

$$\frac{x^4}{x^2+y^2} = 4p^2$$

care se mai poate scrie:

$$y = \pm \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 - 4p^2}$$

şi se vede uşor că ecuaţia:

$$y_h = \pm \frac{1}{2p} \sqrt{x^2 - 4p^2}$$

este ecuaţia unei hiperbole de semiaxe 1 şi $2p$.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1944

1. Societatea *Gazeta Matematică*, în Adunarea generală dela 26 August a. c., a hotărît ţinerea concursului tradiţional de matematici în anul 1944, între elevii liceelor civile şi militare din întreaga ţară şi între studenţii anului I ai Politehnicei din Bucureşti.

Concursul va avea loc după sărbătorile Sfintelor Paşti. Data precisă şi locul unde se va ţine concursul se va anunţa în numărul 6 din Februarie 1944 al revistei *Gazeta Matematică*, când se va publica şi numele candidaţilor admişi la concurs.

2. Elevii care doresc să se înscrie la concurs, sunt obligaţi să candideze la două din materiile menţionate aici pentru clasa în care urmează:

Clasa IV-a: Algebra, geometria în spaţiu;

Clasa V-a: Aritmetica raţionată, algebra, geometria plană;

Clasa VI-a: Teoria numerelor, trigonometria, geometria în spaţiu;

Clasa VII-a: Algebra, geometria proiectivă şi descriptivă;

Clasa VIII-a: Mecanica, geometria analitică, algebra.

Sunt *obligatorii:* Aritmetica raţionată pentru cl. V-a; teoria numerelor pentru cl. VI-a şi mecanica pentru clasa VIII-a.

3. Candidaţii vor da câte o probă scrisă şi câte un examen oral la ambele materii pentru care s'au înscris.

Nu se acordă candidaţilor niciun fel de scuză pentru nepregătirea unora din capitolele trecute în programul clasei lor, pentru obiectele la care s'au înscris la concurs.

4. Inscrierea la concurs se face numai prin cerere individuală, *scrisă personal* de candidat şi trimisă în plic recomandat, cel mai târziu până la 6 Ianuarie 1944, pe adresa *Societăţii Gazeta Matematică. Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.*

Nu se primesc cereri trimise de părinţi, rude, corespondenţi, profesori sau şcoli.

5. In cerere candidatul va arăta pe puncte, în ordinea următoare:

a) Numele de familie, numele de botez.

b) Şcoala şi clasa în care urmează candidatul. Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent sau la care au depus examenul pentru clasa precedentă.

c) Adresa personală:

— în timpul şcolii;

— în timpul vacanţei de Paşte.

d) Dacă dispune de mijloace de a veni la Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului sau dacă unul din aceste mijloace ar trebui să-i fie procurate.

Cei care au nevoie de bani pentru drum vor arăta gara de plecare pentru a veni la concurs şi gara de înapoiere dela concurs.

e) Materiile la care se înscrie la concurs, începând cu cele obligatoare pentru clasele V, VI şi VIII.

f) Activitatea depusă la *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul Gazetei Matematice*, arătând numerele de ordine al problemelor şi exerciţiilor rezolvate şi publicate sau menţionate. Se va arăta şi activitatea la alte reviste de matematici din ţară şi din străinătate.

6. Candidaţii înscrişi la concurs, care din diferite motive nu mai pot sau nu mai vor să se prezinte la concurs, sunt obligaţi să anunţe în scris şi din timp Societatea.

7. Părăsirea sălilor de concurs este interzisă înainte de a preda lucrarea scrisă.

8. Numărul candidaţilor ce se va admite la concurs se va hotărâ ţinând seamă de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor precum şi de pregătirea pe care aceştia o vor arăta şi dovedi în cererile ce vor face.

9. Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi diplome, premii sau menţiuni.

Primul reuşit între candidaţii elevi de liceu va primi şi premiul « LT.-COL. G. TĂNĂSESCU », constând din cărţi.

Primul reuşit între studenţii anului I al Politehnicei din Bucureşti va primi premiul « ANGHEL SALIGNY », de 1000 lei, oferit de un membru al Societăţii noastre.

Comisia examinatoare se va compune din membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, care nu au rude sau elevi printre candidaţi.

9. **Programa analitică a concursului.**

Clasa IV-a: 1. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

— Rezolvarea ecuaţiilor de gradul I cu una şi două necunoscute, cu coeficienţi literali;

— Reprezentarea grafică a ecuației de gradul I cu două necunoscute și a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute.

2. *Geometria în spațiu.* Toată materia prevăzută în programa analitică.

Clasa V-a: 1. *Aritmetica rațională* (obiect obligator).

Operațiile aritmetice. Divizori. Numere prime. Codivizorul maxim (c. m. m. d. c.) și comultiplul maxim (c. m. m. c. m). Fracții ordinare, zecimale. Fracții zecimale periodice și fracțiile generatoare. Rădăcini patrate. Rapoarte. Proporții. Regula de trei. Dobânzi simple. Sconturi. Asociații. Amestecuri, aliaje.

2. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

La radicali se va face raționalizarea numitorilor care cuprind radicali de ordinul al II-lea și sume de *doi* radicali de ordinul al III-lea și al IV-lea.

La sisteme de ecuații de gr. I se vor cere sisteme cu rezolvări particulare (artificii de calcul).

Sisteme reductibile la gradul I și II.

Transformarea expresiilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Reprezentarea grafică a ecuației de gradul I cu două necunoscute: variația și reprezentarea grafică a trinomului de gradul al II-lea.

3. *Geometria plană.* Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

Locul geometric al punctelor astfel ca raportul distanțelor la două puncte fixe să fie constant.

Impărțirea unui segment în medie și extremă rație.

Patratul laturii unui triunghiu oarecare, diverse aplicații, calculul medianelor și înălțimilor, unele locuri geometrice.

Inscrierea pentagonului și decagonului regulat în cerc.

Teoremele lui MENELAUS și CEVA și reciprocele lor.

Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulatere inscriptibile.

Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte. Axă și centru radical.

Relația metrică a lui STEWART. Aplicații.

Clasa VI-a. 1. *Teoria numerelor.*

Divizori: numărul, suma și produsul divizorilor.

Indicatori. Teoremele lui FERMAT, EULER, WILSON.

2. *Trigonometria.* Toată materia prevăzută în programa analitică, afară de aplicațiile trigonometriei la statică. In plus:

Aria unui triunghiu în funcție de elementele lui.

Razele cercurilor: circumscris, înscris și exînscrise.

Identități, ecuații și sisteme trigonometrice.

Problema hărții.

3. *Geometria în spațiu.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Unghiuri triedre. Cazurile de egalitate ale triunghiurilor sferice și aria triunghiului sferic.

Volumul produs de un sector poligonal plan regulat, care se rotește în jurul unei axe.

Volumul segmentului sferic (mărginit de zonă sau calotă).

Clasa VII-a. 1. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică pentru clasa VI-a și a VII-a (fără aplicații la cinematică). In plus:

Determinanții de ordinul al IV-lea.

Găsirea punctelor de inflexiune.

Principalele criterii de convergență ale seriilor.

2. *Geometria proiectivă și descriptivă.*

Geometria proiectivă: Inversiunea. Diviziuni și fascicole anarmonice și armonice. Pol și polară în raport cu un unghiu și în raport cu un cerc. Polare reciproce.

Teoremele lui PASCAL ȘI BRIANCHON. Patrulatere complete.

Geometria descriptivă. Punctul, dreapta, planul, intersecții de plane, de plan cu dreaptă. Epura unei prisme cu baza în planul orizontal și secțiunea plană într'o prismă.

Clasa VIII-a. 1. *Mecanica* (Obiect obligator). Toată materia prevăzută în prograna analitică pentru clasa VIII-a și Cinematica prevăzută pentru cl. VII-a. In plus: lucrul mecanic.

2. *Geometria analitică.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Schimbarea de axe prin translație. Ecuațiile conicelor raportate la axe paralele cu axele lor. Pol și polară. Studiul geometric elementar al conicelor.

3. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Cantități complexe. Teorema lui MOIVRE. Ecuații binoame. Aplicații ale teoremei lui ROLLE la ecuații cu *unu* și *doi* parametri.

Anul I al Politehnicei din Bucureşti. Candidaţii vor fi examinaţi la două din materiile programei anului I:

1. Algebră şi Analiză matematică.
2. Geometrie analitică.
3. Mecanică.

*

Toţi candidaţii trebuie să cunoască toată materia respectivă a claselor precedente, cu adăogirile prevăzute în această programă.

DELEGAŢIA SOC. „GAZETA MATEMATICĂ".

NOTE MATEMATICE

4. *Factori şi produse cu cifre diferite.* In continuarea notei Nr. 10 dela pag. 108 din Vol. XLVIII, dau în cele ce urmează grupele de 5 şi de 6 numere diferite astfel ca produsul a 4 sau 5 din ele să fie egal cu ultimul.

1°. *Grupe de 5 numere.*

$1\times2\times4\times\ 7=\ 56$; $1\times3\times\ 6\times54\ =\ 972$; $1\times7\times8\times\ 9=\ 504$; $2\times5\times\ 6\times13=\ 780$
$1\times2\times4\times\ 95=\ 760$; $1\times3\times\ 5\times486=7290$; $1\times8\times9\times56=4032$; $2\times5\times\ 7\times\ 9\times\ 630$
$1\times2\times6\times\ 7=\ 84$; $1\times3\times\ 5\times648=9720$; $2\times3\times4\times\ 7=\ 168$; $2\times5\times\ 7\times14=\ 980$
$1\times2\times6\times\ 8=\ 96$; $1\times3\times\ 8\times\ 24=\ 576$; $2\times3\times5\times\ 6=\ 180$; $2\times5\times14\times67=1380$
$1\times2\times6\times\ 59=\ 708$; $1\times3\times\ 8\times294=7056$; $2\times3\times5\times16=\ 480$; $3\times4\times\ 6\times\ 7=\ 504$
$1\times2\times7\times\ 35=\ 490$; $1\times3\times\ 9\times\ 28=\ 756$; $2\times3\times5\times64=1920$; $3\times5\times\ 6\times\ 8=\ 720$
$1\times2\times7\times\ 36=\ 504$; $1\times3\times24\times\ 98=7056$; $2\times3\times7\times45=1890$; $3\times5\times\ 6\times\ 9=\ 810$
$1\times2\times7\times\ 39=\ 546$; $1\times4\times\ 7\times\ 32=\ 896$; $2\times3\times9\times14=\ 756$; $4\times5\times\ 7\times\ 9=1260$
$1\times2\times7\times\ 45=\ 630$; $1\times4\times\ 7\times\ 35=\ 980$; $2\times4\times5\times\ 9=\ 360$; $4\times5\times\ 8\times37=5920$
$1\times3\times4\times\ 59=\ 708$; $1\times4\times\ 8\times\ 96=3072$; $2\times4\times5\times17=\ 680$; $4\times6\times\ 8\times\ 9=1728$
$1\times3\times4\times\ 65=\ 780$; $1\times4\times\ 8\times253=8096$; $2\times4\times5\times19=\ 760$; $4\times7\times\ 8\times\ 9=2016$
$1\times3\times4\times785=9420$; $1\times5\times\ 9\times\ 76=3420$; $2\times4\times5\times79=3160$; $5\times7\times\ 8\times14=3920$
$1\times3\times5\times\ 48=\ 720$; $1\times6\times\ 7\times\ 49=2058$; $2\times4\times8\times\ 9=\ 576$; $6\times7\times\ 8\times\ 9=3024$
$1\times3\times6\times\ 28=\ 504$; $1\times6\times\ 8\times\ \ 9=\ 432$; $2\times4\times8\times15=\ 960$

Total 55 grupe, dintre care cele 6 subliniate, întrebuinţează toate cifrele câte o singură dată fiecare.

2°. *Grupe de 6 numere.*

$1\times2\times4\times5\times9=360$ $1\times2\times5\times7\times9=630$ $1\times6\times7\times8\times9=3024$
$1\times2\times4\times8\times9=576$ $1\times3\times5\times6\times8=720$ $2\times3\times4\times5\times8=\ 960$

3°. *Grupe de 7 numere.* Am găsit numai grupa:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 8 = 960.$$

Grupe mai mari de 7 cifre, în aceste condiţii nu am găsit.

Din notele publicate asupra grupelor de acest fel se observă curiozitatea numărului 576 de a figura în toate primele 5 grupe şi adică 576 se descompune în produse de 2, 3, 4 şi 5 factori aşa ca la el şi la factori toate cifrele sunt diferite.

Avem în adevăr:

$$576 = 18 \times 32 = 3 \times 8 \times 24 = 1 \times 3 \times 8 \times 24 = 1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 9.$$

G-L GH. BUICLIU.

5. *O teoremă asupra sumei numerelor prime cu un număr dat şi mai mici ca el.*

In cele ce urmează îmi propun să arat că:

„Unei sume de numere prime cu un număr dat şi inferioare lui îi corespunde numai un singur număr".

In adevăr, pentru ca să avem $\sigma(A) = \sigma(B)$ ar trebui să avem: $A \cdot \varphi(A) = B \cdot \varphi(B)$ sau: $\varphi(A^2) = \varphi(B^2)$. Prin urmare ar trebui ca indicatorii patratelor lor să fie egali.

Dacă a_i şi b_i sunt factori primi respectivi ai numerelor A şi B, ar trebui atunci să avem:

$$A^2 . \pi b_i . \pi (a_i - 1) = B^2 . \pi a_i . \pi (b_i - 1).$$

Dacă admitem apoi că b_m este cel mai mare factor a lui B, care nu se găseşte printre factorii $(a_i - 1)$, atunci în membrul întâi îl găsim la puterea mn, pe când în membrul al doilea îl găsim cel puţin la puterea a 2-a în B^2, deci nu este posibil.

Dacă admitem însă că numerele au aceiaşi factori primi, dar la puteri diferite, atunci nu mai avem $A^2 = B^2$, deci nici în acest caz nu se poate.

COMANDOR I. LINTEŞ.

6. *O curbă ataşată unui triunghiu.* In *Cours de Géométrie Analitique* de B. NIEWENGLOWSKI, t. II, p. 147, se propune problema: Să se găsească înfăşurătoarea axelor parabolelor înscrise unui triunghiu. In cele ce urmează vom demonstra că:

Axele parabolelor înscrise într'un triunghiu înfăşoară o ipocicloidă cu trei puncte de întoarcere, tritangentă cercului

circumscris triunghiului în trei puncte ce sunt diametralele vârfurilor triunghiului circumpedal al centrului isodinamic intern. Mă voi folosi de axele de cordonate definite de D-l ST. S. MIHĂIESCU în G. M., Anul XLVIII, pag. 374.

Fie ABC un triunghiu înscris în cercul (O) de rază R, A' diametralul lui A, iar A_1 punctul în care bisectoarea interioară a unghiului A taie cercul (O). Iau pe arcul mic A_1 A' punctul L astfel încât unghiul $LAA_1 = \frac{1}{3} A'AA_1$. Deci

$$\sphericalangle LAB = \frac{3A + B - C}{6} \quad , \quad \sphericalangle LAC = \frac{3A - B + C}{6}.$$

Punctele M şi N fiind analoagele lui L, se arată că dreptele AL, BM, CN, concură în punctul W de coordonate unghiulare $A + 60^0$, $B + 60^0$, $C + 60^0$, adică în centrul isodinamic intern.

Fie L', M', N' diametralele punctelor L, M, N. Iau ca axe de coordonate diametrul LL' şi diametrul perpendicular pe acesta astfel încât, L (— R, O), L' (R, O).

In acest caz D-l ŞT. S. MIHĂIESCU a găsit că dreapta lui SIMSON a punctului P ($R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$) este paralelă cu dreapta

$$x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2} = 0. \qquad (1)$$

Deci axa parabolei înscrise în triunghiul ABC şi având focarul în P este

$$y - R\sin\varphi = \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} (x - R\cos\varphi) \qquad (2)$$

$$x \cos \frac{\varphi}{2} - y \sin \frac{\varphi}{2} - R \cos \frac{3\varphi}{2} = 0 \qquad (3)$$

Identificând această ecuaţie cu $ux + vy + w = 0$, şi eliminând pe φ, obţinem ecuaţia tangenţială a înfăşurătoarei căutate

$$w(u^2 + v^2) + Ru(u^2 - 3v^2) = 0.$$

Este o cubică tangentă dreptei dela infinit în punctele ciclice, înfăşurătoarea este deci o ipocicloidă cu trei puncte de întoarcere (B. NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géométrie Analitique*, t. II, p. 145).

Pentru a găsi punctele de întoarcere eliminăm pe φ între ecuaţia (3) şi

$$-x \sin\frac{\varphi}{2} - y\cos\frac{\varphi}{2} + 3R\sin\frac{3\varphi}{2} = 0,$$

sau rezolvăm sistemul, şi găsim ecuaţiile parametrice ale acestei ipocicloide

$$x = 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi + R \quad , \quad y = 8R\sin\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}.$$

Notând $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$, ecuaţiile parametrice devin

$$x = R\frac{-3t^4 + 6t^2 + 1}{(1+t^2)^2} \quad , \quad y = \frac{8Rt}{(1+t^2)^2}.$$

Găsim că punctele de întoarcere sunt:

$$Q\,(-3R, 0),\ R\left(\frac{3R}{2}, -\frac{3R\sqrt{3}}{2}\right) \quad , \quad S\left(\frac{3R}{2}, \frac{3R\sqrt{3}}{2}\right),$$

iar punctele în care ipocicloida este tangentă arcului (O) sunt:

$$L'\,(R, O) \quad , \quad M'\left(-\frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) \quad , \quad N'\left(-\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right).$$

Considerând punctul P în vârfurile triunghiului ABC, vedem că ipocicloida de mai sus este tangentă laturilor triunghiului anticomplementar lui ABC.

Se poate observa apoi că *ipocicloida ce înfăşoară axele parabolelor înscrise într'un triunghiu este transformată prin puncte anticomplementare a ipocicloidei lui* STEINER *ce înfăşoară dreptele lui* SIMSON *relative la acelaşi triunghiu.*

D-l I. C. VASILIU a găsit în G. M., Anul XLVIII, pag. 204 că ecuaţia tangenţială a ipocicloidei lui STEINER în coordonata baricentrice este $\Sigma\, a^2(q+r)(p-q)(r-p) = 0$. Ţinând seamă de cele spuse înainte, rezultă că ecuaţia tangenţială în coordonate baricentice a ipocicloidei ce înfăşoară axele parabolelor înscrise în triunghiul de referinţă este

$$\Sigma\, a^2 p\,(p-q)\,(r-p) = 0.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROPUSE LA UNIVERSITATEA DIN IAŞI

Sesiunea Octombrie 1942

Algebră superioară. I. Să se discute sistemul:

$$ax + by = \alpha \qquad ay + bz = \beta \qquad az + bt = \gamma \qquad at + bx = \delta$$

în care α, β, γ, δ, sunt parametri reali variabili. Să se rezolve sistemul în cazul când are soluţii. Să se scrie una dintre formele patratice în x, y, z, t care să aibă ca derivate parţiale funcţiunile lineare omogene date şi să se transforme în sumă de patrate.

II. Să se stabilească pentru care valori ale parametrului real a, ecuaţia

$$x^6 - 6x^2 + 4x + 3a = 0$$

are zero, sau două sau patru rădăcini reale.

Matematici generale. I. 1. Să se determine curbele plane pentru care raportul dintre ordonata la origine a tangentei şi abscisa în origine a normalei e constant.

Scriind ecuaţia acestor curbe în coordonate polare să se calculeze aria buclei când unghiul polar variază dela 0 la π.

2. Să se determine extremele funcţiunii

$$z = \cos x \,.\, \cos\alpha + \sin x \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos y$$

unde α e o constantă.

II. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale

$$\frac{d^5y}{dx^5} + 2\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} = 2\sin x + 2\cos x$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

şi să se găsească soluţiile comune.

Geometria proiectivă şi diferenţială. I. Se consideră suprafaţa

$$z = y \,.\, \sin x.$$

1. Să se găsească liniile asimptotice.

2. Să se considere asimptotica curbilinie a suprafeţei care trece printr'un punct al axei Oy. Să să determine centrul de curbură, raza de curbură şi axa de curbură în acest punct al axei.

II. Despre omografii.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politechnice din România. An. LVII, Nr. 5, Mai 1943. D. GERMANI: † GR. ZAMFIRESCU. AD. STAMBULEANU: Studiul termodinamic al timpului admisiei la motorul termic în 4 timpi. N. TILIBAŞA: Contribuţiuni la stabilirea câtorva principii şi metode de conducere pentru autobuse şi autovehicule grele. N. ONEA şi AL. RĂICULEANU: Incercarea pe şantier a unui tub de beton armat centrifugat $\theta = 1{,}20$ m.

Mathematica. Vol. XIX, 1943, Timişoara. Omagiu D-lui DIMITRIE POMPEIU. Sur les rapports entre les dérivées et les différences divisées, par PAUL MONTEL. D. POMPEIU, par O. ONICESCU. Sur la relation entre les quadriques de MOUTARD et les sections d'une surface par des plans menés par une droite passant par un point de la surface, par N. ABRAMESCU. Sur deux systèmes d'équations fonctionnelles, par TH. ANGHELUTZA. Sur deux équations fonctionnelles, par V. ALACI. Résolution d'un problème de M. ZARANKIEWICZ pour une famille d'ensembles parfaits, par SOPHIIE PICCARD. Vorläufige Bestimmung der geographischen Länge der Universitäts-Sternwarte zu Cluj-Timişoara, von IOAN ARMEANCA. Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique de degré n et l'équation dérivée de degré $(n-2)$, par J. SOULA. Medida de angulos infinitesimales, par EDUARDO A. GAVLEZ LAGUARTA. Essai sur la théorie mathématique des sensations de couleur, par PIOTR SZYMANSKI. Sur les courbes de TZITZÉICA, par GH. TH. GHEORGHIU. Sur l'écoulement fluide produit, par la rotation d'un biplan „en tandem" autour d'un axe situé dans son propre plan, par CAIUS JACOB. Topologie fonctionnelle, par C. POPOVICI. Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de RIEMANN a sa frontière de mesure harmonique nulle, par S. STOILOV. Singularités des fonctions analytiques uniformes et polynomes de TCHEBICHEF, par G. CĂLUGĂREANU. Sur une équation fonctionnelle qui caractérise les polynomes, par M. GHERMĂNESCU. Quelques applications de certaines équations fonctionnelles, par D. V. IONESCU.

Mathesis. Tome LIV. Anii 940—41—42—43. Nr. 10. R. DEAUX: Sur l'involution quadratique. R. GOORMAGHTIGH: Extension au polygone inscriptible du théorème sur l'enveloppe des droites de GAUSS. H. BALLIEU: Sur les suites périodiques. R. DEAUX: Sur quelques homographies binaires. V. THÉBAULT: Première partie d'un supplément offert à *Mathesis*.

Revista Matematică din Timişoara. An. XXIII, Nr. 7, Sept. 1943. M. GHERMĂNESCU: Asupra metodei părţilor proporţionale. E. VIŞA: Asupra unor însumări. Note matematice, bibliografie, probleme rezolvate şi propuse.

România Aeriană. An. XVII, Nr. 8, August 1943. G-L C. PANTAZI: Aviaţia de transport. AND. POPOVICI: ING. I. LASCU. D. GERMANI: ING GR. ZAMFIRESCU. H. G. AUGUST: File rupte din istoricul aviaţiei româneşti. L. I. POPESCU: Inventatorul T. BRUMĂRESCU. M. PĂTRU: Un memorabil capitol din istoricul zborului fără motor în România. I. BĂLEANU: Jertfa voluntară. N. BOGDAN: Câteva cuvinte despre TR. VUIA.

Seminarul matematic al Universităţii din Cluj. Monografii matematice. Fascicola IX. Procesele-verbale ale şedinţelor Cercului Matematic al Societăţii de ştiinţe din Cluj, în refugiu la Timişoara, 1941—1943. Publicate de P. SERGESCU. Timişoara 1943.

OTTO BEHR: Die vollkommene deutsche Kreiszahl und die Quadratur des Kreises. 1939, Bremen.

I. LINTEŞ: Génie militaire. Notes sur quelques questions techniques de bouches à feu. (Ext. din Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Roumanie).

C-DOR ING. I. LINTEŞ: Notes sur quelques questions techniques concernant les bouches à feu. (Ext. din Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara).

CPT. C-DOR GR. ZAPAN: Probleme rezolvate de matematici.

CERERI

323. In unele cărţi matematice, ca de exemplu în *Algèbre financière* de TH. KLOMPERS, se găsesc tipărite tabele numerice în care cifra *trei* este făcută când 3, când ɜ. Eu am confundat deseori pe ɜ cu 5 încât nu văd raţiunea pentru care tipografii susţin, în aceleaşi tabele şi în acelaşi număr chiar, ambele semne. Este vreun motiv care menţine această dublă întrebuinţare la tipărirea tabelelor numerice? Ce norme se urmează de tipografi în acest scop?

I. IONESCU

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică"

In şedinţa de Joi 7 Oct. 1943 a Societăţei *Gazeta Matematică* s'a hotărât ca şedinţele lunare să se ţină Lunea în loc de Joia. Prima şedinţă va avea loc Luni 25 Oct. 1943.

b) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

HOËNE WRONSKI. Loi téléologique du hasard. Paris 1890.

FERDINAND RUDIO. Vorwort zur Gesamtausgabe der Werke von LEONARD EULER. Lipsca 1911.

GH. BURICEL-TECUCI (Compozitor de Muzică). Marş, dedicat cu ocazia banchetului dat de Soc. „Gazeta Matematică" Onor. D-lui Inginer I. IONESCU. 7 Noembrie 1924.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

DR. I. FÖLSING. Rechenbuch für die Preuszischen Gimnasien. Berlin 1858.

Donată de D-na MARIA D. LAMBRU.

S. SCHOTLAU & W. LIETZMAN. Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgathungen. Begründet 1869 von I. C. V. HOFFMANN. Heft 4—192.

Donat de D-l C-DOR I. LINTEŞ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1412. *Să se construiască curba* $\mathcal{M}$ *pentru porţiunea* E'BCFGHE' *din fig. 11 dela pag. 225 Vol. XIV.*

I. IONESCU.

Problema este pusă ca aplicaţie la articolul D-lui I. IONESCU, *„Asupra momentelor statice absolute"* din vol. XIV al *„Gazetei Matematice"* şi revine la a găsi curba $\mathcal{M}$, înfăşurătoarea *axelor de echivalenţă* a figurii E'BCFGHE', compusă din dreptunghiurile E'BCE şi EFGH care au bazele egale cu respectiv de 3 ori şi de 5 ori înălţimea, înălţimile egale, înălţimea E'E a primului e în prelungire cu baza EH a celui de-al doilea, iar înălţimea EF a celui de-al doilea se aşterne peste baza EC a celui dintâi. Figura aceea este figura 1 dela prezenta soluţie.

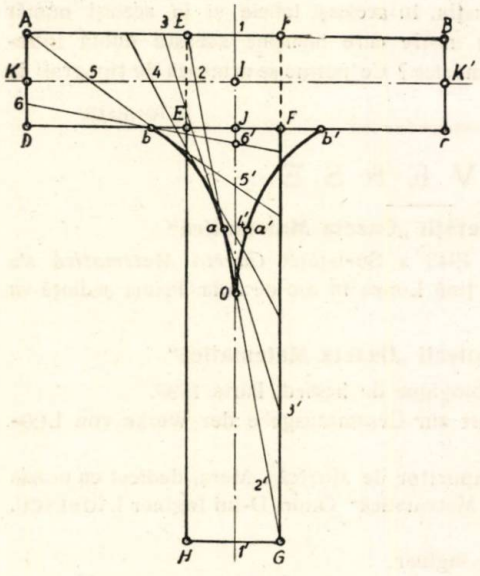


Fig. 1.

Fie a înălţimea comună celor două dreptunghiuri, suprafeţele lor vor fi $3a^2$ şi $5a^2$; deci suprafaţa totală a figurii va fi $8a^2$; o axă de echivalenţă va lăsa de o parte a ei o suprafaţă din figură egală cu $4a^2$.

I. Să considerăm axa de echivalenţă ce trece prin E', fig. 2 de la pagina 90. Ea nu poate tăia pe FC, căci în acest caz suprafaţa ce o desparte sub ea este mai mare decât aria EFGH $= 5a^2$, deci nu poate fi $4a^2$. De asemeni nu poate tăia pe GH căci aria lăsată la stânga ar fi mai mică decât aria EHG $= \frac{1}{2} \times 6a \times a = 3a^2$.

Rezultă că axa va tăia pe FG într'un punct e'. Fie J'J linia mediană

a dreptunghiului EFGH paralelă la baze şi O_1 intersecţia ei cu axa de echivalenţă. Va trebui să avem: aria trapezului $HE'e'G = 4a^2$ deci

$$\overline{O_1J} \times \overline{HG} = 4a^2 \quad \therefore \quad \overline{O_1J} = 4a.$$

O_1 se găseşte aşa dar pe linia J'J la distanţă $4a$ de HG.

Orice axă de echivalenţă care taie numai pe E'H şi FG trece prin O_1.

In adevăr fie o asemenea axă 11' şi ω intersecţia ei cu JJ'.

aria $H1'1'G = 4a^2 \quad \therefore \quad \overline{HG} \times \overline{\omega J} = 4a^2 \quad \therefore \quad \overline{\omega J} = 4a \quad \therefore \quad \omega \equiv O_1$.

Axa de echivalenţă care trece prin C trece şi ea prin O_1, căci raţionamentul persistă în acest caz.

In general, orice dreaptă trecând prin O_1 cuprinsă între O_1C şi O_1e', este o axă de echivalenţă.

II. Să ducem acum axa de echivalenţă ce trece prin G. Ea nu poate tăia pe E'H, căci în acest caz aria lăsată la stânga e inferioară ariei E'GH, deci inferioară lui $3a^2$ şi „a fortiori" lui $4a^2$. Cum aria $E'F'GH = 6a^2 > 4a^2$, această axă va tăia pe EB între E' şi F' în punctul g'.

Fie KK' paralela dusă la E'B prin mijlocul lui E'H şi O_2 intersecţia acesteia cu Gg'. Va trebui să avem:

aria $E'g'GH = 4a^2 \quad \therefore \quad \overline{E'H} + \overline{KO_2} = 4a^2 \quad \therefore \quad Ga \times \overline{KO^2} = 4a^2$

$$\therefore \quad \overline{KO_2} = \frac{2}{3}a.$$

Raţionamentul persistă pentru orice axă de echivalenţă care taie dreptele E'B şi HG, păstrându-se în interiorul suprafeţei, pe toată lungimea ei. Fie f_1Ff axa de echivalenţă trecând prin F. Cele spuse mai sus se aplică; deci această axă trece şi ea prin O_2, căci $KO_2 = \text{const.}$

Rezultă că orice dreaptă trecând prin O_2 şi în interiorul unghiului GO_2f este o axă de echivalenţă.

Punctele O_1 şi O_2 din această problemă nu sunt centre de simetrie evidente pentru nicio porţiune a figurii. Ele sunt *centre parţiale de simetrie*[1]) şi le voi numi *centre de echivalenţă*. Aşa

1) Pentru definiţia *centrului de simetrie parţial* a se vedea „Gazeta Matematică", Vol. XIV, pag. 225, articolul *Momente statice absolute* de D-l I. IONESCU.

dar figura are *două centre de echivalență* O_1 *și* O_2, prin care trec o înfinitate de axe de echivalență.

III. Să cercetăm acum porțiunea de curbă $\mathcal{M}$ pentru direcțiunile axelor cuprinse între O_1E și O_2g'.

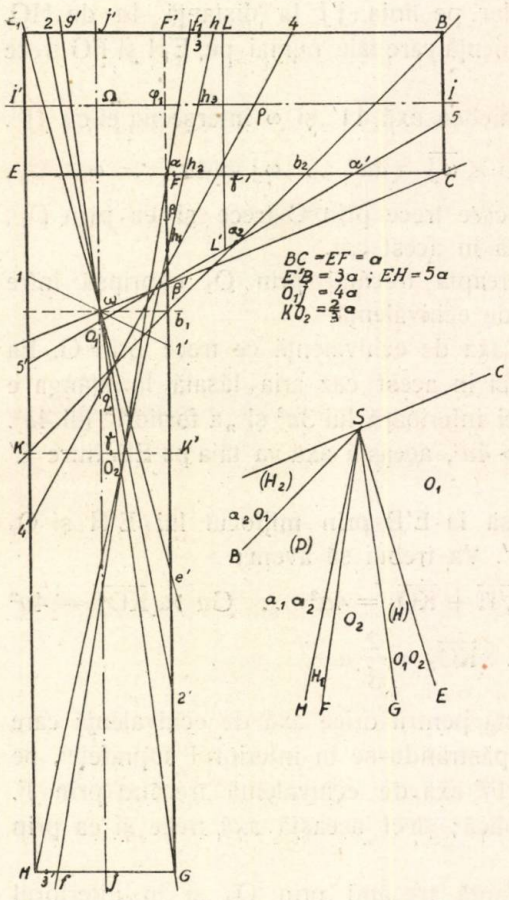


Fig. 2.

Voi stabili mai întâi că toate aceste axe taie pe E'B între E' și g' și pe FG între e' și G. Dacă 22' e o asemenea axă, se pot prezenta următoarele cazuri:

1°. 2 pe E'H, 2' pe HG. In acest caz aria din stânga e inferioară ariei EHG = $3a^2$ deci inferioară lui $4a^2$.

2°. 2 pe E'H, 2' pe FG. Acesta e cazul deja studiat care ne spune că 22' trece prin O_1 ceea ce e imposibil, căci O_1 2 nu ar fi cuprinsă în unghiul (O_1E, O_2g').

3°. 2 pe $g'F'$; 2' pe HG. Cădem în al doilea caz studiat; 22' ar trebui să treacă prin O_2 deci ar fi înafara unghiului (O_1E, O_2g') imposibil prin ipoteză.

4°. 2 pe $g'F'$; 2' pe FG. In acest caz aria E'22'GH > aria E'gGH deci prima e mai mare decât $4a^2$.

5°. 2 pe Eg, 2' pe Fe'. Aria din dreapta lui 22' este:

$$S = \text{aria } F'BCF + \text{aria } 2F'2' = 2a^2 + \text{aria } 2F'2'.$$

Dar aria 2F'2' < aria FF'e' ∴ aria 2F'2' < $2a^2$.

Rezultă că S < $4a^2$ deci nici acest caz nu e posibil.

Rămâne singurul caz: 2 pe E'g'; 2' pe e'G,

In acest caz va trebui să avem:

aria $2BCF2' = 4a^2$ $\therefore$ aria $2F'2' +$ aria $FBCF = 4a^2$

$\therefore$ aria $2F'2' = 2a^2$ $\therefore$ $\overline{F'2}\ \overline{F'2'} = 4a^2$.

Ori se ştie, că în acest caz $22'$ înfăşoară o iperbolă echilateră având pe $F'E$ şi $F'G$ ca asimptote.

Pentru a o construi, să notăm $\overline{F'2} = m$. Avem $\overline{F'2'} = 4a^2/m$. Ecuaţia dreptei $22'$ este:

$$x/m = y/(4a^2/m) - 1 = 0$$

sau

(1) $\quad m^2y - 4ma^2 + 4a^2x = 0$ (axele fiind $\overrightarrow{F'E'}$ şi $\overrightarrow{FG}$)

care derivată în raport cu m dă

(1') $\quad 2my - 4a^2 = 0$

şi eliminând pe m între (1) şi (1'):

$$xy - a^2 = 0. \quad \text{(H)},$$

In sistemul de coordonate ales O_1 şi O_2 au cordonatele $O_1(-a/2, 2a)$; $O_2(-a/3, 3a)$. deci iperbola (H) trece prin O_1 şi O_2. Ele sunt tocmai extremităţile segmentului de iperbolă care face parte din curba $\mathcal{M}$. Dreptele $E'e'$ şi Gg' fiind cazuri limită ale lui $22'$, ele sunt tangente la (H) în mijlocul lor, respectiv O_1, O_2.

IV. Fie acum Hh_1h_2h axa de echivalenţă trecând prin H, unde

$h_1 \equiv (Hh,\ FG)$ $\quad h_2 \equiv (Hh,\ FC)$ $\quad h \equiv (Hh_1h_2,\ EB)$.

Orice axă de echivalenţă având înclinarea între Hh şi Ff, va întâlni pe HG între H şi f, iar pe $E'B$ între F' şi h.

In adevăr, o asemenea axă tăind pe HG la stânga lui H detaşază spre stânga o arie inferioară celei detaşate de Hh, adică lui $4a^2$ iar o axă tăind pe HG la dreapta lui f detaşază spre dreapta o arie inferioară celei detaşate de Ff adică de asemeni lui $4a^2$. Deci aceste axe vor tăia pe HG între H şi f_1 şi ţinând seamă de înclinarea lor, ele vor tăia pe $E'B$ între f_1 şi h.

Să căutăm înfăşurătoarea acestor axe de echivalenţă. Fie $33'$ o asemenea axă şi α, β intersecţiile ei cu FC, FG iar γ intersecţia cu KK'. Conform definiţiei avem:

aria $E3\alpha F\beta3' = 4a^2$ $\therefore$ aria $E'33'H -$ aria $F\alpha\beta = 4a^2$

$$\therefore \overline{E'H} \times \overline{K\gamma} - \frac{1}{2} \cdot \overline{F\alpha} \times \overline{F\beta} = 4a^2 \quad \therefore \quad 6a \cdot \overline{K\gamma} - \frac{1}{2} \overline{F\alpha} \cdot \overline{F\beta} = 4a^2.$$

Să notăm $\overline{F\alpha} = x$, $\overline{F\beta} = y$. Axa este bine determinată prin cantităţile x şi y.

Insă $\Delta\gamma K'\beta \sim \Delta\beta F\alpha \quad \therefore \quad \gamma K'/K'\beta = x/y \quad \therefore \quad \gamma K'/(2a - y) = x/y$

$$\therefore \quad \gamma K' = \frac{(2a - y)}{y} x. \text{ Dar } K\gamma = a - K\gamma' = a - \frac{2a - y}{y} x$$

aşa că avem:

$$6a\left(a - \frac{2a - y}{y}\right)x - \frac{1}{2}xy = 4a^2 \quad \therefore \quad 2a^2 - 6ax \cdot \frac{2a - y}{y} - \frac{1}{2}xy = 0$$

$$\therefore \quad x\,[y^2 + 12a\,(2a - y)] = 4a^2y \quad x = \frac{4a^2y}{y^2 - 12ay + 24a^2} \quad (u)$$

Luând acum pe FC şi FG ca axe de coordonate, ecuaţia axei de echivalenţă va fi $\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} - 1 = 0$ unde avem între x şi y relaţiunea (u).

Va trebui să căutăm acum înfăşurătoarea dreptei $\alpha\beta$. Punând $y = m$, ecuaţia dreptei devine:

$$x\,(m^2 - 12am + 24a^2) + 4a^2y - 4a^2m = 0 \qquad (2)$$

şi derivând în raport cu m:

$$2mx - 4a\,(3x + a) = 0\,. \qquad (2')$$

Eliminând pe m între (2) şi (2'), vom găsi înfăşurătoarea căutată. Observăm că (2) se mai scrie:

$$m^2x + 4a^2\,(6x + y) - 4am\,(3x + a) = 0$$

şi înlocuind pe $4a\,(3x + a)$ cu valoarea lui din (2'):

$$m^2x - 2mx \cdot m + 4a^2\,(6x + y) = 0 \quad \therefore \quad 4a^2\,(6x + y) = m^2x.$$

Inlocuind pe m cu valoarea din (2') găsim:

$$4a^2\,(6x + y) = 4a^2\,(3x + a)^2/x \quad \therefore \quad x\,(6x + y) = (3x + a)^2$$

$$\therefore \quad 3x^2 - xy + 6ax + a^2 = 0 \quad (H_1).$$

Deci pentru direcţiile indicate, axele înfăşoară un segment din iperbola (H_1). Ea va fi tangentă în extremităţile acestui segment axelor Ff şi Hh.

Observăm cu uşurinţă că ea trece prin $O_2\left(-\frac{a}{3}, 2a\right)$; deci O_2 limitează segmentul într'una din extremităţi şi tangenta în O_2 este Ff, ea fiind un caz limită al acestor axe.

Extremitatea cealaltă a segmentului de iperbolă va fi punctul a_1, tangenţa axei Hh cu (H_1), Hh fiind şi ea un caz limită al axelor studiate la acest punct.

Să căutăm coordonatele lui a_1.

Pentru aceasta observăm că înafară de relaţiunea (u) între x şi y, mai avem din asemănarea triunghiurilor HGh_1 şi h_1Fh_2:

$$a/(5a-y) = x/y \quad \therefore \quad x = \frac{ay}{5a-y},$$

pe care înlocuindu-l în (u), găsim $y = 0$ care nu e posibilă căci

$$y > 0 \text{ şi } y^2 - 12ay + 24a^2 = 4a(5a-y) \quad \therefore \quad y^2 - 8ay + 4a^2 = 0$$

$$\therefore \quad y = 2a\left(2 \pm \sqrt{3}\right).$$

Insă se poate arăta cu uşurinţă că $Fh_1 < FG$, $Fh_1 < 5a$ (e de altfel evident şi din cercetarea simplă a figurii), deci semnul $+$ înaintea radicalului nu convine, aşa că y sau $m = 2a\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

Să căutăm abscisa intersecţiei dreptei (2) cu (H_1).

Din (2) se deduce:

$$6x + y = -\frac{m^2x - 4am(3x+a)}{4a^2},$$

iar din $(H_1): (6x+y)x = (3x+a)^2$ şi înlocuind pe $(6x+y)$:

$$(3x+a)^2 = -\frac{x}{4a^2}\left[m^2x - 4am(3x+a)\right]$$

$$\therefore \quad (3x+a)^2 + \frac{mx}{a}(3x+a) + \frac{m^2x^2}{4a'} = 0, \left(3x + a + \frac{mx}{2a}\right)^2 = 0$$

deci abscisele sunt confundate, ceea ce era de aşteptat, şi anume

$$x = \frac{2a^2}{m - 6a}.$$

Inlocuind pe m găsim:

$$x = \frac{2a^2}{2\,(2-\sqrt{3})\,a - 6a} = -\frac{a}{\sqrt{2}+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,a$$

dar din (H_1) deducem şi

$$y = \frac{13-5\sqrt{3}}{2}\,a$$

aşa încât în sistemul de axe $\vec{FC}$, $\vec{FG}$, avem:

$$a_1\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\,a,\ \frac{13-5\sqrt{3}}{2}\,a\right)$$

Am găsit aşa dar că pentru direcţii cuprinse între Ff şi Hh că curba $\mathcal{M}$ este segmentul din iperbola (H_1) limitat între O_2 şi O_1.

V. Fie axa Bb_2b_1b trecând prin B (b_2 pe FC b_1 pe FG_1, b pe E'H). Ea taie evident pe FC, căci altfel detaşază dedesubt o arie mai mare decât $4a^2$ (n'avem decât s'o comparăm cu aria de sub axa orizontală de echivalenţă trecând prin O). Tăind pe FC, va tăia şi pe FG, altfel detaşează la dreapta o arie inferioară ariei F'BCF $= 2a^2$.

Ea taie şi pe E'H, căci altfel ar tăia pe HG, dar în acest caz aria dela dreapta e inferioară celei lăsate la dreapta de axa Hh. Axa de echivalenţă trecând prin B, zic că este BK. In adevăr

$$E'B = E'K = 3a \quad \therefore \quad Fb_2 = Fb_1$$

şi se poate vedea cu uşurinţă că $Fb_2 = Fb_1 = a_1$ din asemănare de triunghiuri dreptunghice isoscele

$$(\Delta Fb_1b_2 \sim \Delta Bb_2c,\ BC = a \ldots).$$

Atunci aria dela stânga dreptei BK, va fi

$$\text{aria } E'KB - \text{aria } Fb_1b_2 = \frac{3a \,.\, 3a}{2} - \frac{a \,.\, a}{2} = 4a^2.$$

Să mai notăm cu a_2 mijlocul lui b_1b_2.

O axă de ecihvalenţă 44' înclinată între axele Hh şi BK, va avea neapărat extremităţile 4 şi 4' pe E'B între h şi B şi pe E'H între K şi H căci altfel ar detaşa la dreapta sau la stânga ariei inferioare celor detaşate de cele două axe trecând prin H şi B.

Fie p şi q intersecţiile ei cu dreptele mediane I'I şi J'J. $\Omega \equiv (I'I, J'J)$ 44' fiind axă de echivalenţă avem (pentru aria dela dreapta axei formată din două trapeze):

$$\overline{pI} \times \overline{BC} + \overline{qI} \times \overline{HG} = 4a^2 \quad \therefore \quad a \cdot \overline{pI} + a \cdot \overline{qJ} = 4a^2$$

$$\therefore \quad \overline{pI} + \overline{qJ} = 4a.$$

Insă:

$$\overline{pI} = \overline{I'I} - \overline{I'\Omega} - \overline{\Omega\beta} = 3a - \frac{a}{2} - \overline{\Omega p}$$

$$\overline{pJ} = \overline{JJ'} - \overline{J'\Omega} - \overline{\Omega q} = 6a - \frac{a}{2} - \overline{\Omega q}$$

deci $$\overline{pI} + \overline{qJ} = 8a - \overline{\Omega p} - \overline{\Omega q}.$$

aşa că avem:

$$8a - \overline{\Omega p} - \overline{\Omega q} = 4a \quad \therefore \quad \overline{\Omega p} + \overline{\Omega q} = 4a.$$

Ori, înfăşurătoarea lui 44' se ştie că în acest caz e o parabolă. In adevăr; notând $\Omega p = m$, şi luând ca axe de coordonate $\overrightarrow{\Omega I}$, $\overrightarrow{\Omega I}$, ecuaţia lui 44' va fi:

$$(x/m) + y/(4a - m) - 1 = 0 \quad \therefore \quad (4a - m)x + my + m^2 - 4am = 0$$

care derivată în m dă:

$$2m - (x - y + 4a) = 0.$$

Pentru a elimina pe m scriem dreapta sub forma:

$$4ax - m(x - y + 4a) + m^2 = 0$$

şi înlocuind pe m:

$$4ax - \frac{1}{4}(x - y + 4a)^2 = 0 \quad \therefore \quad (x - y + 4a)^2 = 16ax \quad (P)$$

în care se recunoaşte uşor o parabolă.

Se poate verifica uşor că această parabolă trece prin a_1 ale cărui coordonate în noul sistem de axe sunt:

$$a_1 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2} a, \frac{14 - 5\sqrt{3}}{2} a \right)$$

şi de asemeni prin a_2 (a, a). Axele de echivalenţă Hh şi Bk sunt tangentele in a_1 şi a_2 la (P); deci vom considera numai segmentul de parabolă (P) cuprins între a_1 şi a_2, care reprezintă cazuri limită.

VI. Să considerăm axele de echivalență 55′ înclinate între BK și O_1C. Ele taie pe BC și pe E′H. Studiul curbei $\mathcal{M}$ este asemănător cazului IV deja studiat.

Fie LL′ mediatoarea lui E′B limitată la E′B și 55′ și

$$\gamma' \equiv (LL', FC)\ ,\ \alpha' \equiv (55', FC)\quad \beta' \equiv (55', FG)$$

aria $E'B5\alpha'F\beta'5' = 4a^2$ ∴ aria $E'B55'$ — aria $F\alpha'\beta' = 4a^2$

$$\therefore\ \overline{E'B}\,.\,\overline{LL'} - \frac{1}{2}\,.\,\overline{F\alpha'}\,.\,\overline{F\beta'} = 4a^2$$

$$\therefore\ 3a\,.\,\overline{LL'} - \frac{1}{2}\,m\,.\,n = 4a^2 \qquad (3)$$

unde am notat $m = \overline{F\alpha'}$, $a = F\beta'$.

Dar $\Delta F\alpha'\beta' \sim \Delta\,\gamma'L'\beta'$ deci $(n/m) = \overline{\gamma'L'}/\overline{\gamma'\alpha'}$

$$\therefore\ \gamma'L' = \frac{n}{m}\,.\,\overline{\gamma'\alpha'} = \frac{n}{m}\left(m - \frac{a}{2}\right) = \frac{n\,(2m - a)}{2m}.$$

Insă

$$\overline{LL'} = \overline{L\gamma'} + \overline{\gamma'L'} = a + \frac{n\,(2m - a)}{2m}$$

așa că (3) devine:

$$3a\left[a + \frac{n\,(2m - a)}{2m}\right] - \frac{mn}{2} = 4a^2\ \ \therefore\ \ 3an\,(2m - a) - m^2n = 2a^2m$$

$$n = \frac{2a^2m}{-m^2 + 6am - 3a^2}$$

așa încât într'un sistem de axe $\vec{FC}$, $\vec{FG}$, ecuația lui 55′ va fi (m fiind un parametru):

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{\dfrac{2a^2m}{-m^2 + 6am - 3a^2}} - 1 = 0$$

$$\therefore\ 2a^2x + y\,(-m^2 + 6am - 3a^2) - 2a^2m = 0$$

sau în sfârșit:

$$(4)\qquad a^2\,(2x - 3y) + 2am\,(3y - a) - m^2y = 0.$$

Derivând în raport cu m, obţinem

$$a\,(3y - a) - my = 0 \qquad (4')$$

şi eliminând pe m între (4) şi (4'):

$$a^2\,(2x - 3y) + 2a^2\,(3y - a)^2/y - a^2\,(3y - a)^2/y = 0$$

$$\therefore\ (2x - 3y) + a^2\,(3y - a)^2/y = 0 \quad \therefore\ (3y - a)^2 + y\,(2x - 3y) = 0$$

$$2xy + 6y^2 - 6ay + a^2 = 0 \quad (H_2)$$

în care se recunoaşte iperbolă (H_2), trecând prin punctele

$$a_2\left(\frac{a}{2}\,,\ \frac{a}{2}\right) \text{ şi } O_1\left(-\frac{a}{2}\,,\ a\right)$$

(în sistemul de coordonate $\vec{FC}$, $\vec{FG}$).

Tangentele în O_1 şi O_2 sunt tocmai axele de echivalenţă limită BK şi CO_1, deci din curba $\mathcal{M}$ face parte numai segmentul de iperbolă cuprins între O_1 şi O_2.

In rezumat, am găsit aşa dar că $\mathcal{M}$ se compune din:

1°. Punctul O_1 pentru direcţiuni cuprinse între axele trecând prin C şi E'.

2°. Segmentul de iperbolă (H) O_1O_2 pentru direcţiuni între axele trecând prin E' şi G.

3°. Punctul O_2 pentru direcţiuni cuprinse între axele trecând prin G şi F.

4°. Segmentul de iperbolă O_2a_1, pentru direcţiuni cuprinse între axele trecând prin F şi H.

5°. Segmentul de iperbolă (P): a_1a_2 pentru direcţiuni între axele trecând prin H şi B.

6°. Segmentul de iperbolă (H_2): a_2O_1 pentru direcţiuni între axele trecând prin B şi C.

Ducând printr'un punct S paralele la axele ce trec prin vârfurile figurii, putem găsi cu uşurinţă la ce segment anume al curbei e tangentă o axă de echivalenţă de direcţie dată, ducând prin S o paralelă la acea direcţie, şi observând în ce unghiu este cuprinsă acea paralelă.

Curba $\mathcal{M}$ admite tangente la orice direcţii înafară de cele pentru care axele trec prin O_1 şi O_2. Toate punctele curbei $\mathcal{M}$ sunt simple afară de O_1 şi O_2.

In O_1 admite două tangente (axele prin C şi E) şi de asemeni în O_2 (axele prin G şi F).

In a_1 şi a_2 admite câte o singură tangentă (respectiv axele prin H şi B), racordarea făcându-se în „răspăr". Tot aşa se racordează în O_1.

Numai în O_2 racordarea se face în prelungire. Construcţia curbei se face cu uşurinţă construind segmentele de parabolă şi iperbolă componente.

NIC. ŞTEFĂNESCU
Bucureşti.

PROBLEMA 3965. *In piramida triunghiulară* OABC, *muchiile* OA, OB, OC *sunt perpendiculare două câte două. Presupunând că se dau lungimile* OA = *a*, OB = *b*, OC = *c*, *să se găsească aria triunghiului* ABC *precum şi depărtarea dela vârful* O *la faţa* ABC.

G. ŢIŢEICA.

Soluţie, dată de D-l EM. I. MAREŞ.

Fie CD perpendiculara din C pe AB şi OE = *d* perpendiculara din O pe planul ABC. Se ştie că OD este perpendiculară pe AB şi că E se află pe CD. Notând cu S suprafaţa triunghiului ABC şi observând că

$$AB \cdot OD = OA \cdot OB = 2\,\text{Sup. } AOB$$

se găseşte imediat

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AB}\sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2}}{2} = \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{\overline{OC}^2 + \frac{\overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2}{\overline{AB}^2}}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\sqrt{(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2)\,\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

Din triunghiul COD şi AOB se scoate

$$d = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC}}{\overline{CD} \cdot \overline{AB}} = \frac{2\,\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC}}{S}$$

$$\therefore d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Observaţiuni. 1°. Această problemă e în strânsă legătură cu problema 3966 rezolvată la pag. 425, Vol. XXXVI, *Gazeta Matematică,* unde se dă, la finele soluţiei, o explicaţie a apropierii celor două probleme. Enunţul problemei 3966 cerea să *se demonstreze relaţia*

$$4\sum a^2b^2 = (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

când

$$b^2+c^2=x^2 \quad , \quad c^2+a^2=y^2 \quad , \quad a^2+b^2=z^2$$

şi să se dea o interpretare geometrică, relaţiei precedente.

Din cauza apropierii dintre cele două probleme, considerăm ca rezolvitori ai problemei 3965 pe toţi rezolvitorii care au dat interpretarea geometrică a problemei 3966 şi ale căror sume sunt publicate la pag. 428 şi 429, Vol. XXXVI.

Inafară de acei rezolvitori s'au mai primit la problema 3965 bune soluţii geometrice dela D-nii: OCT. E. GHEORGHIU şi EM. SĂRULEŞTEANU şi bune soluţii analitice dela D-nii: OCT. E. GHEORGHIU, EM. I. MAREŞ, EM. SĂRULEŞTEANU şi I. I. STAMATE.

2°. D-l OCT. E. GHEORGHIU a dat şi o soluţie trigonometrică.

3°. Pentru cazul $a=b=c$, problema este publicată în *Journal des Mathématiques Élémentaires,* Vol. 35, pag. 42.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5056. *Care este cubul la care putem obţine bipatratul corespunzător înlocuind prima cifră dela stânga cu suma cifrelor extreme?*

I. IONESCU.

Soluţie, dată de D-nii: N. ŞTEFĂNESCU, P. P. DRĂGHICESCU, D. NACHE, I. GR. ENĂCHESCU, M. D. COTARIU, P. D. COLUMBEANU, şi V. D. PĂLĂCEANU.

Fie

$$N^3 = abc\ldots m \quad ; \quad N^4 = (a+m)bc\ldots m.$$

Dacă $p+1$ este numărul cifrelor lui N^3, avem:

$$N^4 = (a+m)10^p + bc\ldots m = m10^p + a10^p + bc\ldots m = m10^p + N^3$$

$$\therefore \quad N-1 = \frac{m10^p}{N^3} = \frac{m10^p}{abc\ldots m}.$$

Termenii fracţiei sunt de câte $p+1$ cifre, deci ea este mai mică decât 10 şi avem

$$N-1<10 \quad \therefore \quad N<11: \qquad (1)$$

Cifra unităţilor este aceeaşi la N^3 şi la N^4, deci ea nu poate fi decât 0, 1, 5, 6 şi atunci şi cifra unităţilor lui N este tot 0, 1, 5, sau 6. Faţă de (1) rezultă că nu putem avea decât

$$N = 0,\ 1,\ 5,\ 6 \quad \text{sau} \quad 10.$$

Din aceste valori nu dă soluţii decât 5. Avem

$$5^3 = 125 \quad \text{şi} \quad 5^4 = 625 = (1 + 5) \times 100 + 25.$$

Soluţia de formă $N = 0$ nu prezintă niciun interes.

PROBLEMA 5303. *Să se demonstreze că între două numere triunghiulare consecutive există cel puţin un număr prim.*

G. G. CONSTANTINESCU.

Fie $\quad T_m = \dfrac{m(m-1)}{2} \quad$ şi $\quad T_{m+1} = \dfrac{m(m+1)}{2}$

cele două numere triunghiulare consecutive. Conform teoremei lui BERTRAND, demonstrată de TCHEBYCEFF, între a şi $2a - 2$ există cel puţin un număr prim, dacă $a \geqslant 5$. Luând deci $a = T_m$, avem

$$2a - 2 = (m - 1)(m + 2)$$

şi

$$(m - 1)(m + 2) > T_{m+1}$$

pentru $m > 2$, astfel că intervalul dintre numerele T_m şi T_{m+1} este mai mare decât acela dintre numerele a şi $2a - 2$, ceea ce adevereşte proprietatea.

Au rezolvat problema D-nii: C. V. DIACONESCU, P. P. DRĂGHICESCU şi D. STAICU.

PROBLEMA 5470. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii*

$$kx + yz = a \ , \quad ky + zx = b \ , \quad kz + xy = c.$$

M. GHERMĂNESCU.

Adunând şi scăzând primele două ecuaţii, obţinem

$$x+y=\frac{a+b}{k+z}\ ,\quad x-y=\frac{a-b}{k-z},$$

deci

$$x=\frac{ak-bz}{k^2-z^2}\ ,\quad y=\frac{bk-az}{k^2-z^2}.$$

Aceste valori, introduse în a treia ecuaţie, conduc la

(1) $f(z)=kz(k^2-z^2)^2-c(k^2-z^2)^2+(ak-bz)(bk-az)=0,$

ecuaţie de gradul al cincilea în z, care ne dă astfel cinci valori pentru z şi deci, tot câte cinci pentru celelalte necunoscute.

Observăm că

$$f(-k)=k^2(a+b)^2\ ,\quad f(k)=-k^2(a-b)^2;$$

cum $f(-\infty)$ şi $f(+\infty)$ au respectiv semnul lui $-k$ şi $+k$, rezultă că pentru $k>0$, avem tabloul

$f(-\infty)$	$f(-k)$	$f(k)$	$f(+\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

iar pentru $k<0$,

$f(-\infty)$	$f(k)$	$f(-k)$	$f(+\infty)$
$+$	$-$	$+$	$-$

ceea ce arată că ecuaţia $f(z)=0$ are trei sau cinci rădăcini reale aşa că sistemul propus admite trei soluţii reale şi două imaginare sau cinci soluţii reale.

Notă. Altă soluţie a dat D-l E. WEGENER.

M. G.

PROBLEMA 5580. *Fie a, b, c, d patru laturi consecutive ale unui patrulater inscriptibil şi p, q diagonalele lui. Intre aceste şase lungimi există relaţiile:*

$$ac+bd=pq\quad \text{şi}\quad \frac{ab+cd}{ad+bc}=\frac{r}{q}.$$

Sunt suficiente aceste relaţii pentru ca a, b, c, d, p, q să aparţină unui patrulater inscriptibil?

I. IONESCU.

In *Traité de Géométrie* par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, t. I, pag. 159, 160 se stabilesc aceste două relaţii între laturile şi diagonalele unui patrulater convex, *a, b, c, d* fiind consecutive, iar *p* şi *q* unind respectiv extremele necomune ale laturilor *d, c* sau *b, c*. Tot acolo se spune: „*la réciproque de cette proposition est vraie, si les diagonales et les côtés du quadrilatère satisfont la relation (1)* le quadrilatère est inscriptible. La relation (1) est $p/q = (ab + dc) / (ad + bc)$".

V. D. PĂLĂCEANU
(Liceul militar, Timişoara).

Au rezolvat bine problema, dar mai lung, D-nii: N. ROŞU, CPT. EUGEN ST. IACOB, ION GR. ENĂCHESCU, MIRCEA MÂNDREANU, GH. GH. DONŢU, A. H. CUBAT şi M. I. PĂTRĂŞCIOIU.

PROBLEMA 5669. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\varphi_x [\varphi_y (2^\alpha) \cdot \varphi_z (3^\beta)] = 1$$

unde $\varphi_i (i)$ *reprezintă indicatorul de ordinul* i *al numărului* i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Avem:

$$\varphi_1 (2^\alpha) = 2^{\alpha-1}$$
$$\varphi_2 (2^\alpha) = 2^{\alpha-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_y (2^\alpha) = 2^{\alpha-y} \quad \text{dacă} \quad \alpha > y$$

şi

$$\varphi_y (2^\alpha) = 1 \quad \text{„} \quad \alpha \leqslant y.$$

De asemenea:

$$\varphi_1 (3^\beta) = 2 \cdot 3^{\beta-1}$$
$$\varphi_2 (3^\beta) = 2 \cdot 3^{\beta-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_z (3^\beta) = 2 \cdot 3^{\beta-z} \quad \text{dacă} \quad \beta > z$$

şi

$$\varphi_z (3^\beta) = 2 \quad \text{„} \quad \beta = z$$

şi în fine

$$\varphi_z (3^\beta) = 1 \quad \text{dacă} \quad \beta < z.$$

1. *Presupunem:* $\alpha > y$ şi $\beta > z$. Atunci ecuaţia de mai sus devine:

$$\varphi_x [2^{\alpha-y+1} \cdot 3^{\beta-z}] = 1.$$

Dar observăm că:

$$\varphi_1\,]2^{\alpha-y+1}\cdot 3^{\beta-z}] = 2^{\alpha-y+1}\cdot 3^{\beta-z-1}$$

$$\varphi_2\,[2^{\alpha-y+1}\cdot 3^{\beta-z}] = 2^{\alpha-y+1}\cdot 3^{\beta-z-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_x\,[2^{\alpha-y+1}\cdot 3^{\beta-z}] = \begin{cases} 2^{\alpha-y+1}\cdot 3^{\beta-z-x} & \text{dacă } \beta-z>x \\ 2^{\alpha-y+1} & \text{„ } \beta-z=x \\ 2^{\alpha-y+1-(x-\beta+z)} & \text{„ } \beta-z<x. \end{cases}$$

De aci, deducem următoarele soluții:

— Dacă $\beta-z\geqslant x$, avem $\begin{cases} y=\alpha+1 \\ x+z=\beta. \end{cases}$

— Dacă $\beta-z<x$, avem: $x+y+z=\alpha+\beta+1$.

2. *Presupunem:* $\alpha\leqslant y$ *și* $\beta>z$. Atunci avem:

$$\varphi_x\,(2\cdot 3^{\beta-z})=1.$$

Dar observăm că:

$$\varphi_x\,(2\cdot 3^{\beta-z}) = \begin{cases} 2\cdot 3^{\beta-z-x} & \text{dacă } \beta-z>x \\ 2 & \text{„ } \beta-z=x \\ 1 & \text{„ } \beta-z<x. \end{cases}$$

Prin urmare deducem soluțiunile:

$$\alpha\leqslant y \quad \text{și} \quad \beta<x+z$$

celelalte nesatisfăcând.

3. *Presupunem:* $\alpha\leqslant y$ *și* $\beta\leqslant z$.

In acest caz se deduce lesne că trebuie să avem: $x=1$.

Observație. Au rezolvat problema numai pentru cazul 1, dând toate soluțiile: D-l M. Gh. Popescu și numai primele soluții D-nii: A. Cubat și G. Donțu.

Au mai rezolvat problema D-nii: P. P. Drăghicescu și C. C. Iliescu.

C-dor I. Linteș.

PROBLEMA 5710. *Un fir inextensibil de lungimea* l *este fixat cu capătul* A *pe o masă orizontală, de formă poligonală, iar la celălalt capăt* M *este întins, cu ajutorul unei greutăți, atârnând sub masă. Să se afle locul capătului* M, *când firul își schimbă continuu poziția în jurul lui* A. *Să se dea și o soluție prin geometria elementară pură.*

Virgil Ghițescu.

Soluție dată de D-l OCTAV C. GHEORGHIU (Liceul Internat Iași).

Masa având n laturi și presupunând că firul este destul de lung spre a putea atârna în dreptul fiecărei laturi, curba reprezentând locul căutat se compune din n curbe identice ca formă.

Fie BC una din laturile mesei. Punctul M se mișcă în planul vertical determinat de BC. Planul xOy se alege chiar acest plan, O fiind piciorul perpendicularei din A pe BC, axa absciselor fiind dreapta BC, iar axa ordonatelor, perpendiculara pe BC în O. Luând $\overline{AO} = a$, $M(x, y)$, putem scrie succesiv:

$$\overline{AN} + \overline{NM} = l$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} + y = l$$

$$x^2 - y^2 + 2ly + a^2 - l^2 = 0.$$

Aceasta este ecuația locului căutat și se constată lesne că reprezintă o iperbolă echilateră.

Soluție prin geometria elementară pură. Fie BC una din laturile mesei. Firul AM rezemându-se pe ea, punctul M se mișcă în planul vertical V determinat de BC.

Să considerăm o poziție oarecare, ANM, a firului. Considerând apoi planul mesei prelungit, fie M′ intersecția lui AN, prelungită, cu cercul descris în acest plan, din A ca centru și cu l ca rază. Rezultă: $\overline{NM'} = \overline{NM}$, $\sphericalangle NM'M = 45^0$. Prelungirea lui $\overline{M'N}$ întâlnește deci verticala lui A în punctul fix P.

Când firul se mișcă, dreapta M′P generează un con circular drept, fix. Locul căutat va fi intersecția acestui con cu planul fix V, paralel cu axul conului, deci o iperbolă.

Toate iperbolele obținute tăind un con circular drept prin plane paralele cu axul conului, au ca unghiu al asimptotelor, unghiul la vârf al conului. Intr'adevăr, să considerăm aceste plane paralele între ele. Iperbolele de secțiune au punctele la infinit ale lor în aceleași direcții, care sunt chiar direcțiile generatoarelor conului, trecând prin vârf și paralele cu planele.

In consecință iperbola-loc are asimptotele sale perpendiculare deci este echilateră.

V. GH.

PROBLEMA 5718. *Dacă* $I_{A.N}(N)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* N *din şirul natural al numerelor până la* A . N *şi dacă* $S_{A.N}(N)$ *reprezintă suma acelor numere, atunci avem:*

$$S_{A.N}(N) = \frac{1}{2} . A . N . I_{A.N}(N).$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţia I-a. Fie $p_1, p_2, \ldots p_n$ numerele prime cu N deci şi cu A . N din şirul numerelor până la A . N, unde:

$$p_1 = 1 \quad ; \quad p_n = A . N - 1 \quad \text{şi} \quad n = I_{A.N}(N).$$

Atunci avem:

$$\begin{aligned} p_1 + p_n &= A . N \\ p_2 + p_{n-1} &= A . N \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n + p_1 &= A . N. \end{aligned}$$

Adunând, găsim:

$$2 . S_{A.N}(N) = A . N . I_{A.N}(N).$$

D-nii: MARIN GH. POPESCU (Lic. „I. C. Brătianu", Piteşti) şi C. I. STAICU (Lic. Militar, Cernăuţi) au dat soluţie analogă „*Notei Matematice*" din G. M., XLVIII, pag. 163 sau celei dată la pag. 78 în „*Teoria Indicatorilor*" de C-DOR I. LINTEŞ.

D-nii: M. BÂRZESCU şi P. P. DRĂGHICESCU au arătat că problema este tratată în „*Nota Matematică*" sus citată.

I. L.

PROBLEMA 5760. *Să se verifice identitatea*

$$(A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi)(A\sin^2\varphi + C\cos^2\varphi) = AC - B^2\cos^2 2\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2} B(A - C)\sin 4\varphi + \left[\frac{1}{2}(A - C)\cos 2\varphi\left(\frac{2B}{A - C} - \operatorname{tg} 2\varphi\right)\right]^2.$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-nii: A. GLODEN, J. MAHRENHOLZ, AUREL G. ANDREI, NICOLAE G. CÂRSTOIU, CONSTANTIN I. CHIRIAC, PETRE D. COLUMBEANU, MIHAIL I. CONSTANTINESCU, MARCEL D. COTARIU, GEORGE G. DONŢU, P. P. DRĂGHICESCU, ION GR. ENĂCHESCU, OCTAV C. GHEORGHIU, EUG. ST. IACOB, C. C. ILIESCU, PETRE F. IONESCU, VLAD GH. JURIST, MARINEL C. MARINESCU, GRIGORE NADOLU, VASILE D. PĂLĂCEANU, IOAN D. PÂRVAN, MIRCEA I. PĂTRĂŞCIOIU, VICTOR C. PĂUNESCU, VICTOR A. PAVICA, ARMAND L. PITIŞ, ADRIAN I. POPESCU, IOAN M. STANCU, NICOLAE

ROȘU, N. D. ȘTEFĂNESCU, MIREL D. STOENESCU, CONSTANTIN C. TINCU, EUGEN N. WEGENER, Subloc. M. AL. VASILESCU-STABU.

Partea întâia o putem scrie

$$(A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi)(A\sin^2\varphi + C\cos^2\varphi) = (A^2 + C^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \\ + AC(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) = AC + (A - C)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

căci

$$\sin^4\varphi + \cos^4\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

Partea a doua devine

$$AC - B^2\cos^2 2\varphi + \frac{1}{2}B(A - C)\sin 4\varphi + \\ + \left[B\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(A - C)\sin 2\varphi\right]^2 = AC + \frac{1}{4}(A - C)^2\sin^2 2\varphi = \\ = AC + (A - C)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

Observare. Identitatea exprimă că în rotația de unghiu φ, δ din ecuația unei conice este invariant.

PROBLEMA 5763. *Printre numerele prime cu un număr dat și inferioare lui găsim pe: 8, 10, 14, 22, și 34. Admițând că 34 este al patrulea număr înainte de ultimul, care este numărul dat?*

COMANDOR I. LINTEȘ.

Soluția I-a dată de D-l C. C. ILIESCU (Colegiul „N. Filipescu", Predeal).

Numărul dat nu poate avea factori primi pe: 2, 5, 7, 11, 17.

Factori primi ai lui pot fi: 3, 13, 19, 23, 29, 31, ...

Primele numere prime cu el și mai mici ca el vor fi: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ...

Dar 34 fiind al patrulea număr, după ultimul, atunci, știind că:

$$p_1 + p_n = p_2 + p_{n-1} = \ldots = p_{i+1} + p_{n-i} = N$$

unde $p_1, p_2, \ldots p_n$ sunt numerele prime cu N și mai mici ca N, urmează că numărul dat va fi:

$$5 + 34 = 39$$

deoarece 5 este al patrulea număr dela început și 34 al patrulea dela sfârșit.

Soluția II-a dată de D-nii: P. D. COLUMBEANU, P. P. DRĂGHICESCU și A. L. PITIȘ.

Numărul dat fiind impar este mai mic sau egal cu 41, deoarece între 34 şi 41 sunt patru numere divizibile cu 2, deci prime cu numărul dat: 34, 36, 38, 40.

Apoi numărul dat fiind prim cu 2, 5, 7, 11, 17, este de forma $3^{\alpha} . 13^{\beta} \ldots$

Dintre acestea numai $3 . 13 = 39$ este mai mic decât 41, deci acesta este soluţia problemei.

PROBLEMA 5788. *Valoarea unităţii de măsură de lungime în Moldova era stânjenul, care era împărţit în 8 palme, palma în 8 palmace şi palmacul în 12 linii.*

Un loc de 1250 stânjeni pătraţi de formă dreptunghiulară avea dimensiunile 9×32. *Care este lungimea totală a împrejmuirii lui în măsuri moldoveneşti?*

Care ar fi valoarea actuală a terenului acela dacă azi s'ar vinde cu 12.000 lei hectarul?

Stânjenul moldovenesc are lungimea de 2,23 m.

I. IONESCU.

Problema este imposibilă căci aria dată e în contradicţie cu dimensiunile date. Luăm dimensiunile de bune. Suprafaţa este atunci $9 \times 32 = 288$ stânjeni pătraţi, perimetrul locului este $2 \times (9 + 32) = 82$ stânjeni.

Un stânjen pătrat are $2{,}23^2 = 4$, 9.729 m^2. Un hectar are 10.000 m^2 şi deci 1 metru costă 1,20 lei. Valoarea locului este prin urmare $4{,}9729 \times 288 \times 1{,}2 = 1718{,}63$ lei.

Problema a fost încercată de D-nii: V. D. PĂLĂCEANU, T. G. DUMITRESCU, G. N. WEGENER, V. G. PIŢIGOIU şi A. H. CUBAT fără a observa contradicţia din enunţ.

PROBLEMA 5836. *Două bare* AOB *şi* A'OB' ($AO = A'O = a$, $OB = OB' = b$) *de masă neglijabilă şi perpendiculare una pe alta se rotesc în propriul lor plan în jurul lui* O *cu iuţeala unghiulară constantă. In capetele* A *şi* A' *ale barelor se aşează câte o masă* M, *iar în capetele* B *şi* B' *câte o masă m. Să se determine poziţia unde trebuie aşezată o masă* m_1, *astfel ca axa* O *să nu fie acţionată de forţele de inerţie (echilibrarea maselor în mişcarea de rotaţie).*

Masele M, *m*, m_1 *se vor considera punctuale.*

ALEXANDRU STOENESCU.

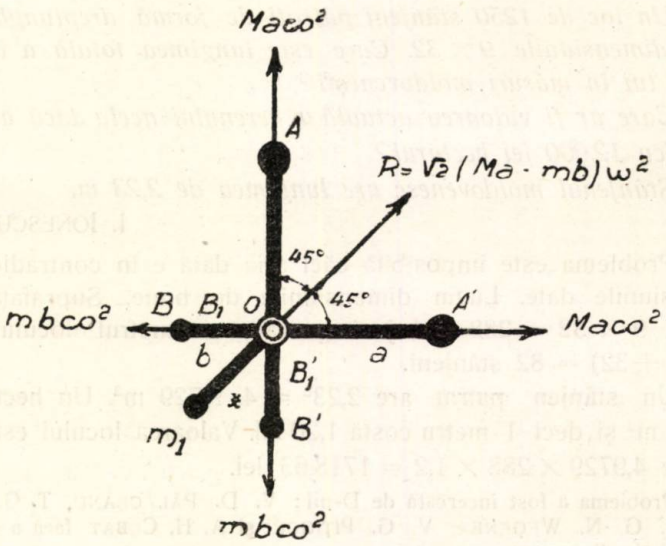
Soluție dată de D-l EMIL MODÂLCĂ (elev al Școalei Politehnice din București).

Să presupunem pentru fixarea ideilor $Ma > mb$.

Mișcarea circulară fiind *uniformă*, singurele forțe de *inerție* sunt cele *patru forțe de inerție centrifugale* date în figură a căror rezultantă este *îndreptată după bisectoarea unghiului* AOA', *mărimea* sa fiind:

$$R = \sqrt{2}\,(Ma - mb)\,\omega^2$$

în care ω = inițiala unghiulară *constantă* a sistemului.



Această rezultantă trebuie să fie echilibrată de forța de inerție *datorită masei* m_1. Rezultă deci că această forță va trebui să lucreze după direcția bisectoarei unghiului AOA', în sens opus rezultantei R și să aibe aceeași mărime.

Notând cu x distanța dela masa m_1 la centrul O va trebui să avem:

$$m_1 x\omega^2 = R = \sqrt{2}\,(Ma - mb)\,\omega^2.$$

De unde:

$$x = \sqrt{2}\,\frac{Ma - mb}{m_1}.$$

D-l EMIL MODÂLCĂ observă că se poate obţine de asemenea o echilibrare a maselor date aşezându-se pe bazele OB şi OB' în B_1 şi B_1' câte o masă m_1 la distanţa:

$$OB_1 = OB_1' = x\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Ma - bm}{m_1}.$$

Observaţie. Problema admite generalizări simple pentru mase diferite aşezate în A, A', B, B' pentru lungimi diferite ale braţelor OA şi OA'; OB şi OB' precum şi pentru un număr mai mare de bare ce se rotesc în jurul lui O.

AL. ST.

EXERCIŢII

6. Să se găsească trei numere a, b, c astfel ca suma lor să fie egală cu un patrat de două cifre d^2 iar diferenţa $[a \quad (b + d_1]$ să fie egală cu c^2.

M. C. MANOLACHE.

R. Avem:

$$a + b = d^2 - c \quad \text{şi} \quad a - b = d + c^2$$

$$\therefore \quad a = \frac{d(d+1) + c(c-1)}{2}; \quad b = \frac{d(d-1) - c(c+1)}{2}$$

Dar d^2 fiind de 2 cifre se găseşte între numerele

16, 25, 36, 49, 64 sau 81

iar d între numerele

(1) 4, 5, 6, 7, 8 sau 9

limitându-ne la numerele pozitive. Pe de altă parte $c < d^2$. Dând lui d valorile (1) succesive iar lui c valorile corespunzătoare găsim soluţiile

a	10	11	13	15	16	18	2	21	22	24	27	31	
b	5	3	0	9	7	4	0	14	12	9	5	0	
c	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	
d	4			5				6					

a	28	29	31	34	38	43	36	37	39	42	46	51	57
b	20	18	15	11	6	0	27	25	22	18	53	7	0
c	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7
d	7						8						

a	45	46	48	51	55	60	66	73
b	35	33	30	26	21	15	8	0
c	1	2	3	4	5	6	7	8
d	9							

PROBLEME PROPUSE

5825*) Care este cel mai mic patrat care se poate forma scriind alături două patrate?

I. IONESCU.

5849. Să se calculeze indicatorul numărului anilor de apariție ai *Gazetei Matematice*, în intervalul de când a apărut și până astăzi, precum și indicatorul aceluiași număr, subordonat anului de apariție.

COMANDOR I. LINTEȘ.

5850. Să se determine baza B a unui sistem de numerație și cifrele a, b, c așa în cât numărul $abba$ să fie patratul numărului cc, iar numerele a, b, c, $B+1$, așezate în mod convenabil, să fie în progresie aritmetică.

V. THÉBAULT.

5851. Să se rezolve sistemul:

$$x^y = y^z \quad , \quad xy = a^z .$$

A. D. DOBRESCU.

5852. Se dau în plan trei drepte Δ_1, Δ_2, Δ_3 și se cere să se construiască un triunghiu, care are o înălțime așternută pe una din aceste drepte și două mediatoare așternute pe celelalte două drepte date.

G-L GH. BUICLIU.

5853. Se consideră două cercuri (C_1) și (C_2). Fie M_1 și M_2 inversele (simetricele) unui punct M în raport cu aceste două cercuri.

Să se arate, că: 1°. Printre cercurile fascicolului linear definit de (C_1) și (C_2) există unul (C) astfel ca punctele M_1 și M_2 să fie inverse (simetrice) în raport cu acest cerc.

---

*) Inlocuieşte problema 5825 dela pag. 574, Vol. XLIII care este tot una cu problema 1532, propusă de acelaşi autor şi rezolvată la pag. 223, Vol. XVI *Gazeta Matematică.*

2°. A şi B fiind punctele comune cercurilor (C), (C_1), (C_2) avem relaţiile:

$$\frac{\overline{AM} \cdot \overline{M_1M_2}}{\sin(C_1, C_2)} = \frac{\overline{AM_1} \cdot \overline{M_2M}}{\sin(C_2, C)} = \frac{\overline{AM_2} \cdot \overline{MM_1}}{\sin(C, C_1)}$$

şi analoagele, obţinute înlocuind pe A prin B.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5854. Fiind dat tetraedrul SABC şi punând $\overline{SA} = \alpha$; $\overline{SB} = \beta$; $\overline{SC} = \gamma$; $\overline{BC} = a$; $\overline{CA} = b$; $\overline{AB} = c$, să se arate, că volumul său V este dat de formula:

$$144\,V^2 = \Sigma\, a^2(\gamma^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - \beta^2) + \Sigma\, a^2(-a^2 + b^2 + c^2)\alpha^2 - a^2b^2c^2 \quad (1)$$

Să se deducă relaţia, care leagă laturile a, b, c, d şi diagonalele e, f ale unui patrulater plan oarecare:

$$e^2f^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2) + e^2(b^2 - c^2)(d^2 - a^2) +$$
$$+ f^2(c^2 - d^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2c^2 - b^2d^2) = 0$$

[e uneşte intersecţia (a, d) cu (b, c)].

ION C. VASILIU.

5855. Un corp este alcătuit dintr'un trunchiu de con circular drept, terminat prin jumătăţi de sferă de aceleaşi diametre ca şi bazele respective. Ştiind că generatoarea trunchiului de con face un unghiu *constant* cu bazele şi că distanţa între polurile celor două semisfere este asemenea constantă, să se studieze variaţia volumului acestui corp.

Se va discuta problema după diferitele înclinări ale generatoarei pe baze, determinându-se înălţimea trunchiului de con pentru care volumul este *maxim* sau *minim*. (Când acestea există).

Cazuri particulare: înclinările de 30°; 45°; 60°; 90°.

GH. D. SIMIONESCU.

5856. Fiind dat un con circular drept, de deschidere α, înscris într'o sferă dată, să se arate, că există totdeauna un al doilea con circular drept, de deschidere $\theta \neq \alpha$, înscris în aceeaşi sferă, care are aceeaşi suprafaţă totală cu conul dat.

O. N. ŢINO.

5857. Se dau ecuaţiile de gradul al doilea în y:

$$y^2 + f' . y + \varphi' = 0 \qquad (1)$$

$$y^2 + f'' . y + \varphi'' = 0. \qquad (2)$$

a) Să se determine f şi φ de x astfel încât rădăcinile ecuaţiei (2) să fie inversele rădăcinilor ecuaţiei (1).

b) Să se arate că funcţiile f şi φ, astfel determinate, verifică relaţia:

$$f = (\sqrt[3]{3\varphi} - 1)\, e^{\sqrt[3]{3\varphi}}.$$

c) Să se generalizeze pentru cazul derivatelor de ordinul (n) în (1) şi de ordinul $(n+1)$ în (2).

C. MIHU.

5858. Să se determine o integrală a ecuaţiilor canonice ale mişcării unui punct material liber, când:

$$H = ab^2 p_1^2 + ac^2 p_2^2 + e p_3^2 + c q_1^2 + b q_2^2 + 2\mu (p_1 q_1 + p_2 q_2) +$$
$$+ 2p_3 (\alpha q_1 + \beta q_2) + 2abc p_1 p_2,$$

notaţiile fiind cele obişnuite, iar a, b, c, e, α, β, μ constante.

Caz particular $\mu = 0$.

M. GHERMĂNESCU.

5859. O roată de rază R şi greutate P, care se rostogoleşte pe un plan orizontal, deplasându-se cu viteza v, se loveşte de un abstacol de înălţime i. Forţa de tracţiune a roţii, având nevoie de un timp t pentru a imprima iarăşi o viteză orizontală v (micşorată prin izbire), se cere:

1°. Valoarea maximă a efortului de tracţiune în timpul izbirii.

2°. Forţa maximă de izbire pe osie şi tensiunea maximă în bandaj.

3° Traiectoria centrului roţii şi a unui punct de pe bandaje, după izbire.

CPT. I. GR. ZAMFIRESCU.

ERATĂ. La pag. 22 din Vol. XLIX, între rândurile 2 şi 3 de sus, se va intercala

† ABASON E. . . . 1922 Martie 1 . . . 1942 Dec. 17.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Cioc D. (5698); *Drăghicescu P. P.* (2357, 5791, 812, 31, 33, 38, 40, 42, 48); *Enăchescu Gr. I.* (5643, 703, 11); *Florescu B. I.* (A, N, P); *Iacob St. E.* Căp. (5791); *Modâlcă Em.* (5631, 32, 49); *Nicolae M. G.* (5831); *Pălăceanu D. V.* (5056, 684); *Stoenescu D. M.* (5587, 619, 37, 704, 91); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (5581, 610, 26, 703, 07, 21, 50, 56, 58, 801, 27, 28); *Wegener E.* (5467, 547, 801, 46).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea **pe foaie aparte.** *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 20.299

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIU

SUMARUL

1. Valoarea numărului π . . . . . *Ion Ionescu.*
2. Operaţiuni cu numerele lui Legendre . *Comandor I. Linteş.*
3. Extinderea în spaţiu a unei teoreme a D-lui Profesor Pompeiu . . . . . *I. C. Vasiliu.*
4. O problemă cu patrate . . . . . *I. B. Florescu.*
5. Cilindrul anallagmatic . . . . . *D. Barbilian.*
6. Raport pentru decernarea premiului „Vasile Conta" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
7. Note matematice: 7 — 11.
8. Chestiuni de examen.
9. Bibliografie.
10. Cereri: 324.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 2545, 3081, 4098, 5225, 5260, 5337, 5363, 5404, 5463, 5575, 5756.
13. Exerciţii: 7—9.
14. Probleme propuse: 5860 — 5874.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

A. ANGELESCU, *Calcul diferenţial şi analitic* . . . . . Lei 250

VALOAREA NUMĂRULUI π

In Revista „*Natura*", Anul XXXII, Nr. 9 din luna Septembrie 1943 s'a publicat la pag. 318—321 un articol cu titlul de mai sus, de către D-l Inginer Z. SEICEANU din Sărmăşel, în care, — nici una, nici două, — D-sa afirmă şi demonstrează (!) că valoarea „*clasică*" a lui $\pi = 3{,}1415$, de care se servesc azi oamenii de ştiinţă şi practicianii din toată lumea şi de care s'a servit moşii şi strămoşii lor de peste 2000 de ani, de la ARCHIMEDE încoace, este greşită, deşi azi, i se cunosc 707 zecimale calculate de SHRENKS în 1873, şi care se găsesc reproduse în *Gazeta Matematică*, Anul I, pag. 57.

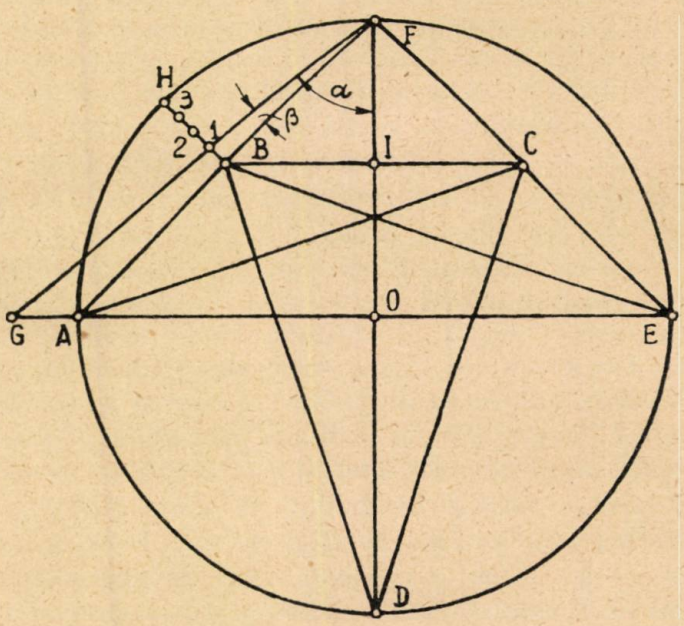
D-l SEICEANU nu-i cunoaşte decât „vre-o 24 zecimale" pe care i le-a dat LUDOLPH DE COLONIA în 1613 şi încă 12 în plus.

Articolul D-lui Z. SEICEANU constituie o scădere pentru nivelul matematicilor de azi în România şi trebuie pus în rândul articolelor *cuadratorilor* din secolul XVIII şi dela începutul secolului XIX în care se căuta *cuadratura cercului* adică *găsirea unui patrat echivalent cu un cerc utilizând numai linia şi compasul.* D-l SEICEANU nu ştie că în 1882 F. LINDEMANN, profesor la Universitatea din München a demonstrat că această problemă este imposibilă, numărul π fiind transcendent, astfel că orice muncă pentru cuadratura cercului este zadarnică.

D-l Z. SEICEANU conchide în studiul său: „*valoarea numărului π se stabileşte prin calcul la 3,1623..., exact de 3,162277661... care diferă foarte puţin de valoarea clasică de 3,1415... cu abia 0,0208, eroare care s'a putut face în antichitate foarte uşor, cu mijloacele de măsurare ce existau pe atunci*". D-sa a făcut măsurători la piese strunjite în atelierele sale de strungărie şi a găsit că $\pi = 3{,}1415$ nu dă lungimile exacte de cercuri trasate de strunguri pe cilindru. A făcut verificări şi în cântărire şi a găsit prea puţin şi atunci schimbă pe π luându-l egal cu $\sqrt{10} = 3{,}1623$ sau *exact* la 3,24162277661...

Insă soluţia cu $\pi = \sqrt{10}$, o aveau Indienii în antichitate, găsită prin consideratiuni religioase şi pe care au părăsit-o când le-a venit din Europa valoarea lui π dată de ARCHIMEDE de 2217 pe la 250 î. Cr. Mai înainte de $\sqrt{10}$ Indienii aveau $\pi = 3$ ca şi *Chinezii* pe la 1100 î. Cr., *Japonezii, Babilonienii, Caldeenii* şi *Evreii* care au şi în Biblie calcule făcute cu $\pi = 3$, valoare dedusă din confundarea cercului cu exagonul regulat înscris. EUCLID,

părintele geometriei elementare nu cunoştea pe π; ştia numai că $3 < \pi < 4$, comparând cercul cu exagonul regulat înscris şi cu patratul circumscris. Cum că chestiunea nu e uşoară e destul a spune că dela ARCHIMEDE (287—212 î. Cr.) până la 1464 nu s'a cunoscut lui π decât 2 zecimale, $3{,}14 = 22/7$, când REGIOMONTANUS i-a mai dat o zecimală. Egiptienii pe la 2000 î. Cr., în manuscrisul autentic a lui AHMAS, aveau $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604$, care dă cercul echivalent cu patratul făcut pe $\frac{8}{9}$ a diametrului cercului.



Astfel de soluţii empirice, experimentale, mistice, etc., nu mai au nicio valoare azi De acest lucru şi-a dat seama şi D-l Z. SEICEANU şi atunci s'a apucat să caute justificări matematice. Reproducem aci articolul din „*Natura*“, fără a ţine seamă de recomandaţie ca să fac figura cu linii subţiri, căci eu sunt de părerea acelora care susţin că geometria este ştiinţa de a raţiona just pe figuri false.

Figura este un cerc cu razele $OA = OF = OE = OD = 1$, cu vârfurile A, F, E, D al unui patrat înscris în cerc cu laturile

$AF = FE = ED = DA = \sqrt{2}$. Fie B şi C mijloacele lui AF şi EF şi I mijlocul lui BC. Unim A cu C şi B cu E. Lungimile AC, EB, BD, CD sunt egale. Ultimele două sunt ipotenusele în triunghiurile dreptunghice BID, CID cu catetele mici de 0,5 şi cele mari 1,5, deci ipotenusele lor BD, CD sunt $\sqrt{0{,}5^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}5^2} = \sqrt{10}/2$. D-l SEICEANU le egalează cu arcul AF, sfert de cerc, şi deci $\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\pi}{2}$ de unde scoate $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1623$ şi mai exact 3,162322776601 şi ajunge astfel la valoarea lui π dată de Indienii antici!

Concluzia logică era că valoarea lui π dată de D-sa nu este bună şi că lungimile AC, EB, BD, BC nu sunt egale cu arcele AF, FE, ED, DA cum pretinde D-sa.

Dar autorul nu se opreşte aci ci mai dă o rectificare arcului de cerc cu coarda AF, în modul următor: duce săgeata BH a arcului pe care o împarte în patru părţi egale prin punctele 1, 2, 3, punctul 1 fiind cel mai aproape de B. Dreapta 1F prelungită spre A taie pe OA în E, şi spune că FG este arcul FA rectificat. Această lungime se poate însă calcula şi apoi compara cu lungimea arcului AF, care este $\frac{\pi}{2} \times 1 = 1{,}5707963\ldots$

Fie

$$\sphericalangle\ OFG = \alpha \quad , \quad \sphericalangle\ AFG = \beta = \alpha - 45^0$$

Avem

$$FG = OF \sec\alpha = \sec\alpha$$

pentruçă OF este egală cu unitatea. Dar din triunghiul dreptunghic FB1 se scoate

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{B1}{BF} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}.$$

Apoi

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\,(45^0 + \beta) = \frac{1 + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta} = \frac{3 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}} = \frac{17 + 8\sqrt{2}}{23}$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{28{,}3136}{23} = 1{,}23102\ldots$$

$$\sec\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1 + 1{,}23102^2} = \sqrt{2{,}5154102404} = 1{,}586$$

care dă arcul rectificat mai mare. Deci construcţia D-lui SEICEANU nu rectifică arcul, ceea ce era de demonstrat.

ION IONESCU.

OPERAȚIUNI CU NUMERELE LUI LEGENDRE

Fie E(I) expresia întregilor cuprinși în I. Această notație fiind atribuită lui LEGENDRE, numerele respective vor fi numite numerele lui LEGENDRE.

In cele ce urmează îmi propun a da operațiunile elementare aritmetice cu aceste numere, operațiuni pe care le cred cunoscute, dar pe care nu le-am întâlnit decât în cazuri izolate.

I. Adunarea.

Să se arate că avem:

$$(1) \qquad E\left(\frac{x+y}{z}\right) = E\left(\frac{x}{z}\right) + E\left(\frac{y}{z}\right) + \varepsilon$$

unde x, y, z *sunt numere întregi și pozitive, iar* $\varepsilon = 0$ *sau* 1.

Observăm că:

$$x+y = z.k_{x+y} + \tau_{x+y} \quad ; \quad x = z.k_x + \tau_x \quad ; \quad y = z.k_y + \tau_y.$$

unde k și τ reprezintă *câturile* și *resturile* respective.

In acest caz egalitatea 1) este valabilă dacă:

$$\varepsilon = E\left(\frac{\tau_x + \tau_y - \tau_{x+y}}{z}\right)$$

unde știind că: $0 \leqslant \tau < z$, avem:

$$0 \leqslant \frac{\tau_x + \tau_y - \tau_{x+y}}{z} < 2$$

Prin urmare: $\varepsilon = 0$ sau 1.

Exemple numerice:

$$E\left(\frac{100+31}{7}\right) = E\left(\frac{100}{7}\right) + E\left(\frac{31}{7}\right)$$

deoarece avem:

$$\begin{cases} E\left(\dfrac{100+31}{7}\right) = 18 \quad ; \quad \tau_{x+y} = 5 \\ E\left(\dfrac{100}{7}\right) = 14 \quad ; \quad \tau_x = 2 \quad \text{deci} \quad \varepsilon = 0 \\ E\left(\dfrac{31}{7}\right) = 4 \quad ; \quad \tau_y = 3 \end{cases}$$

De asemenea, avem:

$$E\left(\frac{101+40}{7}\right) = E\left(\frac{101}{7}\right) + E\left(\frac{40}{7}\right) + 1$$

deoarece avem:

$$\begin{cases} E\left(\frac{101+40}{7}\right) = 20 \;\; ; \;\; \tau_{x+y} = 1 \\ E\left(\frac{101}{7}\right) = 14 \;\; ; \;\; \tau_x = 3 \;\; \text{deci} \;\; \varepsilon = 1 \\ E\left(\frac{40}{7}\right) = 5 \;\; ; \;\; \varepsilon_y = 5 \end{cases}$$

II. **Scăderea.**

Să se arate că avem:

$$(2) \qquad E\left(\frac{x-y}{z}\right) = E\left(\frac{x}{z}\right) - E\left(\frac{y}{z}\right) - \varepsilon$$

x, y, z şi ε *îndeplinind aceleaşi condiţiuni.*

Raţionând ca mai sus, avem:

$$E\left(\frac{x}{z}\right) = E\left(\frac{x-y}{z}\right) + E\left(\frac{y}{z}\right) - \varepsilon$$

unde:

$$\varepsilon = E\left(\frac{\tau_{x-y} + \tau_y - \tau_x}{z}\right) = 0 \text{ sau } 1.$$

Exemple numerice:

$$E\left(\frac{100-31}{7}\right) = E\left(\frac{100}{7}\right) - E\left(\frac{31}{7}\right) - 1$$

deoarece avem:

$$\begin{cases} E\left(\frac{100-31}{7}\right) = 9 \;\; ; \;\; \tau_{x-y} = 6 \\ E\left(\frac{100}{7}\right) = 14 \;\; ; \;\; \tau_x = 2 \;\; \text{deci} \;\; \varepsilon = 1 \\ E\left(\frac{31}{7}\right) = 4 \;\; ; \;\; \tau_y = 3 \end{cases}$$

Deasemenea:

$$E\left(\frac{102-28}{7}\right) = E\left(\frac{102}{7}\right) - E\left(\frac{28}{7}\right)$$

deoarece avem:

$$E\left(\frac{102-18}{7}\right) = 10 \quad ; \quad \tau_{x-y} = 4$$

$$E\left(\frac{102}{7}\right) = 14 \quad ; \quad \tau_x = 4 \quad \text{deci } \varepsilon = 0$$

$$E\left(\frac{28}{7}\right) = 4 \quad ; \quad \tau_y = 0$$

III. **Inmulţirea.**

Să se arate că avem:

$$(3) \quad E\left(\frac{x}{z}.\frac{y}{z}\right) = E\left(\frac{x}{z}\right).E\left(\frac{y}{z}\right) + E\left[\frac{\tau_x}{z}E\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{\tau_y}{z}E\frac{x}{z}\right]$$

x, y, z, τ_x şi τ_y având aceleaşi semnificaţii ca mai sus.

Făcând notaţiunile:

$$x \,.\, y = z \,.\, k_{xy} + \tau_{xy} \quad ; \quad x = z \,.\, k_x + \tau_x \quad ; \quad y = z \,.\, k_y + \tau_y$$

avem:

$$k_{xy} + E\left(\frac{\tau_{xy}}{z^2}\right) = k_x \,.\, k_y + E\left(\frac{\tau_x}{z}.k_y\right) + E\left(\frac{\tau_y}{z}.k_x\right) + E\left(\frac{\tau_x \,.\, \tau_y}{z^2}\right)$$

Dar cum avem:

$$0 \leqslant \tau_{xy} < z^2 \quad \text{şi} \quad 0 \leqslant \tau_x < z \quad ; \quad 0 \leqslant z_y < z \quad ,$$

atunci

$$E\left(\frac{\tau_{xy}}{z^2}\right) = 0 \text{ şi } E\left(\frac{\tau_x \,.\, \tau_y}{z^2}\right) = 0$$

urmează că egalitatea 3) este demonstrată.

Exemple numerice:

$$E\left(\frac{100}{7}.\frac{31}{7}\right) = E\left(\frac{100}{7}\right).E\left(\frac{31}{7}\right) + E\left[\frac{2}{7}.E\left(\frac{31}{7}\right) + \frac{3}{7}E\left(\frac{100}{7}\right)\right]$$

deoarece avem:

$$\begin{cases} E\left(\dfrac{100}{7}.\dfrac{31}{7}\right) = E\left(\dfrac{3100}{49}\right) = 63 \quad ; \quad \tau_{xy} = 13 \\ E\left(\dfrac{100}{7}\right) = 14 \quad ; \quad \tau_x = 2 \quad ; \quad E\left(\dfrac{31}{7}\right) = 4 \quad ; \quad \tau_y = 3 \end{cases}$$

Deci:

$$63 = 14 . 4 = E\left[\frac{2}{7} . 4 + \frac{3}{7} . 14\right] = 56 + 1 + 6$$

De asemenea:

$$E\left(\frac{101}{7} . \frac{40}{7}\right) = E\left(\frac{101}{7}\right) . E\left(\frac{40}{7}\right) + E\left[\frac{3}{7} . E\left(\frac{40}{7}\right) + \frac{5}{7} . E\left(\frac{101}{7}\right)\right]$$

deoarece avem:

$$\begin{cases} E\left(\frac{101}{7} . \frac{40}{7}\right) = E\left(\frac{4040}{49}\right) = 82 \quad ; \quad \tau_{xy} = 22 \\ E\left(\frac{101}{7}\right) = 14 \quad ; \quad \tau_x = 3 \quad ; \quad E\left(\frac{40}{7}\right) = 5 \quad ; \quad \tau_y = 5 \end{cases}$$

Deci:

$$82 = 14 . 5 + E\left[\frac{3}{7} . 5 + \frac{5}{7} . 14\right] = 70 + 2 + 10.$$

IV. **Impărţirea.**

Să se arate că avem:

$$(4) \qquad E\left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z}\right) = E\left(\frac{x}{y}\right)$$

Relaţia este evidentă.

Consecinţe.

a) *Să se arate că avem:*

$$(5) \qquad B\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) = E\left(\frac{a}{\alpha}\right) + E\left(\frac{b}{\beta}\right) + \varepsilon$$

a, b, α, β, *fiind numere întregi şi pozitive, iar* $\varepsilon = 0$ *sau* 1.

Observăm că:

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta + b\alpha}{\alpha\beta} = \frac{x + y}{z} \quad \text{iar} \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{x}{z} \quad \text{şi} \quad \frac{b}{\beta} = \frac{y}{z}$$

Deci, conform relaţiei (1), relaţia (5) este demonstrată.

b) *Să se arate că avem de asemenea:*

$$(6) \qquad E\left(\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}\right) = E\left(\frac{a}{\alpha}\right) - E\left(\frac{b}{\beta}\right) - \varepsilon$$

$$(7) \quad E\left(\frac{a}{\alpha} . \frac{b}{\beta}\right) = E\left(\frac{a}{\alpha}\right) . E\left(\frac{b}{\beta}\right) + E\left[\frac{\tau_{a\beta}}{\alpha\beta} . E\left(\frac{b}{\beta}\right) + \frac{\tau_{b\alpha}}{\alpha\beta} . E\left(\frac{a}{\alpha}\right)\right]$$

$$(8) \qquad E\left(\frac{a}{\alpha} : \frac{b}{\beta}\right) = E\left(\frac{a . \beta}{b . \alpha}\right)$$

Toate aceste relaţiuni se stabilesc uşor cu ajutorul relaţiilor (2), (3) şi (4).

c) *Să se arate că avem:*

$$(9) \qquad E\left(\frac{n\,.\,x}{z}\right) = n\,.\,E\left(\frac{x}{z}\right) + \sum_{1}^{n} \varepsilon$$

unde n *este un întreg pozitiv, iar:*

$$0 \leqslant \sum_{1}^{n} \varepsilon < n$$

Această relaţie se deduce lesne din adunarea relaţiilor:

$$\begin{cases} E\left[\frac{n\,.\,x}{z}\right] = E\left(\frac{x}{z}\right) + E\left[\frac{(n-1)\,.\,x}{z}\right] + \varepsilon_1 \\ E\left[\frac{(n-1)\,.\,x}{z}\right] = E\left(\frac{x}{z}\right) + E\left[\frac{(n-2)\,.\,x}{z}\right] + \varepsilon_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E\left[\frac{x}{z}\right] = E\left(\frac{x}{z}\right) \end{cases}$$

valabile conform relaţiei (1).

De asemenea relaţia (2) se mai poate deduce din relaţia (3), dacă facem $n = \frac{y}{z}$, în care caz avem:

$$(10) \qquad E\left(\frac{n\,.\,x}{z}\right) = n\,.\,E\left(\frac{x}{z}\right) + E\left(n\,.\,\frac{\tau_x}{z}\right)$$

Prin urmare avem:

$$\sum_{1}^{n} \varepsilon = E\left(n\,.\,\frac{\tau_x}{z}\right)$$

Prin consideraţiuni de simetrie, mai putem arăta că:

$$(11) \qquad E\left(\frac{n\,.\,x}{z}\right) = x\,.\,E\left(\frac{n}{z}\right) + E\left(x\,.\,\frac{\tau_n}{z}\right)$$

Relaţiile (10) şi (11) ne arată că nu putem avea:

$$n.\ E\left(\frac{x}{z}\right) = x\,.\,E\left(\frac{n}{z}\right)$$

decât dacă avem:

$$E\left(n\,.\,\frac{\tau_x}{z}\right) = E\left(x\,.\,\frac{\tau_n}{z}\right)$$

d) *Să se arate că avem:*

$$(12) \quad E\left[\left(\frac{x}{z}\right)^2\right] = \left[E\left(\frac{x}{z}\right)\right]^2 + . E\left[2 . \frac{\tau_x}{z} . E\left(\frac{x}{z}\right)\right]$$

Relaţia se deduce din (3), făcând $y = x$.

In general se poate stabili că:

$$(13) \quad E\left[\left(\frac{x}{z}\right)^n\right] = E\left[\left(\frac{x}{z}\right)^\alpha\right] . E\left[\left(\frac{x}{z}\right)^\beta\right] + E\left[\frac{\tau_x}{z} . E\left[\left(\frac{x}{z}\right)^\alpha\right] + \frac{\tau_x}{z} E\left[\left(\frac{x}{z}\right)^\beta\right]\right]$$

unde avem $n = \alpha + \beta$.

e) *Să se arate că avem:*

$$(14) \quad E\left(\frac{x}{z}\right) = \left[E\left(\sqrt{\frac{x}{z}}\right)\right]^2 + E\left[2 . \frac{\tau_x}{z} . E\left(\sqrt{\frac{x}{z}}\right)\right]$$

Relaţia se poate deduce, fie din (12), fie din (13).

Dacă facem $\frac{x}{z}$, atunci va trebui să echivalăm $\sqrt{N} = \frac{a}{b}$ şi:

$$(15) \quad N = \left[E\left(\sqrt{N}\right)\right]^2 + E\left[2 . \frac{\tau_a}{b} . E\left(\sqrt{N}\right)\right]$$

f) *Dacă avem $x > y$, atunci:*

$$(16) \quad E\left(\frac{x}{z}\right) \geqslant E\left(\frac{y}{z}\right)$$

Observăm că avem $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$, deci:

$$E\left(\frac{x-y}{z}\right) \geqslant 0$$

Or, în baza relaţiei (2), avem:

$$E\left(\frac{x}{z}\right) \geqslant E\left(\frac{y}{z}\right) + \varepsilon$$

7. *Dacă avem $\frac{a}{\alpha} > \frac{b}{\beta}$, atunci:*

$$(17) \quad E\left(\frac{a}{\alpha}\right) \geqslant E\left(\frac{b}{\beta}\right)$$

Demonstrația este analogă cazului dela *f)*.

8. *In ce caz avem?*

$$E\left[E\left(\frac{a}{\alpha}\right) : E\left(\frac{b}{\beta}\right)\right] = E\left(\frac{a.\beta}{b.\alpha}\right)$$

Dacă: $a = \alpha . k_a + \tau_a$ și $b = \beta . k_b + \tau_b$, avem:

$$E\left[E\left(\frac{a}{\alpha}\right) : E\left(\frac{b}{\beta}\right)\right] = E\left(\frac{k_a}{k_b}\right) = E\left[\frac{\left(\frac{a-\tau_a}{\alpha}\right)}{\left(\frac{b-\tau_b}{\beta}\right)}\right]$$

$$= E\left[\frac{a\beta}{b\alpha} \cdot \frac{1-\frac{\tau_a}{a}}{1-\frac{\tau_b}{b}}\right].$$

Deci va trebui să avem:

$$\frac{\tau_a}{a} = \frac{\tau_b}{b}.$$

Am dat o serie de operațiuni cu câteva consecințe și explicațiuni. Se mai pot deduce oricâte. Ele pot servi în numeroase problemi de aritmetică și mai ales de teoria numerelor.

COMANDOR I. LINTEȘ.

EXTINDEREA IN SPAȚIU A UNEI TEOREME A D-LUI PROFESOR POMPEIU

Se cunoaște teorema D-lui Profesor D. POMPEIU:

„Cu distanțele unui punct din planul unui triunghiu echilateral la vârful acestuia se poate întotdeauna construi un triunghiu".

Voi demonstra mai jos următoarea teoremă:

„Cu distanțele unui punct la muchiile unui tetraedru echilateral se poate întotdeauna construi un tetraedru".

In prealabil voi stabili o serie de elemente ajutătoare.

A) Fie un triedru SABC cu vârful în S, unghiurile fețelor laterale fiind A, B, C. Ducem un plan perpendicular pe muchea

SA şi fie M, N, P punctele unde acest plan taie muchiile SA, SB, SC. Notez distanţa $SM = \lambda$. Voi calcula valoarea unghiului diedru θ corespunzător muchii SA, în funcţie de unghiurile A, B, C.

$$\overline{NP}^2 = \overline{SN}^2 + \overline{SP}^2 - 2\overline{SN} \cdot \overline{SP} \cdot \cos A.$$

Dar: $\overline{SN} = \dfrac{\lambda}{\cos C}$, $\overline{SP} = \dfrac{\lambda}{\cos B}$.

Deci: $\overline{NP}^2 = \dfrac{\lambda^2}{\cos^2 B \cos^2 C} [\cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C]$.

Apoi: $$\cos\theta = \frac{-\overline{NP}^2 + \overline{PM}^2 + \overline{MN}^2}{2 \cdot \overline{PM} \cdot \overline{MN}}$$

Inlocuim valorile lui MP, PM, MN şi găsim la sfârşit:

(1) $$\cos\theta = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

In cazul când triedrul are feţele egale cu 60^0, rezultă:

(2) $$\cos\theta = \frac{1}{3} \quad , \quad \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

B) Fie două plane neparalele, a căror urme pe un plan perpendicular pe intersecţia lor, sunt OX, OY şi un punct M în acest din urmă plan, a cărui distanţe la cele două plane, recte la cele două drepte OX, OY sunt y şi x. Se calculează uşor

(3) $OM^2 = \dfrac{x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta}{\sin\theta}$, unde θ e unghiul OX, OY.

Când triedrul are unghiurile feţelor laterale egale cu 60^0, formula (3) se scrie:

(4) $$OM^2 = \frac{3}{8}[3x^2 + 3y^2 + 2xy].$$

C) Fie acum un tetraedru SABC de volum V. Notăm:

$SA = \alpha$, $SB = \beta$, $SC = \gamma$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Folosind formula: $6V = \alpha\beta\gamma \sin S$, unde S e unghiul triedru cu vârful în S, iar:

$$\sin^2 S = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta, \gamma) & \cos(\gamma, \alpha) \\ \cos(\beta, \gamma) & 1 & \cos(\alpha, \beta) \\ \cos(\gamma, \alpha) & \cos(\alpha, \beta) & 1 \end{vmatrix}$$

(β, γ) fiind unghiul format de muchiile β şi γ, vom găsi volumul tetraedrului SABC în funcţie de muchii:

$$(5)\quad 144V^2=\Sigma a^2(\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)+\Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2)\alpha^2-a^2b^2c^2.$$

Inafară de cadrul acestui articol, să particularizăm formula (5). Dacă S e în planul triunghiului ABC, $V=0$ şi rezultă relaţia generală care leagă distanţele unui punct din planul unui triunghiu la vârfurile acestuia:

$$(6)\quad \Sigma a^2(\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)+\Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2)-a^2b^2c^2=0.$$

Sau, în definitiv, relaţia ce leagă laturile şi diagonalele unui patrulater plan oarecare. Intr'adevăr, făcând schimbările de notaţii indicate, putem enunţa:

„Intre laturile a, b, c, d şi diagonalele e, f ale unui patrulater plan *oarecare* există relaţia:

$$(7)\quad e^2f^2(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2)+e^2(b^2-c^2)(d^2-a^2)+$$
$$+f^2(c^2-d^2)(a^2-b^2)-(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2c^2-b^2d^2)=0$$

unde e uneşte intersecţia (a, d) cu (b, c).

D) Revenim la formula (4) şi notând cu x, y, z, t distanţele unui punct M faţă de feţele $A_1B_1C_1$, $S_1B_1C_1$, $S_1C_1A_1$, $S_1A_1B_1$, ale unui tetraedru echilateral, iar cu α, β, γ, a, b, c, distanţele aceluiaşi punct M la muchiile S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, găsim:

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha^2=\frac{3}{8}[3y^2+3z^2+2yz], & a^2=\frac{3}{8}[3t^2+3x^2+2tx] \\ \beta^2=\frac{3}{8}[3z^2+3x^2+2zx], & b^2=\frac{3}{8}[3t^2+3y^2+2ty] \\ \gamma^2=\frac{3}{8}[3x^2+3y^2+2xy], & c^2=\frac{3}{8}[3t^2+3z^2+3tz]. \end{cases}$$

Rămâne să dovedim realitatea tetraedrului SABC construit cu lungimele α, β, γ, a, b, c.

Deosebim mai multe cazuri:

a) Faţa ABC e formată cu lungimile a, b, c. Suprafaţa va fi:

$$\frac{64}{9}\cdot 16S^2=-\Sigma a^4+2\Sigma b^2c^2,$$

unde a, b, c au valorile date de (8).

Presupunem un caz particular, când $t = 0$, (M e în planul ABC). In acest caz:

$$\frac{64}{9} \cdot 16S^2 = 9(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Deci pentru punctele dinafara triunghiului median al triunghiului ABC suprafaţa S e imaginară. Nu se poate construi întotdeauna tetraedrul în care una din feţe e formată cu lungimile a, b, c, iar celelalte cu celelalte combinaţiuni posibile între a, b, c şi α, β, γ.

b) Faţa ABC e formată cu lungimile a, α, β.

Pesupunem $z = 0$, şi avem valoarea suprafeţei ABC:

$$\frac{64}{9} \cdot 16S^2 = -9(t^2 - x^2)^2 - 4t^2x(x+3t) + 12z^2x(t+3x).$$

De unde se deduce că pentru $-3t < x < -t/3$, suprafaţa S e imaginară. Aceeaşi concluzie ca la (a).

c) Faţa ABC e formată cu lungimile α, a, b. Presupunem $t = 0$ şi din valoarea suprafeţei se conclude ca la (a) şi (b).

d) Faţa ABC e formată cu lungimile α, β, γ. După ce facem toate calculele cerute, găsim:

$$\frac{64}{9} \cdot 16S^2 = 16[\Sigma x^2(y+z)^2 > 0.$$

Suprafaţa $S = (\alpha\beta\gamma)$ e întotdeauna reală. La fel suprafeţele $S_a = (\alpha ab)$, $S_b = (a\beta c)$, $S_c = (abc)$.

Rămâne să demonstrăm realitatea volumului tetradrului SABC. In formula (5) schimbăm pe (α, a) (β, b) şi (γ, c) între ei:

$$(9) \qquad 144V^2 = \Sigma\alpha^2(c^2-a^2)(a^2-b^2) + \Sigma\alpha^2(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2$$

şi folosim rezultatele dela (8). Se fac toate calculele indicate şi găsim:

$$512 \times 144V^2 = 27(\lambda t^2 + \mu t + \nu),$$

unde:

$$\lambda = 64(\Sigma yt)^2 \quad , \quad \mu = 128xyz(\Sigma yt) \quad , \quad \nu = 64x^2y^2z^2.$$

S'au în definitiv:

$$(10) \qquad 128V^2 = (xyz + yzt + zxt + xyt)^2 > 0.$$

Concluzia:

„Cu distanțele unui punct la muchiile unui tetraedru echilateral se poate întotdeauna construi un tetraedru".

Tetraedrul rezultat e degenerat în patru puncte coplanare când punctul M descrie suprafața cubică:

$$(11) \qquad xyz + yzt + zxt + xyt = 0$$

care conține cele 6 muchii ale tetraedrului echilateral și este transformata prin puncte reciproce a planului dela infinit față de tetraedrul echilateral fundamental.

O concluzie secundară rezultată din ultimul paragraf este:

„Cu distanțele unui punct la muchiile unui triedru cu unghiurile laterale egale cu 60^0 se poate întotdeauna construi un triunghiu".

Ca aplicație a se vedea problema 5755 propusă la pag. 287, Vol. XLVIII al *Gazetei Matematice* care, prin acest articol se consideră rezolvat. Vom publica însă cu plăcere orice soluție diferită de cea din acest articol.

I. C. VASILIU.

O PROBLEMĂ CU PATRATE

In problema 3565, propusă de D-l EM. G. GAIU și rezolvată, pe o cale lungă și anevoioasă, în G. M., Vol. XLIV, pag. 593—597, se cereau patratele de 5 cifre de forma

$$(1) \qquad N^2 = abcde \ , \quad M^2 = bcdea$$

Forma simplă a acestor două patrate îmi sugerează un mod simplu de a determina numerile M și N.

Din (1) se deduce

$$(2) \qquad 10N^2 - M^2 = (10^5 - 1)\, a$$

unde a ar putea avea valorile 0, 1, 4, 5, 6, 9, însă $a=0$ conduce la relația $10N^2 = M^2$ imposibilă în numere întregi diferite de 0, iar $a = 5$ la

$$10N^2 - M^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 5)$$

$$\therefore \qquad M = 5Q \quad \text{și} \quad 2N^2 - 5Q^2 = 10^5 - 1$$

deci

$$2N^2 \equiv -1 \ , \quad N^2 \equiv -3 \equiv 2 \qquad (\text{mod. } 5)$$

care iarăşi este imposibilă şi prin urmare valorile probabile ale lui a sunt 1, 4, 6, 9. Ecuaţia (2) este o aşa zisă ecuaţie PELL a cărei rezolvare, când a este dat, este cunoscută. In cele ce urmează voi rezolva-o bazându-mă pe faptul că divizorii primi ai formei patratice, $(10N^2 - M^2)$ care nu divid pe M sau N, au pe 10 ca rezidiu patratic deci sunt de una din formele lineare:

$$40k+a \quad \text{cu} \quad a=1,\ 3,\ 9,\ 13,\ 27,\ 31,\ 37,\ 39.$$

Dintre aceştia cei corespunzători lui a egal cu 1, 9, 31 şi 39, care au în acelaşi timp şi pe 2 şi pe 5 ca rezidiuri patratice pot intra simpli în descompunerea lui $10N^2 - M^2$, deci se pot pune şi ei sub o formă analoagă: $(m^2 - 10n^2)$. Ceilalţi care au pe 2 şi 5 nereziduri, intră asociaţi 2 câte 2 şi deşi fiecare în parte nu se poate pune sub forma $m^2 - 10n^2$, produsul a 2 din ei este de o astfel de formă.

Scriu pe (2) astfel:

$$(3) \qquad M^2 - 10N^2 = -11111 \times 9a = -9 \times 41 \times 271a$$

Iată formele patratice $(m^2 - 10n^2)$ cu modul minim de $m.n$ ale lui 41 şi 271.

$$41 = 9^2 - 10.2^2 \qquad 271 = 19^2 - 10.3^2.$$

Două astfel de forme se pot combina după formula:

$$(4) \quad (m^2 - 10n^2)(a^2 - 10b^2) = (ma \pm 10nb)^2 - 10(mb \pm na)$$

deci:

$$41 \times 271 = (9.19 - 10.2.3)^2 - 10(9.3 - 19.2)^2 = 111^2 - 10.11^2$$

$$41 \times 271 = (9.19 + 10.2.3)^2 - 10(9.3 + 19.2)^2 = 231^2 - 10.65^2$$

Fie (x, y) o soluţie în numere întregi a ecuaţiei:

$$(5) \qquad x^2 - 10y^2 = -9a.$$

Soluţiile în numere întregi ale ecuaţiei (3) sunt

$$(I) \begin{cases} M = (111x + 110y) \\ N = (111y + 11x) \end{cases} \qquad (II) \begin{cases} M = (231x + 650y) \\ N = (231y + 65x) \end{cases}$$

unde x şi y pot fi pozitivi sau negativi. Pentru problema ce ne interesează M şi N trebuie să fie mai mici decât 317 deoarece M^2 şi N^2 au cel mult 5 cifre. In cazul soluţiilor (I) ne vom limita la

$$\begin{matrix} |111x+110y| < 317 \\ |111y+11x\ | < 317 \end{matrix} \quad \therefore \quad |y| < \frac{317\ (111+11)}{11111} < 4$$

iar în cazul soluţiilor (II), găsim în mod analog $|y| \leqslant 8$. In felul acesta numărul încercărilor de făcut este sensibil micşorat.

Dacă $a=1$ ecuaţia (5) are soluţiile (1,1) ; (9,3) ; (79,25)... care încercate în (I) şi II ne dau soluţiile:

$$1^2 - 10 \cdot 100^2 = -99999 \qquad 221^2 - 10 \cdot 122^2 = -99999$$

$$129^2 - 10 \cdot 108^2 = -99999.$$

Dacă $a=4$ ecuaţia (5) are soluţiile (2,2) ; (18,6) etc... şi din (I) şi (II) deducem:

$$2^2 - 10 \cdot 200^2 = -99999 \times 4 \qquad 258^2 - 10 \cdot 216^2 = -99999 \times 4.$$

Pentru $a=6$ ecuaţia (5) e satisfăcută de (6,3) ; (14,5) ; (66,21)... care pentru $x=14$ $y=-5$ în forma (II) ne dă soluţia

$$16^2 - 10 \cdot 245^2 = -99999 \times 6.$$

Ecuaţia $x^2 - 10y^2 = -9 \times 9$ este rezolvată în numere întregi de (3,3) ; (13,5) ; (27,9) etc.... Pentru $x=3$, $y=-3$ în I şi $x=3$, $y=-5$ în II, găsim soluţiile:

$$3^2 - 10 \cdot 300^2 = -99999 \times 9 \qquad 247^2 - 10 \cdot 310^2 = -99999 \times 9$$

Am regăsit astfel toate cele 8 soluţiuni conţinute în tabloul dela pag. 596, Vol. XLIV, *Gazeta Matematică.*

Imi propun acum să examinez problema generalizată:

Să se găsească patratele de p *cifre, care rămân tot patrate când mutăm prima cifră dela stânga la dreapta patratului.*

Ecuaţia (3) în cazul general, devine:

$$(6) \qquad M^2 - 10 \cdot N^2 = -(10^p - 1)\ a.$$

Pentru ca (6) să fie posibilă în numere întregi trebuie ca divizorii lui $(10^p - 1)a$ să fie de forma $m^2 - 10n^2$, adică să aibă pe 10 ca rezidiu cuadratic. In cazul când $p = 2r + 1$, avem:

$$(7) \qquad -(10^p - 1) = 1 - 10.(10^m)^2$$

şi deci toţi divizorii lui sunt de forma $m^2 - 10n^2$, problema ce ne-am propus ar putea avea soluţii şi în adevăr are, deoarece din (7) deducem soluţiile banale:

$$(8) \quad \begin{cases} N = (10^m)^2 \\ M = 1^2 \end{cases} \quad \begin{cases} N = (2.10^m)^2 \\ M = 2^2 \end{cases} \quad N = (3.10^m)^2 \quad M = 3^2.$$

In cazul $p = 2m$, $10^{2m} - 1$ se divide cu $10^2 - 1 = 9 \times 11$, ori 11 nu are ca rezidiu patratic pe 10, deci în general pentru $p = 2m$ problema nu are soluţie afară poate de cazul când $10^{2m} - 1$ se divide cu o putere pară a lui 11 şi când putem elimina pe 11 luând $M = 11^a M_1$ şi $N = 11^a N_1$. Cel mai mic număr de forma $(10^{2m} - 1)$ care se divide cu 11^2 este $(10^{22} - 1)$, toate numerile de acest fel care se divid cu 11^2 sunt deci $(10^{22k} - 1)$. Insă $10^{22k} - 1$ este, conform teoremei lui FERMAT, divizibil cu 23, care şi el nu are pe 10 ca rezidiu patratic. Prin urmare nu am putea avea eventual soluţii decât printre numerile $10^{42 \times 23k} - 1$ care se divid cu 23^2, dar şi cu 47 care nu are de asemenea pe 10 ca rezidiu patratic, deci $k = 47\,l$ şi $p = 2m = 2 \times 11 \times 23 \times 47l = 22782\,l$. Am putea merge mai departe căutând alţi divizori ai lui $(10^p - 1)$ care nu au pe 10 ca rezidiu cuadratic, ne oprim însă aici. Concluzia care rezultă din cele de mai sus este:

Nu există patrate de $p = 2m$ cifre, astfel încât schimbându-le cifra dela stânga la dreapta să rămâe tot patrate, decât eventual pentru $p = 23782\,l$.

Revenind la valorile lui p impare, observăm că înafară de (8) problema mai are o soluţie pentru orice $p = 2m + 1$ ce se deduce din forma:

$$\frac{10^{2m+1} - 1}{9} = \left(\frac{10^{m+1} - 1}{9}\right)^2 - 10\left(\frac{10^m - 1}{9}\right)^2$$

valabilă pentru orice $m > 0$, combinată cu forma:

$$-9 = 1^2 - 10.1^2$$

această soluţie este:

$$(9)\begin{cases} N = \dfrac{10^{m+1}-1}{9} + \dfrac{10^m-1}{9} = \dfrac{10^{m+1}+10^m-2}{9} = \underbrace{1222\ldots2}_{\text{de } m \text{ ori}} \\ M = \dfrac{10^{m+1}-1}{9} + 10\dfrac{10^m-1}{9} = \dfrac{2.10^{m+1}-11}{9} = \underbrace{22\ldots21}_{\text{de } m \text{ ori}} \end{cases}$$

remarcabilă prin aceea că M se obţine din N, aşa cum M^2 se obţine din N^2.

Găsirea celorlalte soluţiuni pentru diverse valori ale lui $p = 2m+1$ se face la fel ca şi pentru cazul $p = 5$ studiat mai sus. Este de observat că pentru $p = 19$ şi $p = 23$ numerile $(10^p - 1)/9$ sunt prime, cum a arătat D-l KRAITCHIK *), deci pentru aceste valori nu mai există alte soluţii înafară de cele deduse din (8) şi (9).

Pentru $p = 7$, înafară de (8) şi (9) am mai găsit

$N^2 = 1014^2 = 1028196$, $N^2 = 2028^2 = 4112784$, $N^2 = 3042^2 = 9253764$

$M^2 = 531^2 = 281961$, $M^2 = 1062^2 = 1127844$, $M^2 = 1539^2 = 2537649$.

Pentru $p = 9$

$N^2 = 11802^2 = 139287204$, $N^2 = 10020^2 = 100400400$

$M^2 = 19821^2 = 392872041$, $M^2 = 2001^2 = 4004001$

$N^2 = 20040^2 = 401601600$, $N^2 = 30060^2 = 903603600$

$M^2 = 4002^2 = 16016004$, $M^2 = 6003^2 = 36036009$

Pentru $p = 13$

$\begin{cases} N^2 = 1042194^2 = 1086168333636 \\ M^2 = 928269^2 = 861683336361 \end{cases}$, $\begin{cases} N^2 = 2084388^2 = 4344673334544 \\ M^2 = 1856538^2 = 3446733345444 \end{cases}$

$\begin{cases} N^2 = 2469761^2 = 6099719397121 \\ M^2 = 998596^2 = 997193971216 \end{cases}$, $\begin{cases} N^2 = 3126582^2 = 9775515002724 \\ M^2 = 2784807^2 = 7755150027249 \end{cases}$

I. B. FLORESCU

*) KRAITCHIK. *Recherches sur la Théorie des nombres.* Paris 1924.

CILINDRUL ANALLAGMATIC.

INTRODUCERE.

1°. E vorba de o familie ∞^2 de cercuri, prezentând cea mai mare analogie cu suprafaţa bine cunoscută a cilindrului de revoluţie şi care, de aceea, propun să fie numită *cilindrul anallagmatic.*

Se ştie că transformările punctuale cele mai generale, din plan, care păstrează unghiurile de tăiere ale curbelor şi transformă cercurile, în cercuri, formează un grup cu şase parametri G_6, numit grupul transformărilor circulare, sau grupul lui MÖBIUS sau, în sfârşit, grupul anallagmatic. Intregul grup poate fi generat numai prin inversiuni de modul pozitiv (simetrii circulare) al căror număr poate fi redus totdeauna la maximum 3 sau 4.

Acest grup G_6 (sau, mai de grabă, sub-grupul său direct G_6^* pune în evidenţă un subgrup G_2 care lasă două puncte fixe şi diferite A, B în repaus. Structura lui G_2 nu e simplă.

Intr'adevăr G_2 se prezintă ca produsul direct a două subgrupuri de câte un parametru G_1' şi G_1'', formate respectiv din totalitatea mişcărilor eliptice şi totalitatea mişcărilor iperbolice [1]) de poli A şi B.

Un model elementar al lui G_2 îl obţinem luând $B = \infty$, unde ∞ e punctul dela infinit al planului anallagmatic. Grupul G_2 devine grupul asemănărilor directe de pol A, iar G_1' şi G_1'' respectiv grupul rotaţiilor şi grupul omotetiilor de centru A.

Să considerăm acum un cerc anallagmatic Γ_0 (un cerc sau o dreaptă) care nu trece prin A sau B. Mulţimea celor ∞^2 de transformate ale lui Γ_0 în G_2 e ceeace numim *cilindru anallagmatic de poluri* A, B. Aceste cilindre sunt de specia I sau II după cum cercurile corespunzătoare lasă de o parte şi de alta, sau de aceeaşi parte, polurile A, B.

2°. Cilindrul de revoluţie admite o definiţie în strânsă analogie cu definiţia de mai sus a cilindrului anallagmatic.

Fie D o dreaptă din spaţiu. Grupul deplasărilor g_6 admite un subgrup g_2 care lasă dreapta D invariantă şi care se descompune în produsul direct $g_1' \times g_1''$ al rotaţiilor de axă D şi al translaţiilor

1) In cazul limită când A = B grupul G_2 se compune din ∞^2 mişcări parabolice, de pol A.

paralelă cu D. Suprafaţa născută de transformatele unui punct P_0, exterior lui D, în grupul g_2, este un cilindru de revoluţie de axă D.

Această analogie poate fi împinsă până la identitate, dacă ne mărginim la cilindrul anallagmatic de speţa II şi la geometria (anallagmatică) intrinsecă a acestuia.

Într'adevăr, să considerăm modelul elementar, de poli: punctul ∞ şi originea coordonatelor O, al unui astfel de cilindru. Coordonatele centrului şi raza unui cerc general Γ sunt de forma:

$$\alpha = (a\cos v + b\sin v)\,u \quad ; \quad \beta = (-a\sin v + b\cos v)\,u \quad ; \quad \rho = ru,$$

unde a, b, $r \neq o$ sunt constante iar u şi v doi parametri variabili. Distanţa centrelor S a două cercuri u_1, v_1 şi u_2, v_2 ale familiei este dată de

$$\delta^2 = (a^2 + b^2)\left[(u_1 - u_2)^2 + 4u_1 u_2 \sin^2 \frac{v_1 - v_2}{2}\right]$$

cum arată un calcul uşor. Formula cunoscută, din trigonometrie, ne dă pentru unghiul $s_1 - s_2$, opus laturii δ în triunghiul de laturi δ, ρ_1, ρ_2:

$$\sin^2 \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{(a^2+b^2-r^2)\,(u_1-u_2)^2 + 4\,(a^2+b^2)\,u_1 u_2 \sin^2 \dfrac{v_1 - v_2}{2}}{4r^2 u_1 u_2}.$$

Când cele două cercuri de pe cilindrul anallagmatic sunt infinit vecine, formula devine

$$ds^2 = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{r^2}\left(\frac{du}{u}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\,dv^2.$$

Dacă cilindrul anallagmatic e de speţa II, atunci forma patratică diferenţială precedentă e pozitiv definită, căci avem

$$a^2 + b^2 - r^2 > 0.$$

Făcând schimbarea de coordonate

$$U = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{r}\,Lu \quad , \quad V = \frac{v}{r}$$

elementul de arc devine

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

deci cilindrul anallagmatic, metrizat cu elementul de unghiu, e aplicabil pe planul euclidian şi deci pe cilindrul de revoluţie.

Dacă cilindrul anallagmatic e de speţa I, aşa dar $a^2 + b^2 - r^2 < 0$, el e aplicabil pe planul pseudoeuclidian şi deci nu mai putem vorbi de o aplicabilitate pe cilindrul de revoluţie (real).

Dar ceva mai mult. Cilindrul anallagmatic, de o speţă sau alta, e echivalent topologic cu cilindrul de revoluţie căci, considerat ca varietate topologică cu două dimensiuni are, întocmai ca suprafaţa cilindrului de revoluţie, numai două clase de drumuri închise: unele care se reduc prin deformare continuă la un punct, celelalte care nu sunt deformabile, cu continuitate, până la un punct.

In modelul elementar, de poli A, ∞, al cilindrului anallagmatic, seriile închise de cercuri al căror centru nu înconjoară polul A, dau prima clasă de drumuri; cele al căror centru încojoară pe A, a doua clasă.

Suntem aşa dar îndreptăţiţi să afirmăm că geometria metrică *globală* pe cilindrul anallagmatic de speţa II coincide în totul cu geometria metrică globală pe cilindrul de revoluţie. Aceasta îl apropie de cilindrul din spaţiul lui BOLYAI-LOBACEFSKY, îl separă însă de suprafaţa lui CLIFORD din spaţiul eliptic, aplicabilă şi ea pe planul euclidian, dar care are 3 clase distincte de drumuri (închise).

Toate desvoltările de mai sus, care de altfel nu sunt necesare pentru înţelegerea paragrafelor următoare, arată într'adevăr că denumirea de *cilindru anallagmatic* se impune.

In cele ce urmează, îmi propun să arăt legătura acestei figuri remarcabile cu teoria elementară a conicelor şi a curbelor de clasa treia tangente dreptei dela infinit. In cazuri particulare şi în mod incidental, aceste proprietăţi au mai fost menţionate în articolele mele anterioare din această revistă.

§ 1. Invariantul anallagmatic, fundamental, al figurii formată din două puncte şi un cerc.

3°. **Teoremă.** *Figura constituită din două puncte diferite* A, B *şi un cerc* Γ *care nu trece prin niciunul din ele, admite un invariant anallagmatic fundamental* [1]).

Justificarea e imediată. Fie S o inversiune de pol B. Figura A, B, Γ se transformă prin S în figura A*, ∞, Γ*. Orice

1) Aceasta înseamnă că toţi invarianţii anallagmatici ai figurii A, B, Γ sunt funcţiuni de unul, anume, dintr'înşii şi deci două figuri cu acelaşi invariant fundamental sunt anallagmatic-echivalente.

invariant al ultimei figuri față de grupul anallagmatic G_6^+ e în același timp un invariant al figurii reduse A*, Γ* față de subgrupul G_4 care lasă punctul ∞ în repaos, și — reciproc.

Însă G_4 transformă dreptele, în drepte, și păstrează unghiurile, coincide așadar cu grupul asemănărilor directe ale planului. E clar însă că A*, Γ* are, față de asemănările planului, un singur invariant: de exemplu, unghiul sub care Γ* se vede din A* sau raportul dintre distanța la centru a lui A* și rază, căci două figuri A_1^*, Γ_1^* și A_2^*, Γ_2^* cu un asemenea număr, în comun, sunt echivalente în G_4.

Deci toți invarianții lui A*, Γ* față de G_4 sunt funcțiuni de unul anume dintr'înșii. Această concluzie se extinde, cum am arătat, asupra invarianților lui A*, ∞, Γ* în G_6^+, deci asupra invarianților lui A, B, Γ, tot în G_6^+.

Consecință. *Două cercuri* Γ_0 *și* Γ *care au, fiecare, cu punctele* A, B, *același invariant fundamental, se găsesc pe același cilindru anallagmatic, de poli* A, B.

Aplicând inversiunea S, de mai sus, obținem două figuri A*, Γ_0^* și A*, Γ*, echivalente în subgrupul G_2^* de asemănări directe care lasă pe A* în repaus. Deci A, B, Γ_0 și A, B, Γ sunt echivalente în subgrupul $G_2 = S\, G_2^*\, S$ care lasă pe A și B în repaus.

4°. Să trecem în revistă câțiva invarianți anallagmatici ai figurii A, B, Γ.

Avem întâiu unghiul Λ_0 sub care se taie cele două cercuri duse prin A, B, tangente la Γ. Acest unghiu e real sau imaginar după cum cercul Γ nu desparte sau desparte punctele A, B.

Un al doilea invariant se definește cu ajutorul cercului γ dus prin A, B ortogonal la Γ. Dacă U, V sunt punctele de sprijin ale lui γ, pe Γ, introducem expresiunea

$$\Lambda_1 = L\,(ABUV)_\gamma$$

unde $(ABUV)_\gamma$ înseamnă raportul anarmonic al punctelor indicate pe cercul γ.

Invarianța anallagmatică a mărimilor Λ_0 și Λ_1 nu are nevoie să fie dovedită. Reiese imediat din proprietățile bine cunoscute ale inversiunilor.

Pentru definirea elementară a invariantului Λ_2, care urmează, avem de deosebit trei cazuri:

1. Cazul general, în care Γ e un cerc elementar iar A, B, amândouă, diferite de ∞.

Avem atunci

$$(1) \qquad \Lambda_2 = \frac{p \cdot q}{r \cdot s},$$

unde p^2, q^2 sunt respectiv puterile lui A, B față de Γ, r raza lui Γ iar $s = AB$.

Invarianța lui Λ_2 se probează cu ajutorul formulelor de transformare prin inversiune, ușor de stabilit:

$$p^* = \frac{k}{\omega \cdot \alpha} p \quad , \quad q^* = \frac{k}{\omega \cdot \beta} q,$$

$$r^* = \frac{k}{\omega^2} r \quad , \quad s^* = \frac{k}{\alpha\beta} s,$$

unde α, β sunt distanțele polului O de inversiune (nesituat pe Γ) la A, B, unde k e modul de inversiune iar ω puterea lui O față de Γ.

2. Cazul în care Γ e un cerc elementar, $A \neq \infty$ iar $B = \infty$. Formula (1) trebuie înlocuită cu

$$(2) \qquad \Lambda_2 = \frac{p}{r}$$

cum ușor se poate verifica.

3. Cazul în care Γ se reduce la o dreaptă iar $A, B \neq \infty$. Formula (1) se înlocuiește cu

$$(3) \qquad \Lambda_2 = 2\frac{\sqrt{\pi \cdot x}}{s}$$

unde $s = AB$ iar π, x înseamnă distanțele lui A, B la dreapta Γ.

Prezentarea formulelor (2) și (3) ca forme speciale ale lui (1) se face prin considerații de trecere la limită, asupra cărora nu insistăm.

In sfârșit: un ultim invariant, a cărui importanță pentru cercetarea din § 3 se va recunoaște la timp.

Fie A', B' punctele imaginar-conjugate care complectează pe A, B până la un patrulater isotrop AA'BB'. Insemnăm cu p, q, p', q' rădăcinile patrate ale puterilor lui A, B, A', B' față de Γ. Expresiunea

$$(4) \qquad \Lambda = \frac{p \cdot q}{p' \cdot q'}$$

este un invariant anallagmatic al figurii A, B, Γ. Intr'adevăr punctele A', B' covariază anallagmatic împreună cu A, B. Considerând atunci o inversiune S şi formulele de transformare date mai sus, avem

$$(5) \qquad \Lambda^* = \frac{\alpha' \cdot \beta'}{\alpha \cdot \beta} \Lambda.$$

Dar între distanţele polului O la vârfurile patrulaterului isotrop AB'BB' avem, cum se ştie

$$\alpha \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta'.$$

Deci invarianţa anallagmatică a lui Λ e dovedită. In cele ce urmează vom avea să ne ocupăm numai de formaţiuni Λ relative la puncte A, B situate la distanţă finită. Deci singurul caz particular ce avem de considerat e acela în care Γ se reduce la o dreaptă. Expresiunea lui Λ trebuie înlocuită atunci cu

$$(6) \qquad \Lambda = \sqrt{\frac{\pi \cdot x}{\pi' \cdot x'}}$$

unde π, x, π', x' sunt distanţele lui A, B, A', B' la Γ.

5°. In virtutea teoremei dela alineatul 3° invarianţii Λ_0, Λ_1, Λ_2, Λ sunt funcţiuni de unul, anume, dintr'înşii, de exemplu Λ_0. Folosind figuri reduse, prin particularizarea unuia din punctele importante din figură (anume prin identificarea cu ∞) obţinem dela caz, la caz, cu ajutorul unui calcul uşor pe care îl lăsăm în seama cititorului, formulele:

$$(7) \quad \operatorname{tgh} \frac{\Lambda_1}{2} = \sin \frac{\Lambda^0}{2} \qquad (8) \quad \Lambda_2 = \operatorname{cotg} \frac{\Lambda_0}{2}, \qquad (9) \quad \Lambda = \cos \frac{\Lambda_0}{2}.$$

§ 2. Cilindrul anallagmatic, ca loc al cercurilor lui Poncelet relative la o conică cu centru.

6°. Fie F o conică cu centru, de focare A, B. Numim *cerc a lui* PONCELET asociat lui F un cerc care are cu F un triunghiu (şi deci o infinitate) respectiv înscris şi circumscris. E uşor de recunoscut că totalitatea cercurilor lui PONCELET asociate unei conice formează o familie continuă cu doi parametri. Vrem să demonstrăm următoarea

Teoremă. *Cercurile lui* PONCELET *asociate unei conice cu centru formează un cilindru anallagmatic.*

Demonstrația e foarte simplă, cu ajutorul principiilor puse în alineatele precedente.

Fie $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ trei tangente generale la conica F. Insemnăm cu P_1, P_2, P_3 punctele lor de intersecție iar cu Γ, cercul $P_1P_2P_3$. Lăsăm Δ_2, Δ_3 fixe și facem pe Δ_1 să varieze dealungul conicei. Aplicăm figurii o inversiune S de pol P_1 care transformă pe P_2, P_3 în punctele P_2^*, P_3^*, variabile pe dreptele fixe Δ_2, Δ_3.

Cum P_2, P_3 variază într'o omografie în care punctele dela infinit nu se corespund (conica F nu e o parabolă), e clar că P_2^*, P^* descriu două diviziuni omografice, în care P_1 nu e propriul lui omolog. Așadar dreapta Γ^* determinată de P_2^*, P_3^* înfășoară o conică propriu zisă Φ, tangentă la Δ_2, Δ_3.

Se știe că, într'o inversiune, dreptele isotrope se corespund, cu permutarea speciei. De aici rezultă că tangentelor isotrope P_2P_3 ale lui F corespund tangente isotrope $P_2^*P_3^*$, ale lui Φ. Deci focarelor (reale) A, B ale lui F corespund focarele (reale) A*, B* ale lui Φ.

Să însemnăm cu π^*, x^* distanțele focarelor A*, B* la tangenta mobilă Γ. Avem, cum se știe

$$\pi^* \cdot x^* = c^{tă},$$

și deci, în virtutea formulei (3)

$$\Lambda_2 = c^{tă}, \tag{10}$$

unde Λ_2 e invariantul fundamental al figurii A*, B*, Γ^*, evident egal cu acela al figurii inverse A, B, Γ.

Deci invariantul Λ_2 al figurii A, B, Γ nu se schimbă, când fixăm două din tangentele $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, făcând să varieze cea de a treia. E clar însă că putem trece totdeauna dela o ternă generală de tangente $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, la alta particulară $\Delta_1^0, \Delta_2^0, \Delta_3^0$, prin trei astfel de procese elementare. Așa dar

$$\Lambda_2 = \Lambda_2^0 = c^{tă} \tag{10'}$$

pentru toate figurile ce se pot forma cu focarele A, B și cu un cerc al lui PONCELET Γ, asociat lui F.

Potrivit celor arătate în § 1, aceasta înseamnă că familia continuă și dublu infinită a cercurilor lui PONCELET Γ, formează un cilindru anallagmatic de poluri A, B. Teorema e demonstrată.

Să observăm că Δ_2 e o tangentă a lui Φ invariantă faţă de inversiunea S. Ca atare, invariantul ei Λ_2 faţă de A*, B*, care are valoarea din (10), păstrează aceeaşi valoare când înlocuim pe A*, B* prin A, B. Dar valoarea din (10) e evident aceeaşi cu valoarea constantă Λ_2^0 din (10'). Cum Δ_2 e o tangentă generală a conicei F, conchidem:

Tangentele conicei F *considerate ca cercuri anallagmatice, fac parte din cilindrul anallagmatic al cercurilor lui* PONCELET. *Reciproc, toate dreptele conţinute în acest cilindru anallagmatic sunt date de tangentele lui* F.

De aici urmează, între altele, următoarea complectare a teoremei demonstrate:

Cilindrul anallagmatic al cercurilor lui PONCELET *este de speţa* I *când conica* F *e iperbolă şi de speţa* II, *când* F *e elipsă.*

Intr'adevăr, o tangentă a iperbolei desparte focarele, pe când o tangentă a elipsei le lasă de aceeaşi parte.

7°. Momentul hotărîtor al demonstraţiei precedente, anume faptul că dreapta Γ^* determinată de punctele P P înfăşură o conică Φ tangentă la Λ_2, Λ_3, cu focarele în chiar inversele A*, B* ale lui A, B, poate fi stabilită pe cale strict elementară.

Pornim dela următoarea relaţie evidentă, în unghiuri vectore modulo π:

$$\overline{P_2P_1P_3} + \overline{P_1P_3A} + \overline{P_3AP_2} + \overline{AP_2P_1} = 0.$$

Considerăm cercurile δ_2 şi δ_3 determinate respectiv de punctele AP_2P_1 şi AP_3P_1. Fie P_1T_2 şi P_1T_3 tangentele în P_1 la δ_2 şi δ_3.

Avem succesiv

$$\overline{T_2P_1T_3} = \overline{T_2P_1A} + \overline{AP_1T_3} = \overline{P_1P_2A} + \overline{AP_3P_1}$$

sau ţinând seamă de relaţia precedentă

$$\overline{T_2P_1T_3} = \overline{P_2P_1P_3} + \overline{P_3AP_2} = c^{tă}$$

căci segmentul P_2P_3, interceptat de tangentele fixe Δ_2, Δ_3 pe tangenta mobilă Δ_1, se vede din focarul A sub un unghiu constant.

Aplicând inversiunea S, cercurile δ_2 şi δ_3 se transformă în dreptele $A^*P_2^*$ şi $A^*P_3^*$ care fac între ele un unghiu egal cu $\overline{T_2P_1T_3}$ şi deci constant. E clar aşa dar că $P_2^*P_3^*$ înfăşură o conică Φ tangentă la Δ_2, Δ_3 şi cu un focar în A*. La fel se arată că al doilea focar al conicei este inversul B* al lui B.

8°. **Teoremă.** *Fie* Γ_1, Γ_2, Γ_3 *trei cercuri ale unui cilindru anallagmatic, care trec printr'un punct* P_0, *diferit de poluri. Cercul* Γ_0 *determinat de celelalte intersecţii* P_1, P_2, P_3 *ale acestor cercuri, luate câte două, aparţine cilindrului anallagmatic.*

Considerăm cazul particular în care $P_0 = \infty$. Prin ipoteză, atunci $A \neq \infty$, $B \neq \infty$. Cercurile Γ_1, Γ_2, Γ_3 se reduc la drepte.

Introducem conica F de focare A, B şi de tangentă Γ_1. Dreptele Γ_2, Γ_3 sunt şi ele tangente conicei F căci au faţă de A, B acelaşi invariant Λ_2 ca Γ_1. Cercul Γ_0 e deci un cerc al lui PONCELET asociat conicei F şi, ca atare, în virtutea teoremei din alineatul precedent, face parte, împreună cu Γ_1, Γ_2, Γ_3, dintr'un cilindru anallagmatic de poli A, B. Acest cilindru coincide însă cu cilindrul dat, căci are în comun cu acesta polii A, B şi un cerc (de exemplu Γ_1). Teorema e demonstrată în cazul particular considerat.

Cazul general se reduce la precedentul. Intr'adevăr, să presupunem $P_0 \neq \infty$ şi să transformăm figura cu ajutorul unei inversiuni S de pol P_0. E clar că A, B se transformă în două puncte $A^* \neq \infty$, $B^* \neq \infty$, căci prin ipoteză $A \neq P_0$, $B \neq P_0$. Cercurile Γ_1, Γ_2, Γ_3 devin dreptele Γ_1^*, Γ_2^*, Γ_3^* iar cilindrul anallagmatic H, dat, se înlocuieşte cu un altul H*.

In virtutea primului caz considerat, cercul Γ_0^* care trece prin intersecţiile P_1^*, P_2^*, P_3^* ale dreptelor Γ_1^*, Γ_2^*, Γ_3^* aparţine lui H*. Aşa dar Γ_0 care trece prin P_1, P_2, P_3, din enunţ, aparţine lui H.

9°. Teorema precedentă e bogată în aplicaţii. Iată două din ele.

Fiind date patru puncte P_0, P_1, P_2, P_3, nesituate pe acelaş cerc, şi trei, câte trei, necolineare, considerăm cercurile Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3 determinate de aceste puncte luate câte trei. Fie A intersecţia diferită [1]) de P_0 a cercurilor de asemănarea corespunzătoare perechilor Γ_1, Γ_3 şi Γ_1, Γ_2. E clar că A se găseşte şi pe cercul de asemănare al perechii Γ_2, Γ_3.

---

1) O astfel de intersecţie $A \neq P_0$ e totdeauna la îndemână, în ipotezele menţionate. Intr'adevăr, fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor Γ_1, Γ_2, Γ_3. Ele determină un cerc elementar γ, altfel punctele P_1, P_2, P_3 ar coincide. Cercurile de similitudine ale perechilor (Γ_2, Γ_3), (Γ_3, Γ_1), (Γ_1, Γ_2) sunt cercuri ale lui APOLLONIUS în triunghiul $O_1O_2O_3$. Aşa dar două din ele se întâlnesc în simetricul A al lui P_0 faţă de γ. Nu putem avea $A = P_0$, căci atunci P_0 s'ar găsi pe γ iar P_1, P_2, P_3 ar rezulta colineare.

Cilindrul anallagmatic de poli A, ∞ şi care conţine pe Γ_1, conţine evident şi pe Γ_2 şi Γ_3. Conform teoremei din alineatul precedent, acelaşi cilindru conţine al patrulea cerc Γ_0.

Avem aşadar, pe această cale simplă, stabilit rezultatul care face obiectul problemei 3499 propusă în G. M. şi rezolvată în anul XLVII, No. 10, pag, 467:

Cercurile Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 *se văd dintr'un punct* A *sub acelaşi unghiu* (real sau imaginar).

Rezultatul acesta se lasă generalizat[1]) în următoarea proprietate însemnată:

Fie Γ_1, Γ_2, ... Γ_n, *n cercuri ale unui cilindru anallagmatic, care trec printr'un punct* P_0 *diferit de poli. Aceste cercuri dau naştere la încă* $2^{n-1} - n$, *cu ajutorul construcţiei lui* CLIFFORD. *Toate aceste* $2^{n-1} - n$ *cercuri ale construcţiei lui* CLIFFORD *aparţin cilindrului considerat.*

Demonstraţia se face prin recurenţă, cu ajutorul teoremei din alineatul 8°.

9°. Teorema fundamentală dela alineatul 6° şi diversele forme ale invariantului fundamental din 4° duc imediat la următoarele consecinţe:

1. Cercurile lui PONCELET ale unei elipse se văd din focarele A, B ale acesteia sub un unghiu circular constant.

2. Cercurile lui PONCELET ale unei conice F, cu centru, care taie ortogonal un cerc Γ' dus prin focarele A, B ale acesteia determină pe Γ' o diviziune proiectivă de axă AB.

3. Cercurile lui PONCELET de rază constantă ale unei conice F, cu centru, au produsul puterilor lor la focarele A, B ale acesteia constant.

10°. Făcând polii A, B ai unui cilindru anallagmatic să tindă continuu unul, către altul, într'un punct C la distanţă finită, obţinem o familie ∞^2 de cercuri pe care am putea-o numi cilindru anallagmatic de speţa III-a.

O astfel de familie se poate obţine într'unul sau altul din următoarele moduri:

1. Supunând un cerc Γ_0 care nu trece prin C la toate substituţiile grupului G_2 al transformărilor anallagmatice parabolice de punct fix C.

---

1) A se vedea « *Untersuchungen über die* CLIFFORD KETTEN », Göbel 1932.

2. Considerând cercurile lui PONCELET ale unui cerc de centru C şi complectându-le cu tangentele acestuia.

3. Luând transformatele prin aceeaşi inversiune ale tuturor cercurilor de rază constantă din plan.

Cilindrul anallagmatic de speţa III-a este echivalent topologiceşte cu planul euclidian. Metrizat cu elementul de unghiu, aşa cum s'a făcut pentru cilindrele de celelalte speţe în alineatul 2°, el devine, nu numai topologic, dar şi metric, echivalent cu planul euclidian.

Toate propoziţiile enunţate pentru cilindrele de speţa I şi II care, pentru cazul limită al confundării polurilor, păstrează un sens, pot fi extinse cilindrului pe speţa III. Aceasta e cazul majorităţii teoremelor din alineatele 6°, 7° şi 8°. In locul cercurilor care se văd dintr'un punct A sub un unghiu fix, trebuesc considerate cercurile de rază fixă din plan.

11°. Teorema fundamentală din 6° devine intuitivă, dacă facem apel la câteva rezultate de geometrie analitică în spaţiu.

Considerând planul anallagmatic ca proiecţia stereografică a unei sfere fundamentale, un cerc din plan are ca imagine biunivocă, prin intermediul cercului de pe sferă, polul planului acestuia faţă de sfera fundamentală.

Se recunoaşte uşor că imaginea unui cilindru anallagmatic în această reprezentare a cercurilor este o cuadrică exterioară sferei pe care o taie după patru generatoare rectilinii: două, câte două, imaginar conjugate. Polurile cilindrului sunt tocmai punctele de contact reale ale cuadricei, cu sfera.

Pe de altă parte, imagina cercurilor lui PONCELET ale unei conice (cu centru) F este de asemeni o cuadrică. Intr'adevăr, condiţia analitică pentru ca un cerc să admită împreună cu F un triunghiu înscris şi circumscris, se dovedeşte a fi o relaţie pătratică între coeficienţii cercului.

Aşadar, pentru a demonstra teorema 6°, e deajuns să arătăm că cercurile lui PONCELET de rază nulă au ca imagină tocmai punctele celor 4 generatoare ale sferei, corespunzătoare imaginelor focarelor A, B.

Pentru aceea să observăm, că o conică descompusă în două drepte are cu conica nesingulară F un triunghiu respectiv înscris şi circumscris, numai atunci când una din drepte e tangentă lui F.

Deci un cerc al lui PONCELET, redus la două isotrope, se compune din două drepte care trec prin punctele absolute, dintre care una tangentă lui F. In definitiv, toate aceste cercuri sunt date de cercurile de rază nulă cu punctele singulare situate pe isotropele focarelor A, B. Pe sferă, imaginele lor se aşază evident pe generatoarele corespunzătoare omoloagelor A*, B*, ale lui A, B.

Deci cercurile lui PONCELET formează un cilindru anallagmatic.

§ 3. Generarea cilindrului anallagmatic cu ajutorul curbelor de clasa 3-a tangente dreptei dela infinit.

12°. Acest paragraf cere dela cititor cunoştiinţe de teoria funcţiunilor eliptice. Se adresează aşadar studenţilor mai înaintaţi, profesorilor de matematice şi tinerilor ingineri.

Considerăm, în planul proiectiv, o curbă K de clasa 3-a tangentă dreptei dela infinit. Prin punctele absolute I, J mai trec câte două tangente, în general diferite de dreapta dela infinit şi diferite între ele. Deci curba admite patru focare A, A′, B, B′ formând un patrulater isotrop. Dintre acestea, A, B sunt reale iar A′, B′ imaginar-conjugate.

Curba K e în general de genul 1 (nu are tangentă dublă). Ea admite aşadar o reprezentare parametrică, prin mijlocirea funcţiunilor eliptice.

Fie k parametrul tangentei reprezentate de dreapta dela infinit iar i_1, i_2 rezp. j_1, j_2 parametrii celeilalte tangente duse prin I şi J. In virtutea teoremei lui ABEL avem

$$(11)\quad i_1+i_2+k\equiv 0\ ,\quad j_1+j_2+k\equiv 0,\quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'),$$

unde 2ω, $2\omega'$ sunt o perechei de perioade primitive ale corpului de funcţiuni eliptice asociat lui K.

Printr'o convenţie asupra notaţiei, stabilim că tangentele i_1, j_1 resp. i_2, j_2 resp. i_1, j_2 resp. i_2, j_1 se întâlnesc în A resp. B resp. A′ resp. B′.

13°. Fie U, V, W vârfurile triunghiului format de trei tangente generale ale lui K, de parametri respectiv u, v, w. Considerăm cercul Γ circumscris triunghiului UVW şi ne propunem să calculăm, relativ la focarele A, B şi cercul Γ, invariantul Λ din (4).

Reducem calculul lui Λ la calculul puterilor cercului Γ faţă de fiecare din focarele A, B, A′, B′.

Fie, în coordonate cartesiene ortogonale

$$(12)\quad \Gamma(x,y)\equiv c_0(x^2+y^2)+2c_1x+2c_2y+c_3=0$$

ecuaţia cercului Γ. Dacă (a,α), (b,β), (a',α'), (b',β') sunt coordonatele focarelor A, B, A′, B′, expresia analitică a lui Γ este [1]), conform lui (4):

$$(13)\qquad \Lambda^2=\frac{\Gamma(a,\alpha)\,.\,\Gamma(b,\beta)}{\Gamma(a',\alpha')\,.\,\Gamma(b',\beta')}.$$

Expresia puterii p^2 a lui A, faţă de Γ, ce ne propunem să calculăm în funcţiune de argumentele u, v, w ale celor trei tangente, este

$$(14)\qquad p^2=\frac{\Gamma(a,\alpha)}{c_0}.$$

Pentru calculul lui p^2, vom presupune curba K fixă iar tangentele u, v, w variabile. Coeficienţii acestor tangente sunt proporţionali respectiv cu anumite funcţiuni lineare şi întregi de:

$$(15)\qquad \wp u\ ,\ \wp' u\ \ ;\ \ \wp v\ ,\ \wp' v\ \ ;\ \ \wp w\ ,\ \wp' w$$

unde $\wp$ e funcţiunea lui WEIERSTRASS. Deci coeficienţii lui $\Gamma(x,y)$ din (12) sunt proporţionali cu anume polinoame de expresiunile (15).

Cu un cuvânt, p^2 din (14) e funcţiune dublu-periodică de de fiecare din argumentele u, v, w.

14°. Să prescriem lui v, w valori generale, dar fixe, şi să privim pe p^2 ca funcţiune de u singur. Aceasta revine la a imobiliza tangentele v, w în poziţii generale şi a lăsa numai tangenta u să varieze. Să căutăm pentru ce poziţii ale lui u funcţiunea p^2 poate deveni nulă sau infinită.

Condiţia necesară ca puterea p^2, a punctului A faţă de Γ, să se anuleze, este ca Γ să treacă prin A. Această condiţie e şi suficientă, afară de cazul când Γ se descompune într'o dreaptă la distanţă finită + dreapta dela infinit.

Trecerea lui Γ prin A poate fi întovărăşită de următoarele trei împrejurări:

I. Γ se descompune în două drepte isotrope, la distanţă finită.

---

[1]) Această expresie subsistă şi în cazul când Γ se reduce la o dreaptă, aşadar când Λ e dat de formula (6). E deajuns să presupunem în (12) $c_0=0$.

II. Γ se descompune într'o dreaptă la distanţă finită[1]) + dreapta dela infinit.

III. Γ rămâne nesingular.

Să examinăm pe rând aceste cazuri:

I. Una din isotrope trece obligatoriu prin vârful fix U. Dar acest punct, intersecţie a tangentelor v, w, e un punct general din plan. Deci isotropa considerată nu trece prin A. Prin urmare, a doua isotropă de descompunere trece obligatoriu prin focarul A al curbei K, aşadar se confundă cu tangenta i_1 resp. j_1, după speţa corespunzătoare. Soluţia e actuală, căci există un triunghiu cu laturile v, w înscris într'un astfel de cerc şi circumscris lui K: este triunghiul de laturi i_1, v, w resp. j_1, v, w.

Reciproc, când tangenta u se confundă cu i_1 resp. j_1, cercul Γ circumscris triunghiului UVW se descompune în i_1 resp. j_1 complectată cu câte o isotropă a vârfului U. Deci trece prin A.

Reţinem deci condiţiile efective de anulare, pentru p^2:

$$u - i_1 \equiv 0 \quad , \quad u - j_1 \equiv 0 \quad , \quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

II. Dreapta de descompunere dela distanţă finită trece obligatoriu atât prin vârful U cât şi prin focarul A. Ea se confundă deci cu dreapta δ determinată de punctele diferite U, A. Avem $\delta \neq v$, $\delta \neq w$, căci v, w sunt tangente generale ale lui K.

Există un triunghiu cu laturile v, w, circumscris lui K şi înscris în cercul descompus în δ + dreapta dela infinit. A treia latură a acestui triunghiu este neapărat tangenta k, dela infinit, căci $\delta \neq v, w$.

Reciproc, dacă tangenta u se confundă cu k, cercul Γ se descompune în k + o dreaptă nedeterminată, care trece prin U. Dar, în cazul de faţă, Γ trece prin A. Aşadar a doua dreaptă de descompunere e δ.

Reţinem drept condiţia de anulare presumptivă, pentru p^2:

$$(17) \qquad u - k \equiv 0 \quad , \quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Am spus: prezumtivă, fiindcă în acest caz şi numitorul lui p^2 e nul.

III. Putem presupune

$$u \neq i_1, j_1, k,$$

1) Cazul unui cerc Γ redus la dreapta dela infinit, considerată dublu, nu intră în considerare, deoarece Γ trece prin punctul A la distanţă finită.

întrucât cazurile $u = i_1$ resp. j_1 res. k au fost cercetate şi acceptate în discuţiile precedente, în care Γ e singular.

Aşadar, în cazul de faţă, avem de a face un cerc nesingular Γ, în care sunt înscrise triunghiurile UVW şi AIJ, sigur fără vârfuri comune. In această situaţie există, potrivit unei teoreme cunoscute din teoria conicelor, o conică γ înscrisă celor două triunghiuri.

Reciproc, dacă u e tangentă conicei γ determinată de dreptele v, w, i_1, j_1, k, există o conică circumscrisă triunghiurilor UVW şi AIJ. Deci cercul Γ trece prin A.

Intersecţia complectă a curbelor duale γ şi K e dată de tangentele u, v, w, i_1, j_1, k. Aplicând teorema lui ABEL, reţinem condiţia efectivă de anulare, a lui p^2, din acest caz

$$(18) \quad u + v + w + i_1 + j_1 + k \equiv 0 \quad , \quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

15°. Condiţia necesară ca puterea p^2, a lui A faţă de Γ, să devină infinită, este ca Γ să se descompună în dreapta dela infinit + o dreaptă arbitrară (la distanţă finită sau la infinit). Condiţia devine şi suficientă numai când aceasta din urmă nu trece prin A.

Pentru ca cercul circumscris triunghiului format din tangentele v, w (fixate în poziţii generale) şi tangenta mobilă u, să se descompună în dreapta dela infinit + o dreaptă complimentară, e necesar şi suficient producerea unuia sau altuia din următoarele cazuri:

I. Tangenta u confundată cu dreapta dela infinit.

II. Tangenta u paralelă, la distanţă finită, cu v sau w.

Să le examinăm pe rând:

I. Cercul Γ se descompune în dreapta k + o dreaptă δ *nedeterminată*, care trece prin U. Triunghiul cu laturile v, w, k este efectiv înscris într'un astfel de cerc.

Reţinem condiţia presumptivă, pentru infinitizarea lui p^2 (presumtivă: căci δ ar putea trece prin A):

$$(17') \qquad u - k \equiv 0 \quad , \quad (\text{mod. } 2w, 2w').$$

II. Fie v' şi w' celelalte tangente la K, diferite de k, paralele respectiv cu v şi w. Cum v, w au poziţii generale, putem presupune $v \neq v'$ şi $w \neq w'$.

Cercul circumscris triunghiului format de v', v, w resp. w', v, w se descompune în agregatul de drepte $k + w$ resp. $k + v$.

Cum v resp. w nu trece prin A, reţinem condiţiile de infinitizare efectivă, pentru p^2:

$$u - v' \equiv 0 \quad , \quad u - w' \equiv 0 \quad , \quad (\text{mod. } 2w, 2w'),$$

adică, ţinând seamă că v', v, k resp. w', w, k sunt concurente:

$$(19) \qquad u + v + k \equiv 0 \quad , \quad u + w + k \equiv 0, \ (\text{mod. } 2w, 2w'),$$

16°. Să rezumăm.

In baza analizei din 14° şi 15°, funcţiunea eliptică de argument u, pe care am notat-o cu p^2, admite zerouri şi poluri (simple sau multiple) *congruente* cu următoarele cantităţi:

$$(20) \quad \begin{cases} \text{Zerouri certe: } i_1, \ j_1, \ -i_1 - j_1 - k - v - w; \\ \text{Poluri certe: } -k - v, \ -k - w; \\ \text{Zero sau pol prezumptiv: } k. \end{cases}$$

Cercetarea arată că p^2 nu mai admite altele.

Se ştie că suma zerourilor unei funcţiuni dublu periodice e congruentă cu suma polurilor, dacă ţinem seamă de ordinele lor de multiplicitate.

Fie M, N, P, Q, R anume întregi pozitivi, nedeterminaţi, şi S un întreg pozitiv sau negativ inclusiv zero, de asemeni nederminat. In virtutea tabelei precedente trebuie să avem

$$(21) \quad \begin{cases} Mi_1 + Nj_1 + P\,(-i_1 - j_1 - k - v - w) \equiv \\ \equiv Q\,(-k - v) + R\,(-k - w) + Sk, \ (\text{mod. } 2w, 2w'). \end{cases}$$

Insă argumentele i_1, j_1, k, u, v sunt numere (în general complexe) de componente arbitrare, aşadar incomensurabile faţă de perioade şi incomensurabile unul, în raport cu celălalt. Prin urmare, obligatoriu:

$$M = N = P = Q = R = S.$$

Deci S e un număr pozitiv şi diferit de zero, ca şi ceilalţi întregi. Aflăm deci că elementul prezumtiv din (20) este în realitate un pol efectiv.

In concluzie, funcţiunea dublu periodică p^2 de variabilă u admite următoarele zerouri şi poluri efective, toate de ordin de multiplicitate S, şi nu mai admite altele:

Zerouri: $i_1, \ j_1, \ -i_1 - j_1 - k - v - u;$

Poluri: $-k - v, \ -k - w, \ k.$

Acest tablou are o proprietate remarcabilă: suma zerourilor nu e numai congruentă, dar chiar riguros egală cu suma polurilor. Ca atare, funcţiunea dublu periodică p^2 admite o descompunere în factori σ, cunoscută până la un factor constant arbitrar. Avem anume

$$(22) \quad p^2 = C' \left\{ \frac{\sigma(u-i_1) \cdot \sigma(u-j_1) \cdot \sigma(u+v+w+i_1+j_1+k)}{\sigma(u+v+k) \cdot \sigma(u+w+k) \cdot \sigma(u-k)} \right\}^S,$$

unde C' e un număr care nu depinde de u.

17°. Determinarea numărului întreg şi pozitiv S, — exponentul din formula (22), — se obţine prin următoarele consideraţiuni:

Ecuaţiile tangentelor u, v, w la curba K sunt date, cum am mai spus, de anularea a trei polinoame

$$u_1 x + u_2 y + u_3,$$

$$v_1 x + v_2 y + v_3,$$

$$w_1 x + w_2 y + w_3,$$

cu coeficienţii anumite polinoame lineare respectiv de variabile $\wp u$, $\wp' u$; $\wp v$, $\wp' v$; $\wp w$, $\wp' w$. Determinantul coeficienţilor acestor polinoame e diferit de zero şi îl notăm cu Δ.

Coordonatele omogene ale vârfurilor U, V, W, ale triunghiului format de cele trei tangente, sunt minorii

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{pmatrix}$$

ai matricei

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Coeficienţii c_0, $2c_1$, $2c_2$, c_3 ai cercului Γ circumscris triunghiului UVW pot fi luaţi egali cu determinanţii de ordinul al treilea ai matricei

$$\begin{pmatrix} U_1^2 + U_2^2 & U_3 U_1 & U_3 U_2 & U_3^2 \\ V_1^2 + V_2^2 & V_3 V_1 & V_3 V_2 & V_3^2 \\ W_1^2 + W_2^2 & W_3 W_2 & W_3 W_2 & W_3^2 \end{pmatrix}.$$

In special coeficientul c_0 e egal cu

$$(23) \qquad c_0 = U_3 V_3 W_3 \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} .$$

Dar avem

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2 = \Delta^2 \begin{vmatrix} \wp u & \wp' u & 1 \\ \wp v & \wp' v & 1 \\ \wp w & \wp' w & 1 \end{vmatrix}^2 .$$

Determinantul în $\wp$ şi $\wp'$ e cunoscut în teoria funcţiunilor eliptice. El e o funcţiune eliptică de ordinul 3 în u. Aşadar are ca singure zerouri, zerourile simple evidente

$$u \equiv v \quad , \quad u \equiv w \quad , \quad u \equiv -v-w, \quad (\text{mod. } 2w, 2w').$$

In ce priveşte ceilalţi factori ai lui c_0, numai V_3 şi W_3 depind de u. In ce priveşte W_3, el e o funcţiune eliptică de ordinul 3 în u. Aşadar are ca singure zerouri acelea, evidente:

$$u \equiv v \quad , \quad u \equiv k \quad , \quad u \equiv -k-v, \quad (\text{mod. } 2w, 2w'),$$

care fac ca liniile determinantului de ordinul al doilea W_3 să fie identice, sau ca dreptele u şi v să poată fi considerate paralele. La rândul său factorul W_3 introduce zerourile

$$u \equiv w \quad , \quad u \equiv k \quad , \quad u \equiv -k-w, \quad (\text{mod. } 2w, 2w').$$

Din inspectarea precedentelor trei rânduri de zerouri, conchidem că

$$-k \quad -v \quad , \quad -k \quad -w$$

sunt conţinute ca zerouri simple de c_0. Ele însă figurează ca poluri pentru p^2 din (22), cu ordinul de muliplicitate S. Aşadar, comparând pe (14) cu (22), conchidem

$$S \leqslant 1 .$$

Insă S e un întreg pozitiv şi diferit de zero. Deci, obligatoriu:

$$S = 1 .$$

In definitiv, (22) devine

$$(22') \qquad p^2 = C' \frac{\sigma(u-i_1) \cdot \sigma(u-j) \cdot \sigma(u+v+w+i_1+j_1+k)}{\sigma(u+v+k) \cdot \sigma(u+w+k) \cdot \sigma(u-k)},$$

unde C' depinde numai de v, w şi de parametrii curbei K.

18°. Considerând pe p^2 ca funcțiune numai de v respectiv de w obținem rezultatele analoage cu (22'):

$$(22'') \quad p^2 = C'' \frac{\sigma(v-i_1)\,.\,\sigma(v-j_1)\,.\,\sigma(u+v+w+i_1+j_1+k)}{\sigma(v+w+k)\,.\,\sigma(v+u+k)\,.\,\sigma(v-k)},$$

$$(22''') \quad p^2 = C''' \frac{\sigma(w-i_1)\,.\,\sigma(w-j_1)\,.\,\sigma(u+v+w+i_1+j_1+k)}{\sigma(w+u+k)\,.\,\sigma(w+v+k)\,.\,\sigma(w-k)},$$

unde, lăsând la o parte parametrii curbei K, factorii C'' și C''' depind respectiv numai de w, u și u, v.

Din identificarea rezultatelor (22'), (22''), (22''') conchidem, fără greutate, la următoarea formă a lui p^2:

$$(24) \quad p^2 = C \frac{\Pi\sigma(u-i_1)\,.\,\Pi\sigma(u-j_1)}{\Pi\sigma(u-k)\,.\,\Pi\sigma(v+w+k)}\,\sigma(u+v+w+i_1+j_1+k),$$

unde literele u, v, w trebuesc permutate circular sub semnul Π și unde C înseamnă o funcțiune care depinde numai de parametrii curbei K sau, eventual, o constantă numerică.

19°. Aplicând formula (24) la calculul puterii q^2 resp. $(p')^2$ resp. $(q')^2$ a focarului B resp. A' resp. B' de tangente isotrope i_2, j_2 resp. i_1, j_2 resp. i_2, j_1 față de cercul Γ, obținem

$$(25) \quad q^2 = \bar{C} \frac{\Pi\sigma(u-i_2)\,.\,\Pi\sigma(u-j_2)}{\Pi\sigma(u-k)\,.\,\Pi\sigma(v+w+k)}\,\sigma(u+v+w+i_2+j_2+k)$$

$$(24') \quad (p')^2 = C^* \frac{\Pi\sigma(u-i_1)\,.\,\Pi\sigma(u-j_2)}{\Pi\sigma(u-k)\,.\,\Pi\sigma(v+w+k)}\,\sigma(u+v+w+i_1+j_2+k)$$

$$(25') \quad (q')^2 = \bar{C}^* \frac{\Pi\sigma(u-i_2)\,.\,\Pi\sigma(u-j_1)}{\Pi\sigma(u-k)\,.\,\Pi\sigma(v+w+k)}\,\sigma(u+v+w+i_2+j_1+k).$$

Introducând valorile (24), (25), (24'), (25') în formula (13) sau, mai de grabă, în formula (4), obținem

$$(26) \quad \Lambda^2 = L \,.\, \frac{\sigma(u+v+w+i_1+j_1+k)\,.\,\sigma(u+v+w+i_2+j_2+k)}{\sigma(u+v+w+i_1+j_2+k)\,.\,\sigma(u+v+w+i_2+j_1+k)}$$

unde L e o anume funcțiune de parametrii curbei K singure. Formula (26) e încă susceptibilă de simplificări. Dar pentru aceasta e nevoie de o anumită pregătire.

Să introducem, pentru o ternă de tangente la curba K, noțiunea de *clasă*.

Două terne T^1 şi T^2 fac parte din aceeaşi clasă, când există o ternă R aşa încât $R+T^1$ şi $R+T^2$ să fie intersecţiile complecte ale curbei K cu două conice γ^1 şi γ^2, considerate ca înfăşurate de drepte. Verificarea faptului că două terne T^1 şi T^2 fac parte din aceeaşi clasă, nu atârnă de terna auxiliară R.

Intr'adevăr, fie R_0 o altă ternă care se găseşte cu T_1 pe o conică γ_0^1. Curba de clasa 4-a formată din $\gamma_0^1 + \gamma^2$ are cu K intersecţia complectă $T^1 + T^2 + R + R_0$. Din această intersecţie, partea $T^1 + R$ constitue intersecţia complectă a lui K cu γ^1. Deci $T^2 + R_0$ constitue intersecţia complectă a lui K şi a unei conice γ_0^2 (Teorema Restului).

Două clase se zic complementare, când doi din reprezentanţii lor se găsesc pe aceeaşi conică. Această situaţie e independentă de reprezentanţii aleşi (consecinţă a Teoremei Restului).

Unei clase i se asociază un număr bine determinat, modulo 2ω, $2\omega'$, care o caracterizează, şi pe care-l numim parametrul clasei. El e definit de suma argumentelor eliptice ale tangentelor:

$$t \equiv u + v + w$$

şi nu depinde de alegerea reprezentantului (consecinţa teoremei lui ABEL).

Urmează de aici că două clase complementare sunt caracterizate de parametri egali şi de semne contrare (modula $2w$, $2w'$).

20°. **Teoremă.** *Intr'o conică* Ω *nu pot exista, în general, mai mult de două triunghiuri înscrise lui* Ω *şi circumscrise curbei* K. *In cazul de excepţie, triunghiurile aparţin toate aceleiaşi clase, de parametru egal cu o semiperioadă. In cazul general însă, triunghiurile aparţin la două clase complementare oarecare.*

Faptul că într'o conică generală există două triunghiuri înscrise ei şi circumscrise lui K, se stabileşte prin anume consideraţii analitice pe care nu le putem reproduce aici, fără a lungi prea mult expunerea. Il vom admite fără demonstraţie.

Fie aşa dar T şi R două triunghiuri înscrise în conica generală Ω şi circumscrise [1]) lui K. După cum se ştie, există o conică γ înscrisă lui T şi R. Deci T şi R sunt reprezentanţi a două clase complementare.

---

1) O astfel de figură poate fi obţinută pornind dela o conică γ şi dela cele şase tangente T + R comune lui γ şi K.

Să presupunem acum că ar exista un al treilea triunghiu S înscris în Ω şi circumscris lui K. In virtutea observaţiei precedente, T, R şi S fac parte din clase două, câte două, complementare. Avem deci între parametrii lor:

$$r+s\equiv 0\ ,\quad s+t\equiv 0\ ,\quad t+r\equiv 0,$$

$$\therefore\qquad r\equiv s\equiv t\equiv \omega, \omega', \omega+\omega',\ (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Teorema e demonstrată.

Demonstraţia presupune că Ω e propriu zisă iar clasa 0, a ternelor concurente înscris în Ω, se elimină.

Ajungem prinurmare la concluzia următoare:

Unei conice propriu zise Ω, *din planul unei curbe de clasa treia* K (de gen 1), *i se asociază în mod univoc un număr*

$$\pm t \neq 0\ ,\quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'),$$

care e parametrul claselor complimentare cărora aparţin cele două triunghiuri (în general unice) *înscrise conicei şi circumscrise lui* K.

Numim acest număr. determinat până la un semn şi până la un multiplu de perioade: *parametrul conicei* Ω (în raport cu K).

Toate aceste desvoltări au avantajul că ne pun la îndemână un limbagiu concis şi natural pentru a exprima unele relaţii din problema noastră. Pentru a-l complecta, să observăm că focarelor A, B resp. A′, B′ le putem deasemeni asocia două numere μ resp. ν analoage cu t, pe care le vom numi parametrii focarelor (în raport cu K). Aceste numere nu sunt altceva decât parametrii claselor, împărţite în perechi complementare, ale triunghiurilor circumscrise AIJ, BIJ; A′IJ, B′IJ. Avem, într'adevăr, potrivit lui (11):

$$(27)\quad \begin{cases} \mu\equiv i_1+j_1+k\equiv -i_2-j_2-k, \\ \nu\equiv i_1+j_2+k\equiv -i_2-j_1-k, \end{cases}\qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

21°. **Teorema fundamentală.** *Dacă* Γ *e un cerc din planul unei curbe* K *de clasa* 3-a, *tangentă dreptei dela infinit, dar altfel generală, invariantul anallagmatic* Λ *al lui* Γ *faţă de focarele (reale)* A, B *ale lui* K, *are următoarea expresie*

$$\Lambda=\sqrt{\frac{\wp t-\wp\mu}{\wp t-\wp\nu}}\ .$$

unde $\pm t$ *e parametrul lui* Γ *iar* $\pm\mu$, $\pm\nu$ *respectiv parametrii focarelor* A, B; A′, B′ *relativi la* K.

Intr'adevăr, cu notaţiile şi definiţiile din alineatul precedent şi din enunţ, formula (26), — ultima la care ne-am oprit — se scrie:

$$\Lambda^2 = L \cdot \frac{\sigma(t-\mu) \cdot \sigma(t+\mu)}{\sigma(t-\nu) \cdot \sigma(t+\nu)}.$$

Dar, din teoria funcţiunilor eliptice se ştie, că termenii fracţiei din această formulă sunt riguros proporţionali cu

$$\wp t - \wp\mu \quad \text{şi} \quad \wp t - \wp\nu.$$

Incât formula devine

$$\Lambda^2 = L \cdot \frac{\wp t - \wp\mu}{\wp t - \wp\nu}. \tag{28}$$

Pentru determinarea factorului L, independent de t, să facem tindă parametrul t către zero. Se ştie că $\wp t$ tinde către infinit. Aşadar

$$\lim_{t=0} \Lambda^2 = L. \tag{29}$$

Dar când t tinde către zero, clasa triunghiului UVW înscris în Γ şi circumscris lui K tinde către clasa tangentelor concurente. Aşadar Γ tinde către un cerc redus la un punct. Cele două cercuri duse prin A, B, tangente la Γ, tind către unul şi acelaşi cerc. Prin urmare unghiul de tăiere Λ_0 al acestor cercuri tinde către 0 sau π, deci

$$\lim_{t=0} \cos \frac{\Lambda_0}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0. \end{cases}$$

In virtutea formulei (9) urmează de asemenea

$$\lim \Lambda = \begin{cases} 1 \\ 0. \end{cases}$$

Deci din (29) rezultă

$$L = \begin{cases} 1 \\ 0. \end{cases}$$

Dar L e o constantă diferită de zero. Aşadar, obligatoriu

$$L = 1.$$

Formula (28) devine

$$(30) \qquad \boxed{\Lambda = \sqrt{\frac{\wp t - \wp\mu}{\wp t - \wp\nu}}}.$$

Teorema e demonstrată.

O consecinţă a lui (30) e următoarea:

Cercurile circumscrise triunghiurilor de aceeaşi clasă formează un cilindru anallagmatic cu polurile în focarele curbei K. *Trecerea dela o clasă, la casa complimentară, nu schimbă cilindrul. Parametrul* t, *al clasei, şi invariantul* Λ, *al cilindrului, stau în legătura simplă (30).*

§ 4. **Consecinţe geometrice.**

22°. Noţiunea de clasă are sens şi pe curbele de clasa 3-a unicursale. Cum ne putem arangea totdeauna, prin variaţii continui ale parametrilor, aşa încât curba K să capete o tangentă dublă, propoziţia dela sfârşitul alineatului precedent rămâne valabilă şi pentru curbele de clasa 3-a unicursale, tangente dreptei dela infinit, cu singura deosebire că invariantul Λ nu mai e dat de formula (30) ci de formula degenerată corespunzătoare.

Cu deosebire interesant e cazul unei curbe K de două ori tangentă dreptei dela infinit. Pentru o astfel de curbă, unul din focare, de exemplu B, e aruncat la infinit. Propoziţia dela sfârşitul alineatului precedent capătă pentru aceste curbe următoarea enunţare:

Cercurile circumscrise triunghiurilor de aceeaşi clasă, sau de clase complementare, ale unei curbe de clasa 3-a bitangentă dreptei dela infinit, se văd din focarul acesteia sub acelaşi unghiu.

In forma de mai sus, proprietatea a fost stabilită, printr'un calcul direct, în articolul „*Despre parabola cubică*“ publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVII, pag. 397.

La şase drepte există o singură curbă de clasa 3-a tangentă lor şi bitangentă dreptei dela infinit. In particular există o singură astfel de curbă înscrisă în exagrama formată cu diagonalele unui patrupunct general $P_0P_1P_2P_3$. Fie A focarul acestei curbe. Două din triunghiurile patrupunctului, de exemplu $P_0P_1P_2$ şi $P_0P_1P_3$, fac parte din clase complementare, căci laturile lor reprezintă totalitatea tangentelor comune curbei cu conica redusă la punctele

P_0, P_1. La fel, triunghiurile $P_0P_1P_2$ şi $P_1P_2P_3$ fac parte din clase complementare. Deci triunghiurile $P_0P_1P_2$ şi $P_1P_2P_3$ sunt de aceeaşi clasă. Pe această cale, conchidem imediat, că toate cele patru triunghiuri care se pot forma cu punctele $P_0P_1P_2P_3$ sunt de aceeaşi clasă şi deci se văd sub acelaşi unghiu dintr'un punct din plan (punctul A).

In felul acesta rezultatul dela alineatul 9° e din nou stabilit, pe altă cale, cu, în plus, semnificaţia punctului A.

23°. Rămânând la curbele generale K de clasa 3-a, tangente dreptei dela infinit, ne propunem să extragem din teorema fundamentală din 21° câteva proprietăţi elementare.

a) *Fie* $P_0P_1P_2P_3$ şi $Q_0O_1Q_2Q_3$ *două patrupuncte înscrise în aceeaşi conică* F *şi ale căror diagonale taie pe dreapta dela infinit aceeaşi involuţie. In aceste condiţii cele 8 cercuri* $P_i\,P_j\,P_k$ şi $Q_i\,Q_j\,Q_k$ *fac parte din acelaşi cilindru anallagmatic.*

Să ducem prin punctele (P), de o parte, şi punctele (Q), de alta, două conice E şi G diferite de F. Aceste trei conice F, E, G sunt evident linear, independente şi determină, ca atare, o reţea lineară, punctuală, R. Dreptele de descompunere ale conicelor reţelei înfăşură, cum se ştie, o curbă de clasa 3-a K.

Să însemnăm cu U, V două puncte de pe dreapta dela infinit care nu aparţin involuţiei din enunţ. Să observăm că, în virtutea teoremei lui DESARGUES, conicele E, F, G au direcţiile asimptotice omoloage în involuţia menţionată. Se recunoaşte uşor că toate conicele reţelei R se bucură de această proprietate. Deci o conică din R, care trece prin U, W, nu poate fi propriu zisă, ci se descompune obligatoriu în dreapta dela infinit (plus o dreaptă complementară).

E deci probat că curba K atinge dreapta dela infinit. In general, K e de genul 1.

Să restabilim acum acest rezultat, cunoscut, din teoria reţelelor lineare: *parametrii eliptici* a^+, a^- *ai dreptelor de descompunere, ale unei conice singulare din* R, *diferă între ei prin aceeaşi semiperioadă.*

Fie o a doua conică singulară a reţelei, descompusă în dreptele de parametri eliptici (pe curba K) b^+ şi b^-. Fascicolul linear determinat de perechile de drepte a^+, a^- şi b^+, b^- mai conţine o a treia conică singulară, descompusă în dreptele c^+, c^-.

Putem totdeauna alege astfel notaţia, încât dreptele a^{ε_1}, b^{ε_2}, c^{ε_3} de indici superiori $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$ să reprezinte drepte concurente. Cum aceste drepte sunt tangente la K, avem în virtutea teoremei lui ABEL

$$a^{\varepsilon_1} + b^{\varepsilon_2} + c^{\varepsilon_3} \equiv 0 \quad , \quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'),$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1 .$$

Din aceste patru congruenţe se deduce uşor, prin eliminare:

$$2a^+ \equiv 2a^- \quad , \quad 2b^+ \equiv 2b^-, \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$
$$a^+ - a^- \equiv b^- - b^+,$$

Primele congruenţe ne dau

$$a^+ - a^- \equiv \omega_i \quad , \quad b^+ - b^- \equiv \omega_j ,$$

unde ω_i, ω_j sunt două, oareçare, din semiperioadele ω, ω', $\omega + \omega'$. Cealaltă congruenţă ne dă

$$\omega_i \equiv -\omega_j . \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

ceea ce e tot una cu

$$\omega_i \equiv \omega_j . \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Deci, într'adevăr, parametrii a^+, a^- diferă printr'o aceeaşi semiperioadă ω_i, pe care o putem presupune egală cu ω. Aşadar

(31) $$a^+ - a^- \equiv \omega \quad , \quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Revenind la problema noastră, recunoaştem uşor că înfăşurata K e înscrisă în fiecare din exagramele reprezentate de diagonalele patrupunctelor $P_0P_1P_2P_3$ şi $Q_0Q_1Q_2Q_3$. Parametrii eliptici ai acestor diagonale îi însemnăm cu p_i^+, p_i^- resp. q_i^+, q_i^- $(i = 1, 2, 3)$, după regula următoare: p_1^+, parametrul lui P_0P_1; p_1^-, parametrul lui P_2P_3, extinsă prin permutarea circulară a indicilor 1, 2, 3 şi a literelor P, Q.

In virtutea lui (31) avem imediat

$$p_1^{\varepsilon_1} + p_2^{\varepsilon_2} + p_3^{\varepsilon_3} \equiv p_1^{-\varepsilon_1} + p_2^{-\varepsilon_2} + p_3^{-\varepsilon_3} + \omega,$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1.$$

Insă
$$p_1^{-\varepsilon_1} + p_2^{-\varepsilon_2} + p_3^{-\varepsilon_3} \equiv 0,$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1,$$

în virtutea teoremei lui ABEL. Conchidem

$$p_1^{\varepsilon_1} + p_2^{\varepsilon_2} + p_3^{\varepsilon_3} \equiv \omega \quad , \quad q_1^{\varepsilon_1} + q_2^{\varepsilon_2} + q_3^{\varepsilon_3} \equiv \omega, \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'),$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1.$$

Deci triunghiurile $P_i P_j P_k$, $Q_i Q_j Q_k$ aparţin aceleiaşi clase (de parametru ω) pe curba K. In virtutea teoremei fundamentale din 21°, cele 8 cercuri circumscrise se găsesc pe un cilindru anallagmatic, de poli: focarele A B ale curbei K.

Să trecem la o altă aplicaţie, (un caz particular al propoziţiei precedente).

b) Dacă patrupunctele $P_0P_1P_2P_3$, $Q_0Q_1Q_2Q_3$ *sunt înscrise în aceeaşi conică* F *şi taie cu diagonalele lor pe dreapta dela infinit aceeaşi involuţie şi dacă, în plus, au acelaşi centru de greutate, există un punct* A *de unde cele 8 cercuri* $P_i P_j P_k$, $Q_i Q_j Q_k$ *se văd sub acelaşi unghiu.*

Această propoziţie e în realitate o complectare a teoremei din alineatul 9°.

Pentru a o demonstra, să însemnăm cu E, G, R aceleaşi figuri ca în aplicaţia precedentă iar cu Δ, dreapta dela infinit.

Să considerăm reţeaua lineară-punctuală R_1 determinată de conicele E, F, Δ^2. Se vede uşor că elementele singulare ale lui R_1 sunt date de perechile de asimptote ale fascicolului linear E, F.

Insemnând cu O centrul unei conice din fascicolul E, F şi cu Ω perechea de puncte la infinit ale acesteia, e clar că între conica celor 9 puncte Γ_1 a fascicolului şi între involuţia Σ_1 tăiată pe dreapta dela infinit de elementele acestuia, avem o corespondenţă algebrică, biunivocă, a două domenii binare. Se ştie că, în aceste condiţii, corespondenţa $O \leftrightarrow \Omega$ e proiectivă. Ea e complect determinată de următoarele trei perechi omoloage

$$(32) \qquad O_0 , \Omega_0 \; ; \; O' , \Omega' \; ; \; O'' , \Omega'';$$

unde O_0 e centrul lui F iar O', O'', punctele dela infinit a conicei celor 9 puncte, pe când Ω_0 înseamnă direcţiile asimptotice ale lui F iar Ω', Ω'' punctele unite ale involuţiei Σ_1.

Trecând la faccicolul G, F observăm că are aceeaşi conică a celor 9 puncte ca fasci.olul corsiderat E, F.

Intr'adevăr, centrele lor sunt, cum se ştie, centrele de greutate ale patrupunctelor $P_0P_1P_2P_3$, $Q_0Q_1Q_2Q_3$. Deci coincid, prin ipoteză. Direcţiile lor asimptotice sunt punctele unite ale involuţiilor Σ_1, Σ_2 tăiate pe dreapta dela infinit de conicele celor două fascicole. In virtutea ipotezei Σ_1 şi Σ_2 se confundă într'una şi aceeaşi involuţie Σ. Deci conicele celor 9 puncte au acelaşi centru, aceleaşi

direcţii asimptotice şi trec prin acelaşi punct O_0: centrul lui F. Aşadar coincid.

Proiectivitatea O, Ω, relativă la cel de al doilea fascol, descrie deci aceleaşi domenii binare şi admite aceleaşi trei perechi omoloage (32) ca proiectivitatea primului fascicol.

In definitiv, reţelele R_1 şi R_2, determinate respectiv de E, F, Δ^2 şi G, F, Δ^2, au aceleaşi elemente singulare. Cum, printre acestea sunt sigur trei linear-independente, conchidem

$$R_1 = R_2 = R.$$

Altfel spus: reţeaua R determinată de E, F, G cuprinde într'însa dreapta dela infinit, socotită dublu, Δ^2.

De aici rezultă că înfăşurata dreptelor de descompunere din R e o curbă de clasa 3-a K, bitangentă dreptei dela infinit. In virtutea celor arătate în 22°, triunghiurile $P_i P_j P_k$, $Q_i Q_j Q_k$ aparţin aceleiaşi clase şi, ca atare, cele 8 cercuri circumscrise lor sunt văzute din focarul A al lui K sub acelaşi unghiu.

c) *Fie perechile de drepte* Δ_i^+, Δ_i^- $(i = 1, 2, 3)$ *cu direcţiile în involuţie. Cercurile circumscrise următoarele grupe de câte 4 triunghiuri*

$$\Delta_1^{\varepsilon_1} \Delta_2^{\varepsilon_2} \Delta_3^{\varepsilon_3} \quad , \quad \Delta_1^{\varepsilon_1} \Delta_2^{\varepsilon_2} \Delta_3^{\varepsilon_3},$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1 \quad , \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1$$

aparţin respectiv la doi cilindri anallagmatici, de aceiaşi poli A, B. *Cei doi cilindri coincid când cele 6 drepte sunt tangente unei conice.*

Considerăm reţeaua lineară punctuală R, determinată de următoarele conice singulare (în general linear-independente).

$$\Delta_1^+ \Delta_1^- \qquad \Delta_2^+ \Delta_2^- \qquad \Delta_3^+ \Delta_3^-.$$

In virtutea ipotezei, se conchide imediat că toate conicele din R taie dreapta dela infinit după perechile involuţiei date. Intocmai ca la aplicaţia a), se recunoaşte că dreapta dela infinit e o dreaptă de descompunere a reţelei şi deci înfăşurata K a acestor drepte e o curbă de clasa 3-a tangentă dreptei dela infinit.

Fie $\delta_i^{\varepsilon_i}$ parametrul eliptic, pe K, al tangentei $\Delta_i^{\varepsilon_i}$. Potrivit formulei (31), avem

$$\delta^+ \equiv \delta_1^+ + \delta_2^+ + \delta_3^+ \equiv \delta_1^+ + \delta_2^- + \delta_3^- \equiv$$

$$\equiv \delta_1^- + \delta_2^+ + \delta_3^- \equiv \delta_1^- + \delta_2^- + \delta_3^+ ,$$

$$\delta^- \equiv \delta_1^- + \delta_2^- + \delta_3^- \equiv \delta_1^- + \delta_2^+ + \delta_3^+ \equiv$$

$$\equiv \delta_1^+ + \delta_2^- + \delta_3^+ \equiv \delta_1^+ + \delta_2^+ + \delta_3^- ,$$

$$(\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Prin urmare triunghiurile $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$ fac parte dintr'o clasă, triunghiurile $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1$, dintr'alta.

Deci cele două grupe de cercuri circumscrise se găsesc respectiv pe doi cilindri anallagmatici de aceiaşi poli: focarele A, B ale lui K.

Avem, în virtutea lui (31)

$$\delta^+ - \delta^- \equiv \omega, \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Aşadar în general cele două clase nu coincid. Dacă însă dreptele $\Delta_i^{\varepsilon_i}$ ($i = 1, 2, 3$, $\varepsilon_2 = \pm 1$) sunt tangente aceleiaşi conice γ atunci cele două cilindre anallagmatice coincid, cum s'a arătat la sfârşitul alineatului 21°.

E de observat că, în acest caz, cele 8 cercuri devin cercuri ale lui PONCELET ale conicei γ şi ca atare mai fac parte dintr'un cilindru anallagmatic (vezi alineatul 6°). Cum dreptele $\Delta_i^{\varepsilon_i}$ nu sunt isotrope şi reprezintă toate tangentele comune lui γ şi K, e sigur că aceste curbe nu au focare comune. Deci cei doi cilindri anallagmatici sunt esenţial diferiţi.

d) *Fie*

$$\lambda^2 E + 2\lambda F + G = 0 \tag{33}$$

o familie ∞^1 *pătratică de conice punctuale, care taie pe dreapta dela infinit o involuţie. Se ştie că ea admite 6 elemente singulare* $\Delta_i^+ \Delta_i^-$ ($i = 1, \ldots 6$). *Dispunând de notaţie, cercurile circumscrise următoarelor 8 triunghiuri*

$$\Delta_1^{\varepsilon_1} \Delta_2^{\varepsilon_2} \Delta_3^{\varepsilon_3} \quad , \quad \Delta_4^{\varepsilon_4} \Delta_5^{\varepsilon_5} \Delta_6^{\varepsilon_6} ,$$

$$\varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1 \qquad \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = +1$$

se găsesc pe acelaşi cilindru anallagmatic.

Conicele fac parte evident din reţeaua E, F, G.

Se arată întocmai ca la punctul a) că înfăşurata K a dreptelor de descompunere e tangentă dreptei dela infinit. Se ştie că punctul dublu al conicelor singulare, al unei reţele, descrie o curbă de ordinul al 3-lea C. Intre corpurile funcţiunilor eliptice asociate lui C şi K e o strânsă legătură. Dacă 2ω e perioada, selectată prin relaţia (31), cele două corpuri au respectiv ca perioade primitive

$$\omega, 2\omega' \qquad 2\omega, 2\omega'.$$

Astfel dacă Δ^{ε} e o dreaptă de descompunere a reţelei iar S intersecţia cu dreapta complimentară $\Delta^{-\varepsilon}$, parametrii eliptici ai lui S şi Δ^{ε} sunt respectiv

$$u \pmod{\omega, 2\omega'} \quad , \quad u \pmod{2\omega, 2\omega'}.$$

Seria cuadratică din enunţ cuprinde, cum se ştie, 6 conice singulare, de puncte duble $S_i (i = 1, \ldots 6)$. Din punct de vedere tangenţial seria se dovedeşte a fi bicuadratică:

$$(33') \qquad \lambda^4 H_0 + \lambda^3 H_1 + \ldots + H_4 = 0,$$

e deci cuprinsă în familia lineară tangenţială determinată de conicele tangenţiale $H_i = 0 (i = 0, \ldots 4)$.

Există însă o conică H armonic înscrisă la cinci conice date H_i $(i = 0, \ldots 4)$. Această conică rămâne evident armonic înscrisă tuturor conicelor seriei (33') sau (33).

Insă o conică descompusă în două drepte $\Delta^+ \Delta^-$, armonic circumscrisă lui H, se caracterizează complect prin aceea că punctul ei singular S se găseşte pe H.

In definitiv, cele 6 puncte $S_i = (i = 1, \ldots 6)$, introduse mai sus, reprezintă intersecţia complectă a curbelor C şi H. Ca atare, între parametrii lor $u_i (i = 1, \ldots 6)$, pe C, avem identitatea

$$(34) \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \equiv 0 \quad , \pmod{\omega, 2\omega'}.$$

Rezultă de aici că parametrii dreptelor $\Delta_i^{\varepsilon_i}$, pe K, sunt, într'o ordine oarecare

$$u_i \quad , \quad u_i + \omega \quad , \pmod{2\omega, 2\omega'} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots 6.$$

Putem însă dispune totdeauna de notaţie aşa încât primul să se refere la Δ_i^+, ultimul la Δ_i^-.

După reamintirea acestor lucruri cunoscute, să revenim la problema noastră. Triunghiurile $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$ şi triunghiurile

$\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = +1$ formate cu dreptele $\Delta_i^{\varepsilon i}$ formează două grupe de triunghiuri, de aceeaşi clasă, circumscrise lui K.

Pe de altă parte, putem totdeauna, adunând eventual pe ω unuia din argumentele u_i, ceeace echivalează cu permutarea indicilor superiori la perechea de drepte Δ_i^+, Δ_i^-, face astfel ca membrul întâi din (34) să fie congruent cu zero, chiar modulo 2ω, $2\omega'$.

$$(34') \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \equiv 0 \quad , \quad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Presupunem luată această precauţie. E clar că, după această precizare a notaţiei, clasele $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$ şi $\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = +1$ devin complimentare.

Prin urmare, în adevăr, cele 8 cercuri circumscrise triunghiurilor acestor clase, se găsesc pe un acelaşi cilindru anallagmatic cu polii în focarele A, B ale lui K.

Aceeaşi concluzie, pentru triunghiurile din clasele

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1 \quad \text{şi} \quad \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = -1.$$

24°. Substratul teoremei fundamentale din 21° e net proiectiv. Noţiunile anallagmatice ne-au permis numai să dăm o formulare concisă teoremei însăşi, cât şi consecinţelor ei din alineatul precedent.

Nu e însă fără interes să desprindem propoziţia proiectivă ascunsă în teorema 21°.

Pentru aceea e nevoie să ne întoarcem un moment la consideraţiile din alineatul 4°, pentru a complecta lista diverselor forme ale invariantului fundamental al figurii A, B, Γ, cu încă una.

Fie C, D simetricele punctelor A, B faţă de Γ. Aceste puncte covariază cu A, B, Γ, faţă de transformările anallagmatice. Pe de altă parte, expresiunea

$$\Lambda_3 = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

rămâne, cum se ştie, invariantă. Deci Λ_3 e un invariant al figurii A, B, Γ.

Să trecem dela planul anallagmatic, la planul proiectiv, şi să considerăm intersecţiile m, n, p, q ale razelor IA, IB, IC, ID, cu cercul Γ, unde I înseamnă unul din punctele absolute I, J. Un parametru proiectiv al unei isotrope IM este însă numărul

complex $z = x + iy$ care e afixul punctului real M. Din cele spuse rezultă următoarele relaţii de rapoarte anarmonice:

$$(m,\ n,\ p,\ q)_\Gamma = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

unde z_1, z_2, z_3, z_4 sunt afixele punctelor A, B, C, D.

Dar punctele ABCD se găsesc pe cercul Γ', dus prin A, B, ortogonal la Γ. Deci raportul anarmonic $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ e real şi anume: pozitiv sau negativ după cum perechile AB, CD se despart. sau nu, pe Γ'. Deci semnul ε, al raportului, anarmonic e anallagmatic invariant. Punând:

$$\lambda = \varepsilon \Lambda_3,$$

avem următoarea semnificaţie proiectivă a lui λ:

$$\lambda = (m,\ n,\ p,\ q)_\Gamma . \tag{35}$$

Dar un calcul uşor pe domeniul binar al cercului Γ', după o prealabilă normare a figurii, luând pe B la infinit, ne dă

$$\lambda = \frac{1}{ch^2 \dfrac{\Lambda_1}{2}} .$$

Deci, ţinând seamă de formulele din 4°, rezultă:

$$\boxed{\lambda = \Lambda^2} . \tag{36}$$

Din (30), (35) şi (36) deducem

$$(m,\ n,\ p,\ q)_\Gamma = \frac{\wp t - \wp \mu}{\wp t - \wp \nu} . \tag{37}$$

25°. Inainte de a scoate forma proiectivă a teoremei din 21° să introducem unele noţiuni.

Un patrulater de felul lui ABA'B'IJ îl numim „circumscris lui K relativ la IJ". Argumentele $\pm\mu$, $\pm\nu$ fiind date, avem o familie continuă ∞^1 de patrulatere circumscrise, relative la IJ.

Diagonala IJ odată fixată, se vede uşor că avem 4 patrulatere ale familiei fixate odată cu aceasta:

$$\begin{aligned} i_1 &\equiv -\frac{k}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+m\omega+n\omega', \\ i_2 &\equiv -\frac{k}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+m\omega+n\omega', \\ j_1 &\equiv -\frac{k}{2}+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+m\omega+n\omega', \\ j_2 &\equiv -\frac{k}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+m\omega+n\omega', \end{aligned} \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'),$$

unde literele au aceiaşi semnificaţie ca în alineatele precedente, afară de m, n, care înseamnă aici două numere egale cu 0 sau 1.

In particular, când μ, ν sunt egale cu două semiperioade diferite, patrulaterul devine circumscris, relativ la toate diagonalele. Aceasta înseamnă că şi diagonalele AB, A'B' devin tangente curbei K. Un patrulater în această situaţie îl numim „total circumscris".

Luând, de exemplu:

$$\mu \equiv \omega+\omega' \quad , \quad \nu \equiv \omega',$$

avem, pentru laturile patrulaterului, următoarea reprezentare în funcţiune de un parametru arbitrar h,

$$i_1 \equiv h \quad , \quad i_2 \equiv h+\omega \quad , \quad j_1 \equiv h+\omega' \quad , \quad j_2 \equiv h+\omega+\omega', \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

Se vede uşor, că fiecărei diagonale a patrulaterului total-circumscris i se asociază o semiperioadă. Astfel semiperioadele asociate lui IJ, AB, A'B', în reprezentarea de mai sus, sunt respectiv ω, ω', $\omega+\omega'$.

26°. Suntem acum în măsură să formulăm, în limbaj proiectiv, teorema fundamentală din 21°:

Fie o mulţime de patrulatere circumscrise curbei K *de clasa 3-a relativ la o diagonală* IJ, *iar* $\pm\mu$, $\pm\nu$ *parametrii respectivi. Prin* I, J *ducem o conică nesingulară* Γ, *ale cărei triunghiuri înscrise ei şi circumscrise lui* K *sunt de clasele* $\pm t$. *Dacă* $I_1 I_2$, $J_1 J_2$ *sunt intersecţiile ei cu laturile patrulaterului avem:*

$$(I_1\ I_2\ J_1\ J_2)_\Gamma = \frac{\wp t - \wp\mu}{\wp t - \wp\nu}.$$

De aici, o consecinţă importantă:

Considerăm un triunghiu $P_1P_2P_3$, *format cu tangentele unei conice tritangente lui* K. *Fie* IJ *diagonala unui patrupunct total-circumscris lui* K, *asociată aceleiaşi semiperioade ca* $P_1P_2P_3$. *Conica* Γ *circumscrisă lui* $P_1P_2P_3$ *şi care trece prin* I, J, *e tăiată de laturile patrulaterului, după un raport anarmonic egal cu acela asociat, prin teorema lui* SALMON, *curbei* K.

Intr'adevăr, fie ω semiperioada corespunzătoare diagonalei IJ. Clasa triunghiului $P_1P_2P_3$ e prin urmare ω. Am văzut în alineatul precedent că parametrii μ şi ν au, pentru un astfel de patrulater total-circumscris, valorile $\omega + \omega'$ şi ω'. Teorema fundamentală precedentă ne dă

$$(I_1 I_2 J_1 J_2)_\Gamma = \frac{\wp\omega - \wp(\omega + \omega')}{\wp\omega - \wp\omega'} = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}$$

unde e_i $(i = 1, 2, 3)$ au semnificaţia bine-cunoscută din teoria funcţiunii lui WEIERSTRASS $\wp u$. Deci teorema e demonstrată.

D. BARBILIAN.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „VASILE CONTA"

In conformitate cu art. 4 din regulamentul premiului « VASILE CONTA », avem onoare a aduce la cunoştinţa Dvs. următoarele:

Potrivit art. 2 din acelaşi regulament, premiul « VASILE CONTA » se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Intru cât până la data de mai sus nu s'a prezentat nici o lucrare, premiul în sumă de lei 4.000, nu se poate acorda şi se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Suma de mai sus, urmează să se adaoge la premiul anilor viitori.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI
« VASILE CONTA »
PROF. O. ONICESCU, PROF. AL. PANTAZI

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală din 26 August 1943.

NOTE MATEMATICE

7. *Asupra problemei 5303.* Dintr'o regretabilă scăpare din vedere, soluția din G. M. — LIX — 100 a acestei probleme, conține o eroare și anume, trebuia

$$2a - 2 = (m + 1)(m - 2)$$

deci

$$(m + 1)(m - 2) > T_{m+1}$$

dacă $m > 4$, astfel că proprietatea din enunț este adevărată.

G. G. CONSTANTINESCU.

8. *O corelație asupra produsului numerelor prime cu un număr dat și inferioare lui.* Imi propun să arăt că dacă $A > B$, atunci nu putem avea niciodată $\pi(A) < \pi(B)$, unde $\pi(i)$ înseamnă produsul numerelor prime cu i și inferioare lui i.

In adevăr, se observă că în realitate nu putem avea:

$$B \cdot \pi(A) < A \cdot \pi(B).$$

Fie deci a_i factori primi ai lui A și b_i factori primi ai lui B, atunci aplicând formula produsului numerelor prime și inferioare unui număr dat, avem:

$$\frac{(A-1)!\ \pi\left(\frac{A}{a_1 a_2}\right)!\ \pi\left(\frac{A}{a_1 a_2 a_3 a_4}\right)! \dots}{\pi\left(\frac{A}{a_1}\right)!\ \pi\left(\frac{A}{a_1 a_2 a_3}\right)! \dots \pi\, a_1^{\frac{\varphi(A)}{a_1 - 1}} \dots} < \frac{(B-1)!\ \pi\left(\frac{B}{b_1 b_2}\right)!\ \pi\left(\frac{B}{b_1 b_2 b_3 b_4}\right)! \dots}{\pi\left(\frac{B}{b_1}\right)!\ \pi\left(\frac{B}{b_1 b_2 b_3}\right)! \dots \pi\, b_1^{\frac{\varphi(B)}{b_1 - 1}} \dots}$$

Dar observăm că dacă $A > B$, atunci $(A-1)! > (B-1)!$ Apoi scriem neegalitatea sub forma:

$$\frac{(A-1)!}{(B-1)!} \cdot \frac{\pi\left(\frac{A}{a_1 a_2}\right)!}{\pi\left(\frac{B}{b_1 b_2}\right)!} \dots Q_1 < \frac{\pi\left(\frac{A}{a_1}\right)!}{\pi\left(\frac{B}{a_1}\right)!} \dots Q_2 \cdot \frac{\pi\, a_1^{\frac{\varphi(A)}{a_1 - 1}}}{\pi\, b_1^{\frac{\varphi(B)}{b_1 - 1}}} \dots Q_3$$

unde $Q_{1,2,3}$ reprezintă cantități care rezultă din faptul că unul din numerele A sau B are mai mulți factori primi.

Presupunând mai întâi că A şi B au acelaşi număr n de factori primi, atunci ar trebui să avem:

$$\frac{\left(\frac{A}{a_1 a_2 \ldots a_{2k}}\right)}{\left(\frac{B}{b_1 b_2 \ldots b_{2k}}\right)} < \frac{\left(\frac{A}{a_1 a_2 \ldots a_{2k-1}}\right)}{\left(\frac{B}{b_1 b_2 \ldots b_{2k-1}}\right)}$$

unde $2k < n$.

De aci rezultă că trebuie să avem $b_{2k} < a_{2k}$.

Dacă n este par atunci $n = 2k$; iar dacă este impar, cazul este cu totul defavorabil, căci ne rămâne în membrul al doilea la numitor expresia: $\left(\frac{B}{b_1 b_2 \ldots b_n}\right)!$ care nu-şi are corespondentul la numărător. Dar să admitem cazul cel mai favorabil, când n este par şi dacă mai admitem că avem $b < 0$, atunci toate fracţiunile din membrul întâi sunt mai mici ca respectivele lor din membrul al doilea. Dar le vom presupune egale, caz şi mai defavorabil, atunci ţinând seamă că $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$, ne rămâne:

$$\frac{(A-1)!}{(B-1)!} < \frac{\pi a_i^{\frac{\varphi(A)}{a_i-1}}}{\pi b_i^{\frac{\varphi(B)}{b_i-1}}}.$$

Pentru cazul când $i = 1$ avem:

$$(A-1)!\ b_1^{b_1^{\beta_1-1}} < (B-1)!\ a_1^{a_1^{\alpha_1-1}}.$$

Or, cum avem $A > B$ şi $b_1 < a_1$ urmează că α_1 ar trebui să fie foarte mic faţă de b_1, ceea ce nu se poate.

De asemenea, pentru $i = 1, 2$ rezultă că exponenţii α_1 şi α_2 trebuiesc să fie mici faţă de β_1, β_2, ceea ce iar nu se poate.

Şi astfel, din aproape în aproape, analizând valorile, ajungem la imposibilitatea dată.

COMANDOR I. LINTEŞ.

9. *Observaţiuni asupra împrumutului reîntregirii.* In 1941 August, s'a lansat un împrumut, a cărui origine este 1 Septemvrie 1941, durata de 30 ani şi amortizabil prin 60 semestrialităţi, cu 4,5% pe an, sau 2,25% semestrial, semestrialitatea de 0,03053533 folosind la plata dobânzilor şi amortismentului în fiecare an.

Amortizarea se face deci după sistemul de amortizare francez şi notând cu N, C, i, n elementele împrumutului, sunt aplicabile formulele cunoscute:

$$a = \frac{NCi}{1 - u^{-n}} \quad ; \quad N_1 = \frac{Ni}{n^n - 1} \quad ; \quad N_p = N_1 u^{p-1}$$

unde a este anuitatea, N_1 numărul obligaţiunilor amortizate în anul (semestrul) întâiu, N_p numărul obligaţiunilor amortizate în anul p.

Observarea 1. Cum obligaţiile sortite se amortizează cu primă, notând cu C′ valoarea de rambursare a unei obligaţiuni, anuităţile plătite (semestrialităţile efective) vor varia şi notând cu a_{p-1}, a_p anuităţile de rang $p - 1$ şi p, avem:

$$(1) \qquad a_p - a_{p-1} = (N_p - N_{p-1}) \cdot (C' - C),$$

făcând $p = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots p$ şi ţinând seamă că $a_0 = a$, $N_0 = 0$, avem:

$$a_1 - a = N_1 (C' - C)$$
$$a_2 - a_1 = (N_2 - N_1) \cdot (C' - C)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_p - a_{p-1} = (N_p - N_{p-1}) (C' - C),$$

adunând aceste relaţiuni şi reducând:

$$(2) \qquad a_p = a + N_p (C' - C)$$

Observarea 2. Se acordă subscriitorilor şi loturi (premii), pe care dacă le însemnăm cu L pentru m obligaţiuni din cele sortite în fiecare an, obligaţiile premiate pierzând dreptul la rambursare, atunci notând cu a' anuitatea respectivă, avem:

$$a' = a + L - 2C'$$

şi deci:

$$(3) \qquad a'_p = a + N_p (C' - C) + L - mC'$$

expresiunea anuităţii de rangul p.

Observarea 3. Adunând anuităţile de rang 1, 2, 3 ..... n, obţinem notând cu S suma lor:

$$(4) \quad S = \sum_{p=1}^{n} a_p = n (a + L - mC') + N (C' - C),$$

care reprezintă suma totală achitată subscriitorilor.

Observarea 4. Tabloul de amortisment, pe primele şi ultimele două semestre, ţinând seamă şi de consideraţiunea că obligaţiunile amortizate în fiecare semestru sunt reprezentate printr'un număr de sute are forma, pentru o subscriere de 10000000000 lei:

Sem.	Obligaţiuni		Dobândă	Amortisment	Primă	Premiu	Anuitate
	în cir.	sortite					
1	2000000	16100	225000000	80500000	16100000	50064000	371664000
2	1983900	16400	223188750	82000000	16400000	50064000	371652750
. . . . .							
59	118100	58400	13286250	292000000	58400000	50064000	413750250
60	59700	59700	6716250	298500000	59700000	50064000	414980250

Anuităţile (semestrialităţile) practice, nu satisfac exact formulele găsite deoarece se impune condiţiunea ca numărul obligaţiunilor sortite în fiecare semestru să fie reprezentat printr'un număr de sute.

V. MEHEDINCU.

10. *Asupra problemei 5047*[1]). In această problemă, se cereau patratele de forma *aabaabc*.

In soluţia dată la pag. 274, Vol. XLVIII se reduce rezolvarea la 57 extrageri de rădăcini patrate, iar în Nota dela pag. 503, Vol. XLVIII se reduce numărul acestor extrageri la 20.

Voi arăta aci cum problema de mai sus se poate rezolva *fără extrageri de rădăcini patrate.*

Ca la pag. 274, Vol. XLVIII ajungem la concluzia că grupul *bc* poate fi 21, 24, 25, 29, 41, 44, 49, 61, 64, 69, 81, 84, 89.

Să luăm grupul $bc = 21$, presupunând *a, b, c diferite.* N se termină cu 1 sau 9. Fie $N = 10\alpha + 1$; deoarece N^2 are şapte cifre, α are trei cifre. Vom avea

$$N^2 = (10\alpha + 1)^2 = 100\alpha^2 + 10\,(2\alpha) + 1,$$

din care se vede că 2α se termină prin 2, adică α se termină prin 1 sau 6.

---

1) A se vedea nota D-lui G. D. SIMIONESCU dela pag. 503, Vol. XLVIII, asupra aceleiaşi probleme.

Dacă $\alpha = 10\beta + 1$, avem

$$N^2 = (100\beta + 11)^2 = 10.000\beta^2 + 1000(2\beta) + 100(2\beta + 1) + 21;$$

dacă $2\beta + 1 \leqslant 9$, urmează că 2β și $2\beta + 1$ se termină prin aceeași cifră a, ceea ce nu se poate. Trebuie deci $10 \leqslant 2\beta + 1 \leqslant 20$, altfel $2\beta + 1$ și $2\beta + z$ nu se termină prin aceeași cifră, ceea ce iarăși nu se poate, z fiind cifra zecilor lui $2\beta + 1$. Vom avea deci $\beta = 6, 7, 8, 9$; pentru care însă $N \leqslant 1000$, iar N^2 nu mai are șapte cifre.

Dacă $\alpha = 10\beta + 6$, avem

$$N^2 = (100\beta + 61)^2 = 10.000(\beta^2 + \beta) + 1000(2\beta + 3) + 100(2\beta + 7) + 21.$$

Trebuie ca $2\beta + 7$ și $2\beta + 3 + z$, unde z este cifra zecilor lui $2\beta + 7$, să se termine prin *aceeași* cifră a, deci $z = 4$, iar $2\beta + 7 = 43, 45, 47, 49$, $\beta = 18, 19, 20, 21$, apoi $N = 1861, 1961, 2061, 2161$, care nu dau soluții.

Fie atunci $N = 10\alpha + 9$, deci

$$N^2 = (10\alpha + 9)^2 = 100(\alpha^2 + \alpha) + 10(8\alpha + 8) + 1;$$

$8(\alpha + 1)$ se termină prin 2, deci α se termină prin 3 sau 8.

Dacă $\alpha = 10\beta + 3$, avem

$$N^2 = (100\beta + 39)^2 = 10.000\beta^2 + 1000(7\beta + 1) + 100(8\beta + 5) + 21,$$

din care se vede că $8\beta + 5$ și $7\beta + 1 + z$, unde z este cifra zecilor lui $8\beta + 5$, se termină prin aceeași cifră $a \neq 1$. Dacă punem

$$8\beta + 5 = 100s + 10z + u \quad , \quad 7\beta + 1 + z = 100s' + 10z' + u,$$

rezultă $\beta + 4 - z = 100(s - s') + 10(z - z')$; cum β are două cifre, trebuie $s' = s$, deci $\beta = 10(z - z') + z - 4$. Având în vedere că $10^3 < N = 100\beta + 39 < 3162$, rezultă $10 \leqslant \beta \leqslant 31$, deci $z - z' = 1, 2, 3$. Trebuie determinat z, așa fel ca

$$8\beta + 5 = 80(z - z') + 8z - 27$$

să aibă pe z ca cifră a zecilor.

Dacă $z - z' = 1$, trebuie $z = 4, 5, 6, 7, 8, 9$, $\beta = 10, 11, 12, 13, 14, 15$, $8\beta + 5 = 85, 93, 101, 109, 117, 125$ care nu îndeplinesc condiția de mai sus.

Dacă $z - z' = 2$, trebuie $z = 0, 1, 2, \ldots 9$, $\beta = 16, 17, \ldots 25$, $8\beta + 5 = 133, 141, 149, 157, 165, 173, 181, 189, 197, 205$, care nu îndeplinesc condiția de mai sus.

Dacă $z - z' = 3$, trebuie $z = 0, 1, 2, \ldots 5$, $\beta = 26, 27, 28, 29, 30, 31$, $8\beta + 5 = 213, 221, 229, 237, 245, 253$, dintre care 229, 237, 245, 253 au pe z ca cifră a zecilor şi care dau $N = 2839, 2939, 3039, 3139$, ale căror patrate însă nu sunt de forma căutată.

Dacă $\alpha = 10\beta + 8$, avem

$$N^2 = (100\beta + 89)^2 = 10.000\beta^2 + \beta) + 1000(7\beta + 7) + 100(8\beta + 9) + 21,$$

din care se vede că $8\beta + 9$ şi $7\beta + 7 + z$, unde z este cifra zecilor lui $8\beta + 9$, se termină prin aceeaşi cifră $a \neq 1$. Dacă punem

$$8\beta + 9 = 100s + 10z + u \quad , \quad 7\beta + 7 + z = 100s' + 10z' + u$$

găsim, ca în cazul precedent, $s = s'$, $\beta = 10(z - z') + z - 2$. Trebuie ca $8\beta + 9$ să aibă pe z ca cifră a zecilor.

Dacă $z - z' = 1$, trebuie $z = 2, 3, \ldots 9$, $\beta = 10, 11, \ldots 17$, $8\beta + 9 = 89, 97, 105, 113, 121, 129, 137, 145$ dintre care, niciunul nu are pe z ca cifră a zecilor.

Dacă $z - z' = 2$, trebuie $z = 0, 1, 2, \ldots 9$, $\beta = 18, 19, \ldots 27$, $8\beta + 9 = 153, 161, 169, 177, 185, 193, 201, 209, 217, 225$ dintre care, niciunul nu are z ca cifră a zecilor.

Dacă $z - z' = 3$, trebuie $z = 0, 1, 2, 3$, $\beta = 28, 29, 30, 31$, $8\beta + 9 = 233, 241, 249, 257$ dintre care, niciunul nu are pe z ca cifră a zecilor.

In acest mod, se examinează şi celelalte cazuri.

Calea este lungă, e drept, dar este *matematică* şi, în acest sens, *instructivă*, căci nu soluţia unei asemenea probleme contează ci *raţionamentul* care a dus la ea, a cărui construcţie este tocmai rostul educativ matematic al activităţii la *Gazeta Matematică*.

M. G.

11. *O demonstraţie elementară prin geometria analitică a teoremei lui* VARIGNON.

Să considerăm paralelogramul OF_1RF_2 format de forţele $\vec{OF_1}$, $\vec{OF_2}$, a căror rezultantă este $\vec{OR}$. Fie A un punct în planul acestui paralelogram. Dăm o demonstraţie elementară a foarte întrebuinţatei teoreme:

$$\mathfrak{M}_A \vec{F_1} + \mathfrak{M}_A \vec{F_2} = \mathfrak{M}_A \vec{R}.$$

Luăm pe OF_1 prelungit, ca axă a absciselor, perpendiculare în O pe aceasta ca axă a ordonatelor. Introducem notaţiile:

$$A(m, n); \; F_1(a, 0); \; \sphericalangle F_1OF_2 = \alpha; \; F_2(b, b\,\mathrm{tg}\alpha).$$

Rezultă $R(a+b, b\,\mathrm{tg}\alpha)$.

Ţinând seama de definiţia momentului şi de semnul lui, relaţia teoremei este

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m & n & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m & n & 1 \\ b & b\,\mathrm{tg}\alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m & n & 1 \\ a+b & b\,\mathrm{tg}\alpha & 1 \end{vmatrix},$$

care desvoltată devine evidentă.

Generalizarea pentru un număr de n forţe rămâne tot cea obişnuită.

VIRGIL GHIŢESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROPUSE LA EXAMENUL DE ASTRONOMIE LA FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN IAŞI

Sesiunea Iunie 1943. Probe scrise

1. Se presupune că avem o stea A pe sfera cerească, de paralaxă anuală π, de ascensiune dreaptă α şi declinaţie δ; dacă $\odot$ este longitudinea soarelui şi ε oblicitatea eclipticei, considerând orbita pământului circulară cu soarele aşezat în centrul ei şi luând distanţa dela pământ la soare drept unitate de lungime, să se arate că schimbările în ascensiune dreaptă şi declinaţie ale stelei ($\Delta\alpha$ şi $\Delta\delta$), datorite paralaxei anuale sunt:

$$\Delta\alpha = \pi \sec\delta\,(\sin\odot\cos\alpha\cos\varepsilon - \cos\odot\sin\alpha)$$

$$\Delta\delta = \pi\,[\sin\odot\,(\cos\delta\sin\varepsilon - \sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon) - \cos\odot\cos\alpha\sin\delta].$$

2. Considerăm apoi o a doua stea B, situată pe sfera cerească foarte aproape de A, de paralaxă anuală zero.

Să se arate că dacă ρ şi s sunt respectiv unghiul de poziţie şi distanţa unghiulară dela A la B, măsurate în A, aceste cantităţi se schimbă din cauza paralaxei anuale a lui A, după expresiile:

$$\Delta s = \cos\rho\,.\,\Delta\delta + \sin\rho\cos\delta\,.\,\Delta\alpha$$

$$\sin s\,.\,\Delta\rho = \sin\rho\,.\,\Delta\rho - \cos\rho\cos\delta\,.\,\Delta\alpha.$$

3. O planetă mică are:

mişcarea medie zilnică . . . . . $n = 546'',9$

semi axa mare a orbitei . . . . . $a = 3,4784$

excentricitatea orbitei . . . . . $e = 0,0955$

timpul de trecere la periheliu . . . . . T = 1942 April 15, 327 (timp civil *Greenwich*).

Să se găsească anomalia excentrică, anomalia adevărată şi raza ei vectoare, pentru o dată $t = 1942$ Septembre 28,0 (timp civil *Greenwich*).

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politecnice din România. An. LVII Nr. 6. Iunie 1943. C. BUDEANU: † LAURENŢIU TEODOREANU. N. TILIBAŞA: Contribuţiuni la stabilirea câtorva principii şi metode de conducere pentru autobuse şi autovehicule grele. C. CÂNDEA: Innobilarea ligniţilor româneşti. ŞERB. SOLACOLU: Studii experimentale asupra pământului ca material de construcţie pentru zidărie la construcţii rurale.

Idem. Nr. 7—8. Iulie-August 1943. V. GEORGESCU: Lungimile racordărilor parabolice. Calculul şi graficele ajutătoare. I. STANISAVLIEVICI: Epurarea apelor cu fosfat. A. STEOPOE: Despre caietele de sarcini pentru cimentul Portland.

Revista Matematică din Timişoara. An. XXIII. No. 8. Oct. 1943. V. ALACI: Relaţiuni remarcabile într'un triunghiu. Note matematice, chestiuni de examen, probleme rezolvate şi propuse.

România Aeriană. An. XVII. Nr. 9. Sept. 1943. L. I. POPESCU: AUREL VLAICU. V. VÂLCOVICI: Cercetarea teoretică a sborului. AND. POPOVICI: O misiune de recunoaştere şi bombardament uşor. JOSÉ ROJAS Y MORENO: Indrăgostit. AL. VLĂDICESCU: Distrugătoarele aeriene. DAN RADIANU: Din cer cad armate. MIRCEA PĂTRU: Planorul. I. PAULAT: Salt în trecut. FRIED ROEDEMEYER: Ştiinţele radiofonice germane.

FLORICA CÂMPAN: Surfaces parallèles et semblables. Teză de doctorat, 12 Dec. 1942. Univ. Iaşi.

I. LINTEŞ: Les accélérations du projectile dans l'âme. (Extr. din *Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest*, Nr. 3—4. An. XIII. 1942).

AL. STOENESCU: Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant. (Extr. din *Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest*, XIII. 1941. Nr. 1—2).

AL. STOENESCU: Sur les systèmes de forces sous l'action desquelles un mobile parcourt une trajectoire donnée. (Ext. din *Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest*, XIII. 1942. Nr. 3—4).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 312, An. XLVII, pag. 458. Se cere semnificaţia iniţialelor F. G. M., ca autor al unor tratate de matematici.

Am rugat pe D-l V. THÈBAULT să descopere pe autorul care se ascunde sub F. G. M. D-sa, la rândul său, s'a adresat *Fratelui*[1] CHARLEMAGNE, Procuror general[2] la *Frères des Écoles Chrétiennes*, 78 Rue de Sèvres, Paris VII-e, de la care a primit o scrisoare din care extragem :

„*Cele două semnături* F. J. *şi* F. G. M., *corespund la doi din superiorii „noştri generali*[2] *decedaţi : Prea cinstitul Frate* JOSEPH *(1884—1897) şi prea „cinstitul Frate* GABRIEL-MARIE *(1897—1913).*

„*Fratele* GABRIEL-MARIE *(în viaţa laică* EDMOND BRUNHES *şi în ediţiile „spaniole* BRUNO) *este autorul mai multor texte de matematici. El şi-a „consacrat ultimele luni ale existenţei sale la revizuirea temeinică a tuturor „ediţiilor noastre de matematici. Este rudă de aproape cu D-l* JEAN BRUNHES[3], „*geograf, Directorul Observatorului din Clermont-Ferrand şi cu Monseniorul „*BRUNHES *din Montpellier.*

„*Atât Fratele* JOSEPH (JUSSERAND) *cât şi Fratele* GABRIEL-MARIE „*aparţin unei epoce în care în Franţa se obişnuia să se pună sub numele „*FRATELUI SUPERIOR GENERAL, *toate uvrajele de librărie, rezultate din „activitatea individuală sau colectivă a Fraţilor Congregaţiei, uvraje care „întotdeauna sunt fructul a multiple experienţe de studii şi profesorat, „experienţe care se complectau şi se controlau reciproc pentru binele autorilor, „al profesorilor şi al şcolarilor.*

D-l V. THÉBAULT, adaogă următoarele detalii interesante :

„Este sigur că Fratele GABRIEL-MARIE este un matematician sub semnătura „căruia au apărut multe probleme în diferite reviste, dintre care şi în *Mathesis*.

„In Franţa sunt două sisteme de învăţământ primar, secundar şi superior:

„1. Institutele şi şcolile de Stat, în care personalul didactic este recrutat, „format şi plătit de Stat.

„2. Invăţământul zis *liber*, de formaţie esenţialmente catolică, care nu „este de Stat. Există în Franţa (la Paris, Lille, Angers,...) mai multe congre- „gaţii catolice foarte renumite, care întreţin şcoli primare, secundare, etc. „Educaţia fetelor şi băieţilor în aceste şcoli este foarte aleasă. Profesorii „acestor şcoli sunt foarte studioşi iar şcolile respective, care se găsesc în mai „toate oraşele, se bucură de o foarte mare consideraţie şi sunt foarte mult „frecventate. In schimb pătrunderea politicei printre profesorii de Stat, „delăsarea ţinutei şi vicierea moravurilor din ultimul timp, a dăunat mult „tuturor şcolilor noastre".

---

1) Frère (frate) titlul care se dă unui călugăr, din o anume congregaţie.

2) Grad, în congregaţia respectivă.

3) Este mare asemănare de nume cu astronomul german BRUHNS (1822—1881), care a scris în 1876 : *Nouveau manuel de logarytme à sept décimales.*

In concluzie F. J. este FRATELE JOSEPH iar F. G. M. este FRATELE GABRIEL MARIE. Cărţile de matematici care poartă aceste iniţiale ca autori sunt fructul unor lucrări colective din şcolile dela *Ecoles Chrétiennes din Paris*.

Mulţumim d-lui V. THÉBAULT pentru informaţiile şi observaţiile pe care le-a dat ca răspuns întrebării noastre. Observaţiile D-lui V. THÉBAULT asupra învăţământului în general oglindesc stări care se găsesc şi aiurea şi care cer o revenire la învăţământul de altădată.

G-L GH. B.

324. Pentru întocmirea fişelor unei Bibliografii a materialului ştiinţific cuprins în volumele *Gazetei Matematice* poate fi şi de folos concursul corespondenţilor *Gazetei*. De aceea facem apel la corespondenţii care dispun de timp şi doresc a contribui la întocmirea acestei Bibliografii, să-şi ofere serviciile, comunicând aceasta D-lui G. G. CONSTANTINESCU., Str. Aquila 10, Bucureşti 6.

G. G. C.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică"

In şedinţa de Luni 25 Oct. 1943, D-l Ing. D. V. STOICA a oferit, *ca pentru numărul de faţă*, să suporte personal costul tipăririi tuturor paginelor, care depăşesc numărul normal de 56 pagini lunare ale *Gazetei Matematice*, spre a da putinţa să apară în întregime şi mai repede articolele ce se găsesc primite mai de mult la redacţie.

Graţie acestei sarcini pe care şi-a luat-o D-l Ing. D. V. STOICA, numărul de faţă apare în 88 pagini.

Contribuţia D-lui Ing. D. V. STOICA, care este în şirul altora anterioare, este apreciabil de mare. Ea a fost primită cu vii mulţumiri şi a avut ca urmare următoarea hotărâre luată în şedinţă:

Autorii de articole, membri ai societăţii sau corespondenţi, care doresc să li se publice articolele cu prioritate sau mai repede, pot obţine aceasta plătind anticipat costul imprimării a unui număr de pagini, corespunzător articolului respectiv, şi care depăşesc numărul obişnuit de pagini lunare, care a fost fixat la 56 pentru acest an.

In chiar această şedinţă D-l AD. GHEORGHIU a oferit să suporte costul imprimării unui supliment de pagini la numărul 4 din Decembrie 1943, pentru a se publica un articol al D-sale.

b) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

Ing. AL. D. BUNESCU. Technologie grafică. (Bucureşti, 1943).
Donată de autor.

Maior ED. DRAGOMIRESCU. Contribuţiuni la problema apărării contra carelor de luptă. (Piteşti, 1943).
Donată de autor.

JOH. MÜLLER. Matematischer Supplementband zum Grundrisz der Physik und Meteorologie (Braunschweige, 1875).
Donată de D-na MARIA D. LAMBRU.

C. ALASIA. Su alcune proprieta dei numeri e delle congruenze. Civita nova Marche. 1898.

EMILE BOREL. Trigonométrie. Second Cycle. Paris 1912.
Donate de D-l I. IONESCU. Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2545. *Să se găsească locul punctelor lui* GERGONNE *ale triunghiurilor înscrise într'un cerc fix* O *şi circumscrise altui cerc* I *de asemenea fix.*

Ş. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: MIHAIL GHERMĂNESCU, N. N. MIHĂILEANU (când erau studenţi, Bucureşti).

Fie N punctul GERGONNE. Din relaţiunile:

$$\overline{IN}^2 = r^2\left[1 - \frac{3p^2}{(4R+r)^2}\right], \quad \overline{ON}^2 = R^2 - \frac{4(R+r)}{(4R+r)^2}p^2r \ ^{1)}$$

— unde R, r şi p reprezintă elementele cunoscute — se obţine prin eliminarea parametrului p^2, relaţiunea:

$$4(\overline{IN}^2 - r^2)(R+r) = 3(\overline{ON}^2 - R^2)r$$

care exprimă că raportul puterilor punctului N, faţă cu cercurile O şi I, este constant. *Locul punctului* N *este deci un cerc, aparţinând fascicolului linear definit de cercurile* O *şi* I.

Observaţiuni. 1°. Soluţie analoagă cu precedenta s'a primit dela D-l M. MARGULIUS.

2°. D-l C. H. NICOLAU face cunoscut că problema mai generală, când cercurile I şi O sunt înlocuite prin conice, se găseşte rezolvată în IMBER M. WEILL, *Géométrie analytique,* pag. 948.

1) A se vedea *Exercices de Mécanique* par F. G. M., probl. 1148, 1151 sau F. G. M., *Exercices de Géométrie* 1453^d, pag. 670 şi 671.

Aceeaşi chestiune este expusă şi în articolul G. ŢIŢEICA, *La méthode de* M. KUBOTA *(Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'Ecole Polytechnique de Bucarest*, Fasc. 22, 23 şi 24, pag. 6).

3°. Fie D, E şi F punctele de contact ale laturilor triunghiului variabil cu cercul înscris I. Inversiunea ce are ca cerc fundamental cercul I transformă cercul circumscris O în cercul lui EULER al triunghiului DEF. Problema noastră este deci echivalentă cu următoarea:

Să se găsească locul geometric al punctelor lui LEMOINE *ale triunghiurilor înscrise într'un cerc fix şi având acelaşi ortocentru.*

4°. Problema 2545 este un caz particular al problemei 5737 (G. M., Vol. XLVIII, pag. 192), punctul lui GERGONNE fiind inversul isogonal al centrului de asemănare intern al cercurilor O şi I.

(Ş. A. G.).

PROBLEMA 3081. *Congresul panortodox dela Constantinopol a hotărât ca din anii $\mathcal{M}100$, să nu fie bisecţi decât cei de forma $\mathcal{M}9+2$ şi $\mathcal{M}9+6$. Care este durata mijlocie a anului după această normă? Cum stă această durată faţă de anul astronomic?*

I. IONESCU.

Din 9 ani multipli de 9, numai 2 ani sunt bisecţi. Calculând pentru 900 de ani, cu valoarea atribuită anului de SOSIGENE-JULIUS CESAR, de 365, 25 zile avem:

$$900 \text{ ani} = 328\,725 \text{ zile.}$$

Din aceştia scoatem 7 zile care nu se pun anilor $\mathcal{M}100$, de forma $\mathcal{M}9+1$, $\mathcal{M}9+3$, $\mathcal{M}9+4$, $\mathcal{M}9+5$, $\mathcal{M}9+7$, $\mathcal{M}9+8$, $\mathcal{M}9$. Deci, după reforma acelui Congres, 900 ani au 328 718 zile, iar anul mijlociu are 365, 242 222... zile sau 365 zile, 5 ore, 48 minute, 48 secunde. Cum anul tropic are 365 zile, 5 ore, 48 minute, 47 secunde, sau 365, 2422... zile, diferenţa între cei doi ani este 0, 000 022 2 zile, sau o secundă. La 86 400 de ani trebuie suprimată o zi, fiindcă altminteri, după 31 556 926, 08 ani tropici am rămâne cu un an înapoi faţă de anul tropic. Numai de ar trăi pământul atâta ca să poată deveni cu un an mai tânăr!

EMILIAN D. ILIESCU.

PROBLEMA 4098. *Să se studieze variația funcției:*

$$y = \frac{1 + x^2}{x + \sqrt{\frac{2}{1 + x^2}}}.$$

I. IONESCU.

Fiindcă, oricare ar fi x, avem

$$1 + x^2 > 0,$$

rezultă că funcția de mai sus există în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Pentru $x = \pm\infty$ avem $y = \pm\infty$.

Funcția este discontinuă pentru valorile lui x care anulează numitorul funcției, adică pentru rădăcinile ecuației

$$x + \sqrt{\frac{2}{1 + x^2}} = 0.$$

Ridicând la patrat și verificând apoi rădăcinile găsite, obținem o singură rădăcină a ecuației de mai sus: $x = -1$.

Deci funcția este discontinuă pentru $x = -1$.

Derivata funcției este

$$y' = \frac{\sqrt{1 + x^2}\,[(x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2} + 3\sqrt{2}\,x]}{(x\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{2})^2}.$$

Derivata se anulează deci pentru rădăcinile ecuației.

$$(x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2} + 3\sqrt{2}x = 0. \qquad (1)$$

Prin ridicare la patrat obținem ecuația

$$x^6 - x^4 - 19x^2 + 1 = 0,$$

cu 4 rădăcini reale:

$$x = \pm 0{,}2289 \quad , \quad x = \pm 2{,}204.$$

Din aceste rădăcini numai două verifică ecuația (1)

$$x = \alpha = -2{,}204, \quad x = \beta = 0{,}2289$$

și avem

$$y \cong -3{,}617 = m \quad \text{pentru } x = \alpha$$

$$y \cong 0{,}65 = n \quad \text{„} \quad x = \beta.$$

Alcătuim următorul tablou de discuţie:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	n	$\nearrow$	$+\infty$

Funcţia are aşa dar un maxim m şi un minim $64n$.

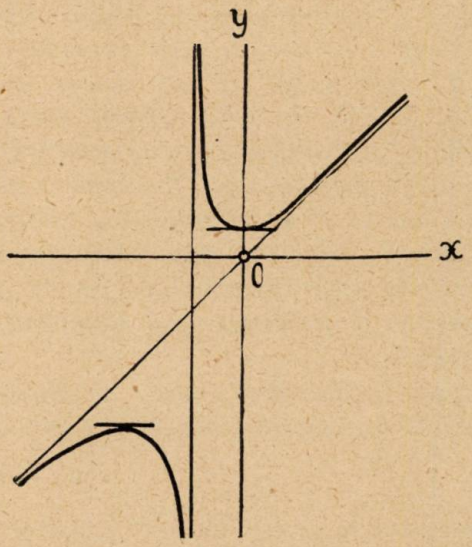
Pentru a construi diagrama funcţiei, mai observăm că prima bisectoare este asimptotă curbei. Intr'adevăr:

$$u = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x} \right) = 1,$$

iar

$$d = \lim_{x \to \infty} (y - ux) = \lim_{x \to \infty} (y - x) = 0$$

curba are forma din figură.



Am considerat radicalul având semnul $+$. Dacă considerăm funcţia

$$y = \frac{1 + x^2}{x - \sqrt{\frac{2}{1 + x^2}}}$$

diagrama respectivă este simetrică, în raport cu originea, cu diagrama funcţiei din enunţ.

P. P. DRĂGHICESCU.

PROBLEMA 5225. *Să se scrie expresiunea generală a numerelor care au un 7 la zecile de mii.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: D. D. BOIANGIU (Severin), MIRCEA I. Z. LUPAN, M. S. ROSENZWEIG (Brașov), STELIAN CETĂȚIANU (București), EUGEN M. ȘENCHI, AUREL N. POPA (Iași).

Fie n un număr întreg oarecare și a, b, c, d numere cuprinse între 0 și 9; numerele N cerute de enunțul problemei sunt date de expresiunea:

$$N = 10000\,(10n + 7) + 1000a + 100b + 10c + d.$$

PROBLEMA 5260. *Se dă un cilindru gol* AB, *de secțiune circulară, astupat la ambele capete și suspendat într'un punct* O *astfel că, în aceste condițiuni, el este în echilibru. Se introduc în cilindru două sfere, având fiecare aceeași greutate însă de densități diferite* δ_1 *și* δ_2 $(\delta_1 > \delta_2)$. *Sferele fiind așezate amândouă în capătul* A, *pentru a se restabili echilibrul cilindrului, se atârnă de capătul* B *o greutate* p_1. *Trecându-se sferele în capătul* B, *greutatea* p_1 *așezată în* A *nu mai poate restabili echilibrul.*

Se întreabă: 1°. *Care din două din sfere este, în fiecare caz, mai apropiată de verticala trecând prin punctul de suspensiune?*

2°. *Ce greutate* p_2 *trebuiește pusă în capătul* A *pentru a se restabili echilibrul?*

Se presupune că diametrul interior al cilindrului este numai puțin mai mare decât diametrul sferei celei mai mari.

ION S. ANTONIU.

Vom presupune, în primul rând, că cilindrul este omogen și simetric. In acest caz, punctul de suspensiune este exact la mijlocul lui. De asemenea vom presupune că amândouă sferele sunt pline și omogene. In acest caz, deoarece $\delta_1 > \delta_2$, rezultă $R_1 < R_2$.

Sunt două cazuri de examinat și anume: $p_1 > p_2$ și $p_1 < p_2$.

Cazul I. 1°. Deoarece $p_1 > p_2$ deducem că momentul greutăților sferelor față de centrul de greutate al cilindrului este mai mare atunci când sferele se găsesc în capătul A. Cum greutatea sferelor este aceeași oriunde ar fi ele așezate, rezultă că, în acest

caz, sferele sunt mai depărtate de centrul de greutate al cilindrului decât dacă ar fi aşezate în B. Rezultă dar că, dacă sferele sunt aşezate în capătul A, sfera având raza cea mai mare este mai apropiată de verticala punctului de suspensie. Dacă sferele sunt în capătul B, sfera având raza cea mai mică este mai apropiată de această axă.

2°. Luând momentele în raport cu centrul de greutate al cilindrului, dacă presupunem că lungimea lui este 2L, găsim

$$p_1 = \left[2 - 3\frac{R_1}{L} - \frac{R_2}{L}\right]p$$

p fiind greutatea unei sfere.

Cazul II. 1°. Cum $p_2 > p_1$, un raţionament analog cu cel de sus ne arată că atunci când sferele sunt aşezate în A, sfera având raza cea mai mică este mai aproape de verticala punctului de suspensiune şi când sferele sunt aşezate în A, sfera având raza cea mai mare este mai aproape de această verticală.

2°. Mărimea greutăţii p_2 se determină analog şi se găseşte

$$p_2 = \left[2 - 3\frac{R_1}{L} - \frac{R_2}{L}\right]p$$

adică aceeaşi expresie ca şi în cazul precedent. Rezultatul putea fi prevăzut *a priori* căci al doilea caz se obţine prin aşezarea inversă a sferelor în cilindru.

Discuţie. 1°. Condiţia de posibilitate a problemei este

$$2L \geqslant 2(R_1 + R_2)$$

care arată că sferele pot intra în cilindru amândouă deodată.

2°. Calculând greutăţile p_2 (pentru cazul 1) şi p_1 (pentru cazul 2), găsim

$$p_{21} = p_{12} = \left[2 - \frac{R_1}{L} - 3\frac{R_2}{L}\right]p$$

(am notat p_{21} şi p_{12} expresia greutăţii p_2 în cazul I şi p_1 în cazul II).

Pentru ca problema să aibă un sens trebue ca

$$p_{11} = p_{22} = \left[2 - 3\frac{R_1}{L} - \frac{R_2}{L}\right]p > 0$$

şi

$$p_{21} = p_{12} = \left[2 - \frac{R_1}{L} - 3\frac{R_2}{L}\right]p > 0.$$

Cum $p > 0$, obţinem relaţiile

$$2L > 3R_1 + R_2$$

şi

$$2L > R_1 + 3R_2.$$

Dar $R_2 > R_1$, deci $R_1 + 3R_2 > 3R_1 + R_2$, astfel că ambele relaţii se reduc la

$$2L > R_1 + 3R_2.$$

Deci pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca lungimea cilindrului să fie mai mare decât suma diametrelor celor două sfere căci avem evident

$$R_1 + 3R_2 > 2(R_1 + R_2).$$

3°. Calculând diferenţa dintre cele două greutăţi necesare echilibrării sistemului, găsim:

$$p_{11} - p_{21} = p_{21} - p_{12} = 2\frac{R_2 - R_1}{L} p > 0.$$

Observaţii. 1°. Problema nu are niciun sens dacă cilindrul nu este simetric şi omogen. Intr'adevăr, în acest caz punctul de suspensie este oriunde pe cilindru, în niciun caz la mijlocul lui. Sistemul astfel obţinut formează o balanţă cu braţe inegale din echilibrarea căreia nu putem trage nicio concluzie în ceea ce priveşte aşezarea sferelor. De asemenea problema este nedeterminată dacă presupunem sferele neomogene.

2°. La această problemă s'a primit o singură soluţie incompletă dela Domnul EMIL MODÂLCĂ (Politechnica Bucureşti).

I. S. A.

PROBLEMA 5337. *Se notează cu* A', B', C' *ortopolurile medianelor* AA_1, BB_1, CC_1 *ale triunghiului* ABC *faţă de acest triunghiu. Să se demonstreze:*

1. *Că segmentele* AA', BB', CC' *se exprimă în funcţie de laturile şi suprafaţa triunghiului* ABC *prin formulele*

$$AA' = la \quad ; \quad BB' = mb \quad ; \quad CC' = nc \ ;$$

unde

$$l = \frac{(3b^2 + c^2 - a^2)(3c^2 + b^2 - a^2)}{8S(2b^2 + 2c^2 - a^2)}$$

$$m = \frac{(3c^2 + a^2 - b^2)(3a^2 + c^2 - b^2)}{8S(2c^2 + 2a^2 - b^2)}$$

$$n = \frac{(3a^2 + b^2 - c^2)(3b^2 + a^2 - c^2)}{8S(2a^2 + 2b^2 - c^2)}.$$

2. *Că laturile a', b', c, ale triunghiului* A'B'C' *și aria lui* S' *sunt date de formulele*

$$a'^2 = a^2 + m^2b^2 + n^2c^2 - 4(m+n)S + (b^2 + c^2 - a^2)mn$$
$$b'^2 = b^2 + n^2c^2 + b^2a^2 - 4(n+l)S + (c^2 + a^2 - b^2)nl$$
$$c'^2 = c^2 + l^2a^2 + m^2b^2 - 4(l+m)S + (a^2 + b^2 - c^2)lm$$
$$2S' = 2(1 + mn + nl + lm)S - (la^2 + mb^2 + nc^2).$$

D. V. IONESCU.

1. Fie M proiecția lui B pe AA_1 și P proiecția lui M pe AC. Ortopolul A' este la intersecția lui MP cu perpendiculara dusă din A pe BC. Să notăm cu u și v unghiurile BAA_1 și CAA_1.

Avem

$$AP = AM\cos v = AB\cos u\cos v$$

iar

$$AP = AA'\sin C.$$

De unde rezultă că

$$AA' = \frac{c}{\sin C}\cos u\cos v$$

sau

$$AA' = \frac{a}{2S}bc\cos u\cos v.$$

Să notăm cu m_a lungimea medianei AA_1. Se știe că

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Din triunghiurile ABA_1, ACA_1 se deduce

$$\frac{a^2}{4} = c^2 + m^2 - 2cm\cos u$$

$$\frac{a^2}{4} = b^2 + m^2 - 2bm\cos v$$

de unde

$$c\cos u = \frac{c^2 + m^2 - \frac{a^2}{4}}{2m} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4m}$$

$$b\cos v = \frac{b^2 + m^2 - \frac{a^2}{4}}{2m} = \frac{3b^2 + c^2 - a^2}{4m}.$$

Rezultă că:

$$bc\cos u\cos v = \frac{(3b^2+c^2-a^2)(3c^2+b^2-a^2)}{4(2b^2+2c^2-a^2)}$$

adică

$$AA' = la,$$

unde

$$l = \frac{(3b^2+c^2-a^2)(3c^2+b^2-a^2)}{8S(2b^2+2c^2-a^2)}.$$

La fel se demonstrează formulele analoage pentru BB' și CC'.

2. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. In triunghiul HB'C', unghiul B'HC' este suplimentul lui A, iar lungimile HB', HC' sunt date pe formulele

$$HB' = BB' - BH = b\left(m - \frac{\cos B}{\sin B}\right)$$

$$HC' = CC' - CH = c\left(n - \frac{\cos C}{\sin C}\right).$$

Din formulele

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

se scoate

$$\frac{ac\cos B}{ac\sin B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S} \quad , \quad \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{b^2+a^2-c^2}{4S}$$

de unde rezultă că:

$$HB' = b\left(m - \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}\right)$$

$$HC' = c\left(n - \frac{b^2+a^2-c^2}{4S}\right).$$

Din triunghiul HB'C' se calculează latura $a' = B'C'$. Se găsește

$$a'^2 = b^2\left(m - \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}\right)^2 + c^2\left(n - \frac{b^2+a^2-c^2}{4S}\right)^2$$

$$+ 2bc\left(m - \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}\right)\left(n - \frac{b^2+a^2-c^2}{4S}\right)\cos A.$$

In această formulă să înlocuim pe $2bc\cos A$ cu $b^2+c^2-a^2$ şi să efectuăm calculele. Vom avea:

$$a'^2=\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)^2+c^2(b^2+a^2-c^2)^2+(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+a^2-c^2)}{16S^2}$$

$$-\frac{(b^2+c^2-a^2)(b^2+a^2-c^2)+2b^2(a^2+c^2-b^2)}{4S}m$$

$$-\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)+2c^2(b^2+a^2-c^2)}{4S}n$$

$$+m^2b^2+n^2c^2+(b^2+c^2-a^2)\,mn.$$

Observăm că

$$(b^2+c^2-a^2)(b^2+a^2-c^2)+2b^2(a^2+c^2-b^2)$$
$$=-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+a^2b^2=16S^2$$

$$(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)+2c^2(b^2+a^2-c^2)$$
$$=-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2=16S^2$$

$$b^2(a^2+c^2-b^2)^2+c^2(b^2+a^2-c^2)^2+(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+a^2-c^2)$$
$$=a^2[-a^4-b^4-c^2+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2]=16a^2S^2.$$

Deci

$$a'^2=a^2+m^2b^2+n^2c^2-4S(m+n)+(b^2+c^2-a^2)\,mn.$$

La fel se demonstrează formulele analoage pentru b'^2 şi c'^2.

Fie S′ suprafaţa triunghiului A′B′C′.

Avem:

$$S'=\text{aria HB'C'}+\text{aria HC'A'}+\text{aria HA'B'}$$

$$=\frac{bc\sin A}{2}\left(m-\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}\right)\left(n-\frac{b^2+a^2-c^2}{4S}\right)$$

$$+\frac{ca\sin B}{2}\left(n-\frac{b^2+a^2-c^2}{4S}\right)\left(l-\frac{c^2+b^2-a^2}{4S}\right)$$

$$+\frac{ab\,\text{şin}C}{2}\left(l-\frac{c^2+b^2-a^2}{4S}\right)\left(m-\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}\right)$$

adică:

$$S' = S\Big[mn + nl + lm - \frac{l}{4S}(b^2 + a^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2) - \frac{m}{4S}(c^2 + b^2 - a^2 + b^2 + a^2 - c^2) - \frac{n}{4S}(a^2 + c - b^2 + b^2 + a^2 + c^2) + \frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+a^2-c^2)+(b^2+a^2-c^2)(c^2+b^2-a^2)+(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{16S^2}\Big].$$

Se observă că

$$(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + a^2 - c^2) + \ldots = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 = 16S^2,$$

astfel că formula precedentă devine

$$2S' = 2S(1 + mn + nl + lm) - (la^2 + mb^2 + nc^2).$$

Au rezolvat problema D-nii: P. P. Drăghicescu (Liceul militar, Iaşi); Octav C. Gheorghiu (Liceul Internat, Iaşi) şi M. D. Popa (Liceul militar, Iaşi).

PROBLEMA 5363. *Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate o singură dată, să se formeze un patrat perfect şi rădăcina sa.*

Stelian Cetăţeanu.

Dispunând de nouă cifre pentru formarea unui patrat perfect şi a rădăcinii sale, înseamnă că ele vor fi numere respectiv de şase şi trei cifre. Rădăcina patrată va fi conţinută în intervalul 317—999 care se poate reduce la 351—937, deoarece patratele numerelor din intervalul 317—351 conţin fie cifra zero, fie cifrele 1 sau 2 repetate, iar acelea ale numerelor din intervalul 937—999 conţin cifra 8 repetată sau cifra 9 în acelaşi timp cu rădăcina lor, ceeace nu este posibil conform enunţului.

Notând *abc* rădăcina patrată, rezultă $3 \leqslant a \leqslant 9$ şi că cifra c nu poate fi egală decât cu 2, 3, 4, 7, 8 sau 9 deoarece valorile 1, 5 şi 6 trebuiesc îndepărtate ele apărând în acelaşi timp ca terminaţie a patratului.

Cu acestea şi cu observaţia că în condiţiunile problemei grupul ultimelor două cifre ale patratului nu poate fi decât 16, 21, 24, 29, 36, 41, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89 sau 96, problema se rezolvă cu ajutorul a 78 ridicări la patrat, raţionând astfel:

Când $c = 2$, grupul ultimelor două cifre ale patratului nu poate fi decât 84 sau 64 corespunzând cifrei b valorile 7 sau 9, iar cifrei a respectiv valorile 3, 5, 6 sau 3, 5, 7, 8. Ridicând la patrat cele şapte numere obţinute, niciunul nu satisface condiţiilor problemei.

Când $c = 3$, grupul ultimelor două cifre ale patratului este 69 sau 29, iar $b = 1$ sau 7 rezultând $a = 4, 5, 7, 8$ sau 4, 5, 6, 8 fără a exista soluţii.

Când $c = 4$, terminaţiile patratului sunt 96, 76, 56, 16, 56 sau 36 corespunzând b egal cu 1, 2, 3, 5, 8 sau 9, iar a având de fiecare dată una din valorile conţinute în grupele (5, 7, 8), (5, 8, 9), (8, 9), (3, 7, 8), (3, 7) sau (5, 7, 8). Ridicând la patrat numerele găsite, obţinem soluţia

$$\boxed{854^2 = 729316}.$$

Când $c = 7$, avem terminaţiile 89, 69, 49 cu respectiv grupele de valori pentru b: (1, 6), (3, 8), 5 corespunzând pentru a valorile (4, 5, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 8), (3, 4, 5), (3, 6, 8) şi rezultând soluţia

$$\boxed{567^2 = 321489}.$$

Când $c = 8$, terminaţiile patratului sunt 24 sau 64, iar b este respectiv (1, 6) sau 5 în timp ce a are una din valorile (5, 6, 7, 9), (3, 5, 7) sau (3, 7) fără a exista soluţii pentru problemă.

Când $c = 9$, patratul se poate termina în 41, 21 sau 81 rezultând pentru b grupele de valori (2, 7), (3, 8) sau 5, iar pentru a: (3, 5, 6, 7, 8), (3, 5, 6, 8), (4, 5, 6, 7, 8), (3, 4, 5, 6, 7) sau (3, 4, 6, 7) fără a obţine soluţii.

D-nii P. P. Drăghicescu şi A. N. Popa, au găsit cele două soluţii în timp ce D-nii I. D. Radoslav şi C. Staicu au găsit respectiv numai soluţia 854 şi 567.

Observare: Dacă utilizăm valorile cifrei c şi grupul terminaţiilor de trei cifre ale patratelor perfecte, date în G. M. - XXXVII - 368, problema se rezolvă numai prin 23 ridicări la patrat, însă în acest mod raţionamentul este foarte redus, problema pierzând şi acel puţin interes existent în soluţia dată mai sus şi anume de a reduce cât mai mult posibil numărul încercărilor, utilizând natural, un raţionament.

G. G. C.

PROBLEMA 5404. *Se cer curbele* (Γ) *a căror podară în raport cu origina axelor este dreapta* (D) *de ecuaţia* $y = \lambda$.

Să se arate că dacă $\lambda = 1$, *curba* (Γ_1) *care are aceeaşi subnormală cu* (Γ) *este o cuartică, ce admite ca nod originea axelor de coordonate.*

MIHAIL ST. BOTEZ.

Soluţie: notând cu (x, y) un punct curent al curbei, ecuaţia tangentei în acest punct este:

$$Y - y = y'(X - x),$$

iar perpendiculara dusă prin origină are ca ecuaţie:

$$Y = -\frac{X}{y'}.$$

Podara fiind cunoscută şi dată de ecuaţia:

$$Y = \lambda.$$

Vom obţine ecuaţia diferenţială a curbelor căutate, eliminând pe X şi Y, între aceste trei ecuaţii. Se obţine astfel:

$$y = y'x + (1 + y'^2)\lambda$$

care este ecuaţia diferenţială căutată. Aceasta fiind o ecuaţie CLAIRAUT, integrala generală este familia de drepte:

$$y = cx + (1 + c^2)\lambda,$$

iar integrala singulară o vom obţine eliminând pe c între ecuaţia de mai înainte şi derivata ei în raport cu c, adică:

$$0 = x + 2c\lambda.$$

Se obţine ca rezultat al eliminării:

$$y = \lambda - \frac{x^2}{4\lambda}$$

care este o parabolă.

Subnormala acestei curbe după ce am făcut în prealabil $\lambda = 1$ este:

$$yy' = -\frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right).$$

Toate curbele ce au aceeaşi subnormală se află integrând această ecuaţie care este:

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} + c.$$

Pentru $c = 0$, obţinem cuartica ce are origina punct dublu, deoarece ecuaţia este lipsită de termeni de gradul întâi. Egalând cu zero, ansamblul termenilor de gradul al doilea se obţin tangentele principale în punctul dublu:

$$2y^2 + x^2 = 0$$

şi deoarece aceste tangente sunt imaginare, origina este un punct dublu izolat.

S'au primit soluţii bune dela D-nii: TEODOR ŞERBAN (student-inginer) şi M. A. NEGREA (Brăila).

M. St. B.

PROBLEMA 5463. *Patru persoane joacă împreună o partidă de bridge în trei robbere.*

1°. *Să se exprime valoarea fiecărui robber în funcţie de sumele iniţiale şi finale ale celor patru jucători.*

2°. *Să se găsească condiţia necesară ca doi jucători să fie câştigători, respectiv pierzători finali. Să se deducă, invers, că unul din cei doi jucători este sigur câştigător, respectiv pierzător final.*

3°. *Să se găsească condiţiile necesare şi suficiente ca unul, doi sau trei din cei patru jucători să fie câştigători finali.*

4°. *Cunoscând sumele iniţiale ale jucătorilor şi ştiind că sumele finale sunt în progresie aritmetică sau geometrică, să se determine efectiv valoarea fiecărui robber precum şi sumele finale. Discuţie.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie a, b, c valorile (cuantumurile) celor trei robbere jucate, A, B, C, D sumele iniţiale, iar A', B', C', D' sumele finale ale celor patru jucători. Ei joacă fiecare robber împreună doi câte doi, într'o ordine determinată prin tragerea a câte unei cărţi, ceea ce revine pentru noi la a zice o ordine arbitrară. Vom presupune — ceea ce este absolut egal, căci altfel schimbăm ordinea

jucătorilor — că primul robber îl joacă primul cu al doilea şi al treilea cu al patrulea jucător. Valoarea robberului fiind a, după primul robber sumele celor patru jucători vor fi respectiv

$$A + \alpha a \quad , \quad B + \alpha a \quad , \quad C - \alpha a \quad , \quad D - \alpha a,$$

unde $\alpha = \pm 1$, după cum primii doi jucători câştigă sau pierd robberul jucat.

In al doilea robber, joacă primul cu al treilea şi al doilea cu al patrulea jucător; valoarea robberului fiind b, sumele celor patru jucători după al doilea robber vor fi respectiv

$$A + \alpha a + \beta b \quad , \quad B + \alpha a - \beta b,$$
$$C - \alpha a + \beta b \quad , \quad D - \alpha a - \beta b,$$

unde $\beta = \pm 1$, după cum primul şi al treilea jucător câştigă sau pierd acest robber.

In fine, în al treilea robber, joacă primul cu ultimul şi al doilea cu al treilea jucător; valoarea robberului fiind c, sumele finale ale celor patru jucători vor fi respectiv

$$(1) \qquad \begin{cases} B' = A + \alpha a + \beta b + \gamma c, \\ B' = B + \alpha a - \beta b - \gamma c, \\ C' = C - \alpha a + \beta b - \gamma c, \\ D' = D - \alpha a - \beta b + \gamma c, \end{cases}$$

unde $\gamma = \pm 1$, după cum primul cu al patrulea jucător câştigă sau pierd.

Din (1) se deduce uşor

$$(2) \quad a = \tfrac{1}{2} | A' + B' - A - B | \ , \ b = \tfrac{1}{2} | A' + C' - A - C |,$$
$$c = \tfrac{1}{2} | A' + D' - A - D |,$$

unde

$$(3) \qquad A' + B' + C' + D' = A + B + C + D.$$

2^0. Dacă un jucător este câştigător final, suma sa finală trebuie să fie mai mare decât suma iniţială respectivă. Să presupunem că primii doi jucători sunt câştigători finali, adică $A' > A$, $B' > B$, ceea ce revine la

$$\alpha a + \beta b + \gamma c > 0 \quad , \quad \alpha a - \beta b - \gamma c > 0;$$

deducem $2\alpha a > 0$, deci $\alpha = 1$, adică ei trebuie să câştige robberul

jucat împreună. La aceeaşi concluzie ajungem dacă luăm altă pereche de jucători. Dacă cei doi jucători sunt pierzători finali, avem

$$\alpha a + \beta b + \gamma c < 0 \quad , \quad \alpha a - \beta b - \gamma c < 0,$$

deci $2\alpha a < 0$, $\alpha = -1$, adică ei trebuie să piardă robberul jucat împreună. Putem deci spune:

Condiţia necesară dar nesuficientă pentru ca doi jucători să fie câştigători, respectiv pierzători, finali, este ca ei să câştige, respectiv să piardă robberul jucat împreună.

Dacă primii doi jucători câştigă robberul jucat împreună, ei nu pot fi ambii pierzători finali căci din

$$a + \beta b + \gamma c < 0 \quad , \quad a - \beta b - \gamma c < 0$$

deducem $2a < 0$, ceea ce este absurd. Ruzultă că, *sigur, unul este câştigător final.* Dacă ei pierd robberul jucat împreună, deci $\alpha = -1$, ei nu pot fi ambii câştigători finali căci din

$$-a + \beta b + \gamma c > 0 \quad , \quad -a - \beta b - \gamma c > 0$$

deducem $-2a > 0$, ceea ce este iarăşi absurd. Rezultă că, *sigur, unul este pierzător final.* Deci:

Dintre doi jucători care câştigă, respectiv pierd, împreună un robber, unul este sigur câştigător, respectiv pierzător, final.

3°. Dacă primul este singur câştigător final, avem

$$A' > A,\ B' > B,\ C' < C,\ D' < D,$$

adică

$$\alpha a + \beta b + \gamma c > 0 \quad , \quad \alpha a - \beta b - \gamma c < 0,$$

$$-\alpha a + \beta b - \gamma c < 0 \quad , \quad -\alpha a - \beta b - \gamma c < 0,$$

din care deducem $-2\alpha a < 0$, $-2\beta b < 0$, $-2\gamma c < 0$, deci $\alpha = \beta = \gamma = 1$, aşa că inegalităţile precedente se reduc la

$$a + b + c > 0 \quad , \quad a < b + c \quad , \quad b < c + a \quad , \quad c < a + b,$$

adică:

Condiţiile necesare şi suficente ca să fie un singur câştigător final este ca el să câştige toate robberele, iar valorile acestora să poată fi laturile unui triunghiu.

Dacă sunt numai doi câştigători finali, am văzut că ei trebuie să câştige robberul pe care-l joacă împreună; dacă primii doi sunt câştigătorii, avem $\alpha = 1$, deci

$$a + \beta b + \gamma c > 0 \quad , \quad a - \beta b - \gamma c > 0,$$
$$-a + \beta b - \gamma c < 0 \quad , \quad -a - \beta b + \gamma c < 0,$$

din care deducem

$$a \pm \gamma c > 0 \quad , \quad a \pm \beta b > 0 \quad \text{deci} \quad a > b \quad , \quad a > c.$$

Dacă dăm lui β şi γ valorile ± 1 în toate modurile posibile, găsim în toate cazurile

$$b + c < a \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b$$

şi se vede uşor că $b + c < a$ atrage toate celelalte condiţii, deoarece a, b, c sunt pozitivi. Putem deci spune:

Condiţiile necesare şi suficiente ca numai doi jucători să fie câştigători finali sunt ca: ei să câştige robberul pe care-l joacă împreună, iar valoarea acestui robber să fie superioară sumei valorilor celorlalte două.

In fine, în cazul a trei câştigători finali, fie ei primii trei jucători, avem

$$\alpha a + \beta b + \gamma c > 0 \quad , \quad \alpha a - \beta b - \gamma c > 0,$$
$$-\alpha a + \beta b - \gamma c > 0 \quad , \quad -\alpha a - \beta b + \gamma c < 0,$$

care dau, prin adunări, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$, aşa că aceste inegalităţi devin

$$a + b + c > 0 \quad , \quad a + b > c \quad , \quad b + c > a \quad , \quad c + a > b,$$

deci:

Condiţiile necesare şi suficiente ca să fie un singur pierzător final sunt: acesta să piardă toate robberele, ale căror valori să poată fi laturile unui triunghiu.

4°. *a)* Fie r raţia progresiei; avem

$$B' - A' = C' - B' = D' - C' = r$$

sau

$$2\beta b + 2\gamma c = B - A - r,$$
$$2\alpha a - 2\beta b = C - B - r,$$
$$2\beta b - 2\gamma c = D - C - r,$$

din care deducem

$$4\alpha a = C + D - B - A - 4r,$$
$$4\beta b = B - A + D - C - 2r,$$
$$4\gamma c = B - A - D + C.$$

Se vede că numai c este exact determinat, semnul membrului al doilea precizând pe γ. Insă din (3) deducem

$$A' + 6r = A + B + C + D,$$

din care deducem valorile posibile ale numerelor A' şi r, întregi.

b) In cazul progresiei geometrice, de raţie q, avem

$$B' = A'q \ , \ C' = B'q = A'q^2 \ , \ D' = C'q = A'q^3$$

deci, după (3)

$$A'(1 + q + q^2 + q^3) = A + B + C + D.$$

Membrul al doilea fiind cunoscut, îi vom determina un factor de forma $1 + q + q^2 + q^3$, din care vom deduce pe q, apoi pe A', etc. Este posibil ca q să nu fie întreg ci raţional, $q = \frac{m}{n}$; în acest caz, A' se divide prin n^3. Cum

$$1 + q + q^2 + q^3 = (1 + q)\ (1 + q^2) = \frac{1}{n^3}(m + n)\,(m^2 + n^2),$$

va trebui ca ΣA să aibă doi factori $(m + n)\,(m^2 + n^2)$.

Să luăm, de exemplu, A=550, B=700, C=1000, D=1000, deci $\Sigma A = 3250$, care are factorii $3 + 2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$, deci $q = \frac{2}{3}$; avem

$$\frac{65A'}{27} = 3250,$$

care dă $A' = 1350$, $B' = 900$, $C' = 600$, $D' = 400$.

Egalităţile (2) dau

$$a = 500 \ , \ b = 200 \ , \ c = 100$$

şi se vede că $a > b + c$, conform celor stabilite la 3^0.

Notă. La această problemă s'a primit o foarte bună soluţie dela D-l H. M. BODNĂRESCU (student al Politehnicei din Bucureşti), care stabileşte aproape toate rezultatele de mai sus, cu excepţia cazului a doi câştigători dela 3^0, pe care-l consideră rezolvat la 2^0.

M. G.

PROBLEMA 5575. *Să se demonstreze că condiția necesară și suficientă ca un patrulater convex* ABCD, *de laturi consecutive a, b, c, d, să fie inscriptibil, este ca o singură diagonală să fie dată de*

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

M. GHERMĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: M. COTARIU, G. G. DONȚU, I. GR. ENĂCHESCU, O. GHEORGHIU, CĂP. E. ST. IACOB, V. D. PĂLĂCEANU, C. V. PÂRVULESCU, PANTELIMON C. Subloc., M. PĂTRĂSCIOIU și N. ROȘU.

Condiția este necesară, căci dacă patrulaterul ABCD este inscriptibil teorema lui PTOLOMEU care duce la egalitățile

$$ac + bd = ef \quad , \quad \frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{e}{f},$$

unde f este cealaltă diagonală. Aceste două relații, înmulțite membru cu membru, dau relația din enunț.

Reciproc, dacă relația din enunț este satisfăcută, prin transformări simple, ea se mai poate scrie

$$\frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} = -\frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd}.$$

Insă primul membru este egal cu cosB, din triunghiul ABC, iar al doilea cu — cosD, din triunghiul ACD; egalitatea precedentă devine

$$\cos B = -\cos D$$

și cum patrulaterul este convex, unghiurile sale sunt mai mici ca 180^0, deci $B + D = 180^0$.

Notă. Soluții incomplecte au dat D-nii: J. MAHRENHOLZ, M. MÂNDREANU, N. PITIȘ și C. I. STAICU.

M. G.

PROBLEMA 5756. *Se dau două cercuri tangente interioare. Din punctul situat pe cercul exterior şi diametral opus punctului de tangenţă al celor două cercuri, se duc cele două tangente la cercul exterior în punctele* A *şi* B. *Se cere:*

1. *Să se construiască cercul interior astfel ca dreapta* AB *să treacă prin centrul cercului mare.*

2. *Punctele de tangenţă pe cercul interior fiind* A_1 *şi* B_1 *să se arate că pentru orice raport al razelor celor două cercuri avem:*

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{A_1B_1}.$$

3. *Să se construiască cercul interior, astfel ca dreapta* A_1B_1 *să treacă prin centrul cercului mare. In această ipoteză, să se arate că segmentul de dreaptă* $\overline{A_1B_1}$ *este chiar latura triunghiului echilateral înscris în cercul mic şi înălţimea acestui triunghiu echilateral este egală cu raza cercului mare.*

ING. MIRCEA RĂDULESCU.

Soluţie dată de D-l DAMIAN N. ST. (cl. VI Liceul Militar Iaşi).

1. Considerăm construcţia executată (fig. 1). Fie T punctul de tangenţă al celor 2 cercuri, F punctul diametral opus lui T, O centrul cercului mare şi O_1 centrul cercului mic. Prin ipoteză, punctele A şi B sunt diametral opuse.

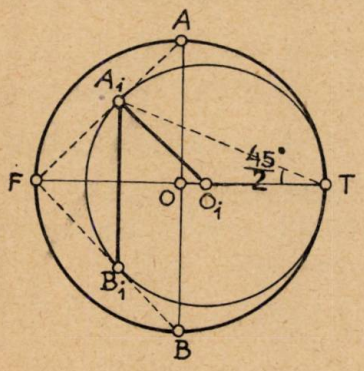


Fig. 1.

De pe figură se vede că:

$\sphericalangle TFA = 45^0$ şi $\sphericalangle FA_1O_1 = 90^0$.

Din triunghiul FA_1O_1 deducem:

$\sphericalangle FO_1A_1 = 90^0 - 45^0 = 45^0$.

Triunghiul O_1A_1T este isoscel deoarece:

$\overline{O_1A_1} = O_1T$ ca raze ale cercului mic.

Deci:

$\sphericalangle O_1A_1T = \sphericalangle O_1TA_1$.

Dar:

$$\sphericalangle O_1A_1T + \sphericalangle O_1TA_1 = \sphericalangle FO_1A_1 = 45^0.$$

Deci:

$$\sphericalangle O_1TA_1 = \frac{45^0}{2}.$$

Construim deci cercul interior astfel:

Unim punctul F cu punctul A; din punctul T ducem o dreaptă care face cu dreapta TF un unghiu de $\frac{45^0}{2}$. Punctul de intersecție al acestei drepte cu dreapta FA, este punctul de tangență A_1. In punctul A_1 ridicăm o perpendiculară pe dreapta FA, care întâlnește dreapta FT în punctul O_1 (centrul cercului mic). Segmentul de dreaptă O_1A_1 este raza cercului mic.

2. *Considerăm fig. 2.* Menținem aceleași notații ca la pct. 1.

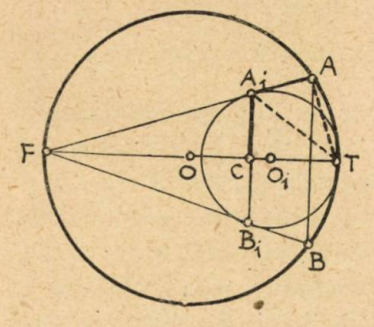


Fig. 2.

Notăm cu C punctul de intersecție a dreptei A_1B_1 cu diametrul FT. De pe figură se vede că:

$$\sphericalangle FAT = \sphericalangle A_1CT = 90^0.$$

Arcele: $\overset{\frown}{A_1T}$ și $\overset{\frown}{B_1T}$ fiind egale, avem:

$$\sphericalangle CA_1T = \sphericalangle TA_1A.$$

Rezultă deci, din triunghiurile TCA_1 și TA_1A că și unghiurile $\overset{\wedge}{CTA_1}$ și $\overset{\wedge}{A_1TA}$ sunt egale.

Aceste triunghiuri având și latura AT comună sunt egale deci laturile opuse unghiurilor egale vor fi egale, deci:

$$\overline{AA_1} = \overline{A_1C} = \overline{CB_1} = \frac{1}{2}A_1B_1.$$

3. *Considerăm construcția executată* (fig. 3). Menținem notațiile dela pct. 1. Notăm cu F_1 punctul diametral opus lui T pe cercul mic.

Depe figură se vede că:

$$\overline{FA_1} = \overline{A_1T}$$

punctele F şi T fiind egal depărtate de piciorul O al perpendicularei A_1O pe dreapta FT.

De aici rezultă că unghiurile $\widehat{TFA_1}$ şi $\widehat{FTA_1}$ sunt egale.

Unghiurile FA_1O_1 şi F_1A_1T sunt de asemenea egale, ca unghiuri drepte.

Din triunghiurile FA_1O_1 şi F_1A_1T deducem că şi:

$$\sphericalangle TF_1A_1 = \sphericalangle FO_1A_1.$$

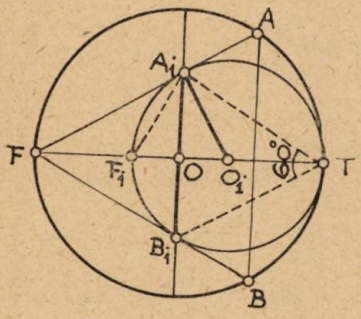


Fig. 3.

Aceste triunghiuri având şi laturile $\overline{FA_1}$ şi $\overline{A_1T}$ egale, sunt egale, deci:

$$\overline{FO_1} = \overline{F_1T}.$$

De aici deducem:

$$\overline{TO_1} = \overline{TF_1} - \overline{O_1F_1} =$$

$$= \overline{FO_1} - \overline{O_1F_1} = \overline{FF_1}.$$

Dar

$\overline{TO_1} = \overline{O_1F_1}$ (ca raze ale cercului mic).

Deci:

$$\overline{TO_1} = \overline{O_1F_1} = \overline{FF_1} = \frac{\overline{TF}}{3} = r \text{ (raza cercului mic).}$$

Deci raza cercului mic este egală cu o treime din diametrul cercului mare.

De aici rezultă construcţia cercului mic.

Triunghiul $F_1A_1O_1$, având toate laturile egale este echilateral.

Deci:

$$\sphericalangle O_1F_1A_1 = 60^0.$$

Deci:

$$\sphericalangle F_1TA_1 = 90^0 - 60^0 = 30^0.$$

Deci:

$$\sphericalangle A_1TB_1 = 2 \times \widehat{F_1TA_1} = 2 \times 30^0 = 60^0.$$

Segmentele $\overline{A_1T}$ şi $\overline{TB_1}$ fiind egale, rezultă că triunghiul A_1TB_1 este isoscel deci:

$$\sphericalangle TA_1B_1 = \sphericalangle TB_1A_1 = \frac{180^0 - 60^0}{2} = 60^0.$$

Deci triunghiul A_1TB_1 înscris în cercul mic este echilateral, dreapta $\overline{A_1B_1}$ fiind una din laturile acestui triunghiu.

Dreapta TO fiind perpendiculara din vârful T pe mijlocul laturii A_1B_1, este înălţimea triunghiului echilateral şi este şi raza cercului mare al cărui centru este în punctul O.

S'au mai primit soluţii destul de bune dela D-nii: MARCEL D. COTARIU (Brăila), NICOLAE L. PITIŞ (Mizil) şi E. N. WEGENER (Bucureşti).

M. R.

EXERCIŢII

7. Să se rezolve ecuaţia

$$x^5 + 71\ x^3 + 1536 = 0.$$

CPT. E. ŞT. IACOB.

R. Punând

$$x^5 + 71\,x^3 + 1536 = (x^2 - px + q)\ (x^3 + px^2 + rx + s)$$

şi identificând coeficienţii se găseşte

$$x\,5 + 71\ x^3 + 1536 = (x^2 - 3\,x + 8)\ (x^3 + 3)\ x^2 + 7\,x + 192) = 0$$

uşor rezolvabile.

8. Să se rezolve ecuaţia

$$x^2 + (a + b)\,x + 13ab - 6\ (a^2 + b^2) = 0.$$

VALERIU GH. ANDREI.

R. $x_{1,2} = \dfrac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4\,[13ab - 6\,(a^2+b^2)]}}{2}$.

Realizantul se reduce la

$$25a^2 - 50ab + 25b^2 = 25\ (a-b)^2$$

aşa că

$$x_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm 5\ (a-b)}{2}$$

$$\therefore \qquad x_2 = 2a - 3b \quad \text{şi} \quad x_2 = 2b - 3a.$$

Dacă x_1, x_2, x_3, sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, să se calculeze în funcţie de coeficienţii ei funcţia simetrică:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \dfrac{x_1+1}{x_1} & \dfrac{x_2+1}{x_2} & \dfrac{x_3+1}{x_3} \\ \dfrac{1}{x_1+1} & \dfrac{1}{x_2+1} & \dfrac{1}{x_3+1} \\ \dfrac{1}{x_1-1} & \dfrac{1}{x_2-1} & \dfrac{1}{x_3-1} \end{vmatrix}$$

T. STOICESCU.

R. Funcţia simetrică dată poate fi scrisă sub formă de doi determinanţi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x_1+1} & \frac{1}{x_2+1} & \frac{1}{x_3+1} \\ \frac{1}{x_1-1} & \frac{1}{x_2-1} & \frac{1}{x_3-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ \frac{1}{x_1+1} & \frac{1}{x_2+1} & \frac{1}{x_3+1} \\ \frac{1}{x_1-1} & \frac{1}{x_2-1} & \frac{1}{x_3-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)(x_3^2-1)} - \frac{2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}{x_1x_2x_3(x_1^2-1)(x_2^2-1)(x_3^2-1)} =$$

$$= \frac{2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(1-x_1x_2x_2)}{x_1x_2x_3(x_1^2-1)(x_2^2-1)(x_3^2-1)}$$

ori: $x_1x_2x_3 = -c$; $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1) =$

$$= \pm\sqrt{-4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2}$$

$$(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1) = x_1x_2x_3 - \Sigma x_1x_2 + \Sigma' x_1 - 1 =$$

$$= -c - b - a - 1 \text{ şi } (x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) = -c + b - a + 1$$

aşa că

$$f(x_1x_2x_3) = \frac{\pm 2(1+c)\sqrt{-4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2}}{c[(1+b)^2 - (a+c)^2]}$$

9. In orice triunghiu există relaţia

$$\Sigma a[ap(\cos^2B + \cos^2C) + bq(\cos A\cos B - \cos C) + cr(\cos C\cos A - \cos B)] = 0$$

p, q, r fiind oarecare.

P. P. DRĂGHICESCU.

R. Membrul I se scrie succesiv

$$S = \Sigma ap(c\cos A\cos C - c\cos B + b\cos A\cos B - b\cos C + a\cos^2B + a\cos^2C) =$$

$$\Sigma ap[\cos A(b\cos B + c\cos C) - a + a\cos^2B + a\cos^2C].$$

Dar $b\cos B + c\cos C = a\cos(B-C)$

(Culegere de Probleme de Trigonometrie, partea II, Vol. 2, de V. CRISTESCU) deci:

$$S = \Sigma a^2p[\cos A\cos(B-C) - 1 + \cos^2B + \cos^2C] =$$

$$\Sigma a^2p[1 - \cos(B+C)\cos(B-C) - \sin^2B - \sin^2C] =$$

$$\Sigma a^2p\left[1 - \frac{1}{2}\cos^2B - \frac{1}{2}\cos 2C - \sin^2B - \sin^2C\right] \equiv 0.$$

PROBLEME PROPUSE

5860. Se iau la întâmplare două numere de câte trei cifre şi se scad unul din altul. Care este probabilitatea ca scăderea să se poată face direct, scăzând din cifrele descăzutului cifrele scăzătorului, fără a face împrumuturi la cifrele de ordin superior?

I. IONESCU.

5861. Să se găsească două numere de câte patru cifre al căror produs este un număr de opt cifre de forma *aaaa bbbb*.

G-L GH. BUICLIU.

5862. Să se arate că dacă a_i şi b_i reprezintă numere întregi şi pozitive, atunci:

$$E\left[\prod_1^n\left(\frac{a_i}{b_i}\right)\right]\leqq\prod_1^n E\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$

unde $E(i)$ înseamnă întregii lui i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5863. Fie $E(x)$ întregii lui x; a, b, c, n numere întregi şi pozitive. Să se arate, că avem

$$\Sigma E\left(\frac{n-i_1 a-j_1 b}{c}\right)=\Sigma E\left(\frac{n-i_2 b-j_2 c}{a}\right)=\Sigma E\left(\frac{n-i_3 c-j_3 a}{b}\right),$$

unde sumele sunt extinse asupra tuturor valorilor întregi şi pozitive ale numerelor i şi j, pentru care numărătorii fracţiilor respective sunt pozitivi.

ION B. FLORESCU.

5864. Paralelele duse prin vârfurile unui triunghiu la diametrele, conjugate direcţiilor laturilor opuse faţă de o conică oarecare, sunt concurente.

P. P. DRĂGHICESCU.

5865. In triunghiul ABC fie D un punct pe latura BC, E un punct pe AD. Se proiectează E în F pe AF, în G pe AC şi A se proiectează în H pe BC.

Să se arate, că avem relațiile:

1. $$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BD}\cdot\overline{AE}}{\overline{EF}}$$

2. $$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{EF}}{\overline{EG}}$$

Dacă I este punctul unde AD taie cercul circumscris, avem:

3. $$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{BI}}{\overline{CI}}$$

4. Cazuri particulare (AD bisectoare sau mediană în triunghiul ABC).

N. N. MIHĂILEANU.

5866. In planul unui triunghiu să se determine zonele punctelor care îndeplinesc condiția, că depărtările lor la cele trei laturi ale triunghiului dat, să fie înălțimile unui alt triunghiu.

G-L GH. I. POPESCU.

5867. Se consideră un triunghiu ABC și fie H ortocentrul său. Să se arate, că triunghiurile ABC, BHC, CHA, AHB și triunghiul anticomplimentar triunghiului ortic au aceleași drepte ale lui SIMSON.

2°. Se consideră un cerc (O_1) egal cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că există un triunghiu și numai unul, înscris în cercul (O_1) și având aceleași drepte ale lui SIMSON ca triunghiul ABC.

ȘERBAN GHEORGHIU.

5868. Să se demonstreze, că raza cercului tritangent interior cercurilor exînscrise unui triunghiu, este dată de formula

$$\rho = \frac{1}{4r}(p^2 + r^2).$$

ION C. VASILIU.

5869. Fie p perimetrul și b suma bisectoarelor interioare ale unui triunghiu. Să se arate, că avem:

$$\frac{1}{2}p \leqq b \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}p.$$

TIB. POPOVICIU.

5870. Să se arate, că în orice triunghiu avem relaţia

$$\Sigma\, r_a^2 (r_b + r_c) = S \cdot \Sigma\, a \operatorname{cotg}^2 \frac{A}{2}.$$

ION S. ANTONIU.

5871. Să se stabilească, că într'un triunghiu oarecare ABC în care notaţiile sunt cele obişnuite, avem relaţiile

$$\Sigma\, a^3 \cos (B - C) = 3abc$$

$$\Sigma\, a^3 \sin (B - C) = 0.$$

V. ALACI.

5872. Să se găsească natura seriei cu termenul general

$$1 - \frac{lg\, 2n}{lg\,(2n+1)}.$$

N. GAIU.

5873. Să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$e^{mx} = \sin x$$

numărul m fiind real. In cazul $m = 1$, să se calculeze rădăcina din intervalul $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$ cu două zecimale exacte.

TH. ANGHELUŢĂ.

5874. Traiectoriile $f(x, y) = C$ sunt descrise sub acţiunea unei forţe paralele la dreapta $x = y$. Să se arate că forţa este dată de

$$F = C \cdot (f'_x + f'_y)^{-3} \cdot [f'^2_y f''_{xx} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{yy}],$$

C fiind o constantă.

M. GHERMĂNESCU.

ERATĂ. 1°. La pag. 421, Vol. XLVII, în rândul 1 de sus se scrie BB_1 în loc de BB, iar în rândul al doilea AA_1C în loc de AA_1C_1.

2°. La pag. 112 la numele propunătorului problemei 5859 se înlocueşte GR. prin GH.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (E, N, P); *Andarache P. I.* (5753); *Andreescu M.* (5753); *Andrei Gh. A.* (5753); *Barbu A. I.* (4022, 5825, 42); *Bârzescu M.* (5632, 750, 53, 827); *Caramalău E.* (5801, 17, 40); *Cârstea D. M.* (5825); *Cioc D.* (5841, 42, 48); *Ciureanu Gh. M.* (5632, 750); *Constantinescu N. I.* (4550, 5825); *Cubat H. A.* (5638, 95, 732, 54, 98, 812, 25, 32, E); *Drăghicescu P. P.* (5492, 830); *Ganea N.* (5791); *Gheorghe A. Gr.* (4022); *Grigore A. Gh.* (5825); *Huideş V. Al.* (5801); *Iacob St. E.* (5825); *Ifrim Alfons* (5801); *Ionescu V. N.* (5698, 831, 40, 42); *Munteanu Gh. L.* (5840, 42); *Nache D. D.* (5753, 801, 27); *Pălăceanu D. V.* (5576, 612, 37, 57, 93, 827, 31, 40, N); *Pantelimon C.* (5575, 675, 707, 91, 94, 805, 17, 31, 32, 54); *Peticeanu D. V.* (5830); *Popa D. M.* (5492); *Popescu I. Ad.* (5798, E); *Popescu I. Barbu* (5825); *Stoenescu D. Mirel* (5676, 786); *Thébault V.* (N); *Tofan A.* (5801); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (5585, 98, 600, 46, 57, 733, 43, 44, 65, 832); *Vasiliu Gh. D.* (4920, 5522, 643, 750, 53, 60, 91, 98); *Voinea P. R.* (4920, 5832, 35, 37, N); *Vrânceanu Gh. Gh.* (5801, 02, 28, 31); *Wegener E. N.* (4199, 245, 5612, 62, 95, 756, 825, 31).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. ***Foile vor avea format de sfert de coală,*** iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 20.623

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1943

NUMĂR FESTIV, OMAGIU ARTILERIEI ROMÂNE

CU PRILEJUL SĂRBĂTORIREI CENTENARULUI

SUMARUL

1. Centenarul Artileriei Române . . . *G-l Gh. Buicliu.*
2. Cuvântarea D-lui General de Corp de Armată V. Atanasiu în şedinţa dela 29 Noembrie 1943.
3. Schiţarea unei balistice aeriene . . . *Comandor I. Linteş.*
4. O problemă de mecanică artileristică *Cpt. I. Gh. Zamfirescu.*
5. Asupra teoremei lui Robert-Duchêsne *Slt. Const. Pantelimon.*
6. Un şir de desfăşurate succesive . . *Adrian Gheorghiu.*
7. Note matematice: 12 — 16.
8. Chestiuni de examen.
9. Bibliografie.
10. Cereri: 325.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 1911, 3950, 4412, 5247, 5302, 5626, 5630, 5776, 5790, 5796, 5802.
13. Exerciţii: 11—13.
14. Probleme propuse: 5875 — 5889.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1943

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

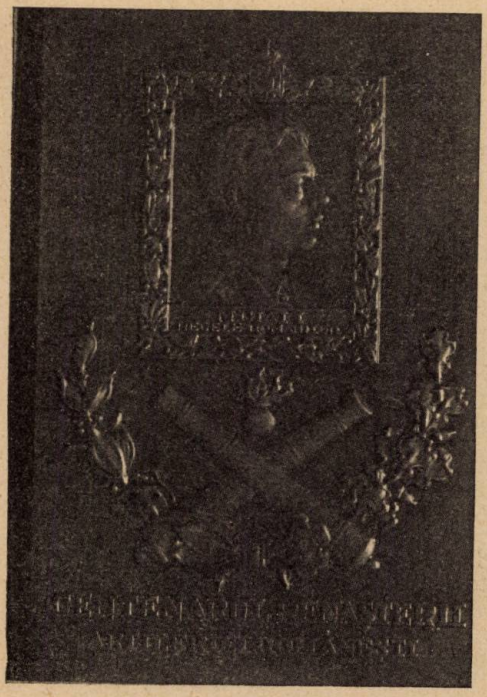
La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Calcul diferenţial şi analitic* . . . . . „ 250

CENTENARUL ARTILERIEI ROMÂNE

In ziua de 10 Noembrie 1943 s'au împlinit 100 de ani dela înfiinţarea artileriei române. Tunuri au avut Românii şi înainte de 10 Noembrie 1843; astfel se ştie că tunuri au fost folosite de Români încă de pe vremea lui VLAD VOEVOD la 1445, mai apoi ION VODĂ CEL CUMPLIT a avut în luptele cu Turcii dela Roşcani (Cahul) obuziere şi tunuri moldoveneşti. Cu cât ne apropiem de prezent, materialul de artilerie s'a îmbunătăţit şi s'a înmulţit în cele două principate Române, dar o artilerie propriu zisă, organizată ca armă aparte, nu a luat fiinţă decât în ziua de 10 Noembrie 1843, când Domnitorul GHEORGHE BIBESCU a organizat în Muntenia prima baterie românească. Câţiva ani mai târziu şi anume în 1849, Domnitorul GRIGORE GHICA organizează şi în Moldova o baterie, ca unitate aparte.



Medalia jubilară a centenarului Artileriei

Sub Domnitorul ALEXANDRU ION I CUZA se înfiinţează în anul 1860 primul regiment de artilerie în *Principatele Unite*, după care organizarea şi dotarea artileriei noastre urmează paşii timpului, ajungând să fie astăzi egală celor mai bune artilerii europene, păstrând bine înţeles, în ceea ce priveşte numărul, proporţiile populaţiei şi întinderii României.

Un comitet, având ca preşedinte de onoare pe D-l General de Corp de Armată, C. PANTAZI, Ministrul de Război, şi ca preşedinte activ pe D-l General de Corp de Armată V. ATANASIU, Inspectorul General al Artileriei, a organizat pentru sărbătorirea împlinirii a o sută de ani dela înfiinţarea artileriei, un program

cuprinzând publicarea unui număr festiv din *Revista Artileriei*, baterea unei medalii comemorative, conferinţe la radio, şedinţe festive la Academia Română, la Academia de Ştiinţe şi la Societatea Scriitorilor Militari, aranjarea de vitrine speciale în Bucureşti, precum şi rularea unui film documentar.

Gazeta Matematică se asociază la această comemorare şi închină Artileriei Române numărul de faţă.

Sunt motive de ordin ştiinţific şi motive de ordin sentimental care ne-au dat îndemn spontan la această asociere.

Artileria noastră are, prin ofiţerii ei, un strâns contact cu matematicile în general şi cu *Gazeta Matematică* în particular, pe de o parte prin ce au primit ofiţerii de artilerie dela *Gazeta Matematică*, iar pe de altă parte prin ceea ce ei au dat *Gazetei Matematice*.

Mai întâi, artileria prin natura ei este o armă tehnică, atât prin materialul de care se serveşte cât şi prin metodele de tragere pe care le întrebuinţează. Aceasta este o poartă larg deschisă matematicei ca instrument de cercetare a problemelor artileristice. Ofiţerii noştri de artilerie, au primit încă dela începuturile artileriei româneşti, o temeinică cultură matematică. Inafară de acei care, între anii 1890 şi 1902 şi-au făcut cursurile la Şcoala Politehnică dela Fontainebleau în Franţa, în chiar fosta noastră Şcoală Militară de Artilerie, Geniu şi Marină care până în 1919 a sălăşluit în localul din Calea Griviţei Nr. 28 din Bucureşti, ofiţerii de artilerie aveau aproape acelaşi program de matematici ca şi universitarii. La această şcoală de artilerie au profesat pe vremuri profesorul C. GOGU, şi mai apoi V. CRISTESCU, membru fondator la *Gazeta Matematică*.

Graţie culturii lor matematice, ofiţerii de artilerie sunt, dela apariţia *Gazetei Matematice* printre cei mai harnici corespondenţi. Încă din anul II al revistei noastre, întâlnim la cele mai grele chestiuni, numele ofiţerilor de artilerie, între care I. SICHITIU, C. ŢIŢIRIGĂ, GH. GH. URECHE şi alţii.

Astăzi, din cei 258 membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, 25 sunt ofiţeri de artilerie, activi sau proveniţi din activi, dintre care 8 generali, 5 colonei, 1 lt.-colonel, 5 maiori şi 6 căpitani, a căror rodnică activitate matematică se poate urmări în volumele *Gazeta Matematică*.

Inafara contribuţiei şi realizărilor originale în tehnica de specialitate şi înafara cursurilor de matematici pe care le-au profesat, le-au litografiat sau le-au tipărit pentru învăţământul matematic în şcolile militare, ofiţerii de artilerie şi-au dat obolul şi în învăţământul matematic, evident într'o măsură redusă, cariera lor neîngăduindu-le activităţi extra-militare. Generalul G. MANU, fost de mai multe ori ministru de războiu şi Preşedinte al Consiliului de Miniştri, a tipărit la Paris, în anul 1863, pe când era maior, o carte „*Aritmetica şi Algebra culleasă şi prelucrată pentru şcólele din România*", despre care am scris în Vol. XXXI în articolele dela pag. 121 şi 161.

Medalia jubilară a centenarului Artileriei

D-l General ŞT. BURILEANU a fost dela 1923 la 1940, profesor titular la catedra de Mecanică dela Cluj. D-sa a tipărit în 1910 o carte despre *Teoria generală a calculului probabilităţilor,* care a fost tradusă şi tipărită şi în Franţa în Encyclopédie Scientifique a D-rului TOULOUSE. Anul trecut, D-sa şi-a tipărit cursul de Mecanică, pe care l-a profesat la Universitatea din Cluj.

Colegul nostru, D-l G-L GH. I. LITEANU a revăzut şi adăugit *Culegere de Probleme de Trigonometrie*, Partea III *Trigonometria sferică* pe care a tipărit-o în 1942/3.

Insuşi semnatarul acestor rânduri, a avut cinstea să predea cursul de *Geometria Analitică* la Şcoala Politehnică din Timişoara, în intervalul Noembrie 1920 — Iulie 1929, în lipsa unui profesor titular.

Din 1937, dela înfiinţarea secţiei de armament la Politehnica din Bucureşti, profesează la acea secţie ca şi la secţia de aviaţie numeroşi ofiţeri de artilerie ca profesori titulari, conferenţiari sau însărcinaţi cu conferinţe. Citãm pe G-L GH. BUICLIU, G-L D. PETROVANU, COL. I. LINTEŞ, D. BARDAN, I. POP.

In corpul acestei reviste, unii ofiţeri de artilerie au publicat interesante probleme artileristice. Astfel: G-L GH. BUICLIU — *„Noţiuni de balistică“* (XXV — 25, 217, 246, 265); C-DOR I. LINTEŞ — *„Bătaia maximă pentru terenuri înclinate“* (XXIII — 24), *„Calculul corecţiunilor datorite ploaiei în tragerile artileriei“* (XXVI — 221), *„Asupra cronografului* JOLY“ (XXIX — 43), *„Ecuaţiile traiectoriei unui proiectil în aer“* (XXIX — 406); G-L GH. POPESCU — *„Consideraţiuni asupra tunului lung german“* (XXIII — 217); C-DOR GH. ZAPAN — *„Asupra câtorva elemente de tragere“* (XXII — 102), *„Metodă pentru descoperirea tunurilor inamice“* (XXIII — 20), *„Asupra mişcării proiectilelor în aer“* (XXIII — 148).

In fine, chiar şi unii membri civili ai *Gazetei Matematice* s'au ocupat în rândurile acestei reviste cu probleme artileristice, subliniind astfel legătura între *Gazeta Matematică* şi Artileria Română.

Aceste articole sunt: M. GHERMĂNESCU — *„Asupra ipotezei rigidităţii traiectoriei“* (XXIII — 23) şi *„Două probleme militare“* (XXVI — 285, 308); I. IONESCU — *„Determinarea punctului în care s'a produs detunătura“* (XXIII — 33, 49); V. VÂLCOVICI — *„O ştiinţă în serviciul războiului“* (XXIII — 29).

In August 1916, imediat după începerea războiului precedent, *Gazeta Matematică* a înfiinţat premiul *„General Scarlat Panaitescu“*, din iniţiativa şi cu donaţia decedatului General de geniu *Sc. Panaitescu*, premiu ce se acordă pentru *„lucrările de matematică aplicată la ştiinţele militare“*. Acest premiu a fost acordat, în anii 1918/19, 1919/20 şi 1932/33 *Revistei Artileriei.*

Iată atâtea motive puternice care stabilesc legături strânse între *Gazeta Matematică* şi Artileria Română.

Pentru aceste puternice motive, pe lângă acela al sentimentului de solidaritate naţională în clipele grele prin care trece ţara, închinăm în omagiu Artileriei Române, numărul de faţă din *Gazeta Matematică*, în care publicăm trei articole având ca subiect probleme artileristice, şi urăm ca artileria în colaborare cu întreaga armată să traseze, integral şi definitiv, epura naţiei Române.

G-L GH. BUICLIU.

CUVÂNTAREA D-LUI GENERAL DE CORP DE ARMATĂ V. ATANASIU IN ŞEDINŢA DE LA 29 NOEMBRIE 1943

Domnilor Membri!

La 10 Noembrie 1943 artileria noastră, a sărbătorit un veac dela renaşterea ei.

Sunt fericit că astăzi, pot să aduc, în calitate de Inspector General de Artilerie, omagiul tuturor artileriştilor pentru *Gazeta Matematică.*

Legăturile între Gazetă şi artilerie sunt foarte vechi.

Domnul PROF. ION IONESCU spunea într'un articol publicat în Gazetă, în timpul războiului de întregire a neamului, că „mai înainte de toate, milităria are o parte tehnică, o poartă prin care a putut pătrunde, încetul cu încetul şi din ce în ce mai mult matematica, ca instrument de cercetare în problemele militare. Acea parte tehnică se desvoltă necontenit şi tinde a deveni unul din factorii cei mai importanţi ai succeselor în războaiele moderne".

Cum artileria este o armă prin excelenţă tehnică, artileriştii au contribuit la progresul Gazetei, care le-a deschis larg uşa, i-a primit şi îmbrăţişat cu căldură, dela început.

Este o mare plăcere pentru mine să amintesc că primul militar, tot odată şi un artilerist emerit, ales membru al *Gazetei* este chiar Domnul GENERAL GH. BUICLIU în 1910.

A urmat apoi o serie întreagă de ofiţeri, pentru ca în 1917, *Gazeta Matematică* să numere ca membri aleşi 1 general, 3 maiori, 14 căpitani şi 11 locotenenţi, iar astăzi, neţinând seamă de cei dispăruţi, *Gazeta* are din 258 membri aleşi, 30 ofiţeri, cea mai mare parte de artilerie.

Gazeta publică dela început numeroase articole de tehnică militară; astăzi toţi exponenţii Tehnicei noastre militare sunt foşti corespondenţi ai *Gazetei Matematice,* care în 1935 alcătuiau un lot de 225 ofiţeri, din care 34 generali şi 77 colonei.

Mai mult chiar, în 1916, decedatul GENERAL SCARLAT PANAITESCU a înfiinţat un premiu special *„pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare"*, care a fost acordat până

astăzi de 22 ori din care: de 13 ori pentru articole de cărţi referitoare la probleme de artilerie şi anume:

— Lt.-Colonel Gh. I. Popescu: *„Apărarea Antiaeriană"*.

— Lt.-Colonel Gh. Potopeanu: *„Reperajul prin sunet"*.

— Lt.-Colonel Al. Gheorghieş: *„Curs de tragerile artileriei"*.

— Lt.-Colonel I. P. Georgescu: *„Studiul gurilor de foc"*.

— Maior Virgil Mihăilescu: *„Calculul corecţiunilor balistice şi atmosferice"*.

— Căpitan I. Bungescu: *„Măsurarea altitudinei în tragerile antiaeriene, graficele de tragere; abacele şi aparatele centrale pentru tragerile antiaeriene; aparatul central de tragere — realizare proprie"*.

— Căpitan Valeriu Nestorescu: *„Propuneri la alcătuirea tabelelor de tragere; Monografia artileristică"*.

— Căpitan N. I. Dragodănescu: *„Materialul pentru tragerile artileriei antiaeriene"*.

— Căpitan Mihail Bănulescu şi Căpitan Ed. Dragomirescu-Buzne: pentru lucrarea în 2 volume *„Construcţii de guri de foc"*.

Şi de 3 ori *Revista Artileriei.*

Deci artileria a fost onorată în proporţie de aproape 75%.

Domnilor Membri!

Iată legăturile puternice care leagă *Gazeta Matematică* de artilerie.

Pentru aceasta, am socotit că este o datorie de onoare din partea noastră, să venim în mijlocul Domniilor-Voastre pentru a cinsti *Gazeta Matematică*, de unde tehnicienii noştri au luat flacăra realizărilor în domeniul artileristic.

Pot afirma cu deplină convingere că factorul matematic al artileriştilor a fost cu prisosinţă desvoltat de *Gazeta Matematică.*

Inchinându-ne în faţa tuturor membrilor cari şi-au dat până astăzi viaţa pentru statornicirea Patriei în hotarele ei fireşti TISA, DUNĂRE şi NISTRU, aduc un omagiu *Gazetei Matematice*, oferind în dar Societăţii *Gazeta Matematică*:

— Timbrele comemorative ale centenarului;

— Medalia comemorativă [1]);

— *Revista Artileriei* în număr festiv precum şi revistele *Armata* (Anul II Nr. 32—33 din 15 Noembrie 1943) şi *Gazeta Militară* (Anul V Nr. 90 din 15 Noembrie 1943) închinată centenarului Artileriei Româneşti.

SCHIŢAREA UNEI BALISTICE AERIENE [2])

Introduceri şi definiţiuni

Balistica Aeriană şi în special „Balistica bombardamentului aerian" este o variantă a *„Balisticei Exterioare"*. Totuşi în ultimul timp bombardamentele aeriene luând forme neînchipuite, înseamnă că şi această variantă a *„Balisticei Exterioare"* trebue să aibă anumite caracteristice, care trebuesc scoase în evidenţă.

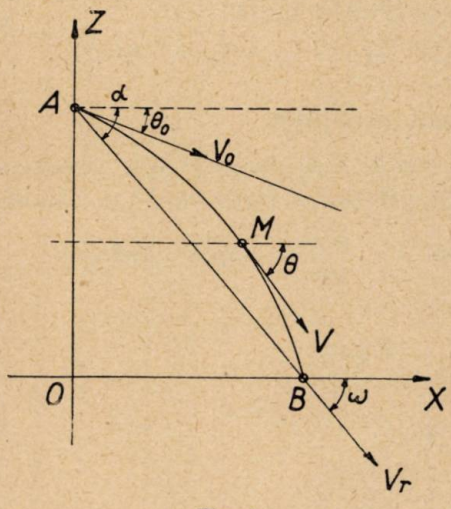


Fig. 1.

Studii teoretice asupra acestei noui balistice s'au publicat cu multă sgârcenie. Din aceste motive, vom încerca să schiţăm elementele unei *„Balistice Aeriene"*, a căror originalitate nu o putem afirma dela început, deoarece ignorăm aproape tot ce s'a făcut în acest domeniu, din lipsa totală de publicitate.

Dacă utilizăm notaţiunile din figura 1, atunci vom avea: θ_0 unghiul de tragere; α unghiul de vizare; Z altitudinea de aruncare $(\overline{OA})$; etc. V_0 vitesa iniţială; V vitesa tangenţială; θ înclinarea tangentei; x, z (de sus în jos) coordonatele unui punct; t durata de traiect la un moment dat; X bătaia $(\overline{OB})$; V_r vitesa rămasă în punctul de cădere; T durata de traiect.

1) Cele două feţe ale medaliei sunt fotografiate la pag. 201 şi 203 ale acestui număr.

2) Articolul a fost primit la redacţie la 28 August 1941.

Proprietăţile traiectoriilor

Dacă vom compara două traiectorii *1* şi *2* descrise de două bombe identice însă aruncate cu vitese diferite $V_{0_1} < V_{0_2}$, atunci avem:

— In cazul unei abscise egale:

$x_1 = x_2 \;;\; \theta_1 > \theta_2 \;;\; z_1 > z_2 \;;\; V_1 < V_2 \;;\; t_1 > t_2.$

— In cazul unei căderi egale (înălţime de cădere):

$x_1 < x_2 \;;\; \theta_1 > \theta_2 \;;\; z_1 = z_2 \;;\; V_1 < V_2 \;:\; t_1 \lesseqgtr t_2.$

— In cazul unei înclinări egale de tangentă:

$x_1 < x_2 \;;\; \theta_1 = \theta_2 \;;\; z_1 < z_2 \;;\; V_1 \lesseqgtr V_2 \;;\; t_1 > t_2.$

— In cazul unei durate de cădere egale:

$x_1 < x_2 \;;\; \theta_1 > \theta_2 \;;\; z_1 > z_2 \;;\; V_1 < V_2 \;;\; t_1 = t_2.$

— In cazul unei viteze tangenţiale egale:

$x_1 < x_2 \;;\; \theta_1 > \theta_1 \;;\; z_1 < z_2 \;;\; V_1 = V_2 \;;\; t_1 < t_2.$

Stabilirea ecuaţiilor

Stabilirea ecuaţiilor mişcării se face plecând dela cunoscutele ecuaţii diferenţiale date de „*Balistica Exterioară*“ şi anume:

$$1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma . V . \cos\theta \;\;;\;\; \frac{d^2z}{dt^2} = -\gamma . V . \sin\theta + g$$

unde:

$$2) \qquad \gamma = c . \frac{F\,(w)}{w}$$

având: c coeficientul balistic şi:

$$w = \frac{V . \cos\theta}{\cos\theta_0} .$$

Pe calea aerodinamică însă, avem:

$$2') \qquad \gamma = \frac{\rho . C . S . V}{2 . m}$$

ρ fiind masa specifică a aerului; C — coeficientul de rezistenţă aerodinamică; S — secţiunea dreaptă a bombei; m — masa bombei.

Dacă luăm:

$$\gamma_0 = \frac{\rho_0 . C_0 . V_0}{2m}$$

atunci:

3) $$\gamma = \gamma_0 . \frac{\rho}{\rho_0} . \frac{C}{C_0} . \frac{V}{V_0}$$

Admițând însă că (justificarea acestor ipoteze fiind foarte lungă, ea va fi publicată în altă parte):

$$\frac{\rho}{\rho_0} \cong \left(\frac{V . \cos\theta}{V_0 . \cos\theta_0} \right)^a$$

$$\frac{C}{C_0} . \frac{V}{V_0} = \frac{V . f(V)}{V_0 . f(V_0)} \cong \left(\frac{V . \cos\theta}{V_0 . \cos\theta_0} \right)^b$$

atunci putem scrie:

4) $$\gamma = \gamma_0 . \left(\frac{V . \cos\theta}{V_0 . \cos\theta_0} \right)^\varepsilon$$

unde $\varepsilon = a + b > 0$.

Cum avem:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d(V . \cos\theta)}{dt}$$

atunci înlocuind în 1) avem:

5) $$\frac{d(V . \cos\theta)}{(V . \cos\theta)^{\varepsilon+1}} = \frac{\gamma_0 . dt}{(V_0 . \cos\theta_0)^\varepsilon} .$$

Presupunând ε constant, și integrând, obținem:

6) $$\frac{V . \cos\theta}{V_0 . \cos\theta_0} = \frac{1}{(1 + \varepsilon . \gamma_0 t)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad ; \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \varepsilon . \gamma_0 t} .$$

Integrând a doua oară, obținem:

7) $$\frac{\gamma_0 . (\varepsilon - 1) . x}{V_0 . \cos\theta_0} = 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon\gamma_0 . t)^{\frac{1}{\varepsilon} - 1}} .$$

Şi presupunând apoi că:

8) $x = V_0 . \cos\theta_0 . \varphi(t)$; $z = V_0 . \sin\theta_0 . \varphi(t) + g . \psi(t)$.

Ştiind, conform ecuaţiilor 1), că trebue să avem:

9) $\varphi'' + \gamma . \varphi' = 0$; $\psi'' = \gamma . \psi' = 1$.

Atunci un calcul ceva mai lung, pe care nu-l mai dăm, ne conduce la valorile:

10) $$\varphi = \frac{1 - \dfrac{1}{(1 + \varepsilon . \gamma_0 . t)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}}}{(\varepsilon - 1) . \gamma_0}$$

şi

11) $$\psi = \frac{(1 + \frac{1}{2} . \varepsilon . \gamma_0 . t) . t}{(\varepsilon + 1) . \gamma_0} .$$

Observaţie. Cum pentru $\gamma_0 = 0$ (cazul lipsei rezistenţei aerului) trebue să avem:

$$\psi = \tfrac{1}{2} . t^2 \quad ; \quad \psi' = t \quad \text{şi} \quad \psi'' = 1.$$

Aceasta se constată uşor în ipoteza că ε este destul de mare, dacă luăm limita.

Dacă scoatem pe t din prima ecuaţie a sistemului 8), avem:

12) $$t = \frac{1}{\varepsilon . \gamma_0} \left[\frac{1}{\left[\dfrac{(\varepsilon - 1) . \gamma_0 . x}{V_0 . \cos\theta_0} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}}} - 1 \right] .$$

Introducând această valoare în 10) şi 11), apoi ţinând seamă că pentru $x < 1$ avem:

$$(1 - x)^n \gtrless 1 - \frac{1}{n} . x$$

şi

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

ajungem la relațiile:

$$13)\quad z = x \cdot \operatorname{tg}\theta_0 \cdot \left[1 + \frac{g}{(\varepsilon+1)\cdot\gamma_0 \cdot V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] + \frac{g \cdot x^2}{2\,V_0^2 \cdot \cos^2\theta_0} \cdot \frac{4\varepsilon}{\varepsilon+1} \cdot \left[1 + \frac{2\,\varepsilon\,\gamma_0 x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] \cdot$$

$$14)\quad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 \cdot \left[1 + \frac{g}{(\varepsilon+1)\cdot\gamma_0 \cdot V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] + \frac{g \cdot x}{V_0^2 \cos^2\theta_0} \cdot \left[1 + \frac{(\varepsilon+1)\cdot\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cos\theta_0}\right]$$

$$15)\quad t = \frac{gx}{V_0 \cdot \cos\theta_0} \cdot \left[1 + \frac{\varepsilon \cdot \gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] \cdot$$

Dat fiind că $(\varepsilon+1)\gamma_0 \cdot V_0 \cdot \cos\theta_0$ are o valoare mare, iar ε urmează a fi determinat pe calea experimentală, atunci putem admite următoarele formule practice:

$$16)\quad z = x \cdot \operatorname{tg}\theta_0 + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2\theta_0} \cdot \left[1 + A \cdot \frac{\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] \cdot$$

$$17)\quad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 + \frac{g \cdot x}{V_0^2 \cdot \cos^2\theta_0} \cdot \left[1 + B \cdot \frac{\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] \cdot$$

$$18)\quad t = \frac{x}{V_0 \cdot \cos\theta_0} \cdot \left[1 + C \cdot \frac{\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right]$$

$$19)\quad V = V_0 \cdot \left[1 + D \cdot \frac{\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] \cdot$$

Valorile A, B, C, D trebuind a fi determinate pe cale experimentală.

Calculul elementelor finale

Cu aceste date, putem stabili următoarele elemente finale ale traiectoriei:

— *Pentru bombardamentul orizontal.*

Vom înlocui $x \approx V_0 \cdot \sqrt{\frac{2z}{\varphi}}$ şi obţinem:

$$20) \quad \begin{cases} X = V_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2z}{\varphi \cdot \left(1 + A_0 \cdot \gamma_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2z}{\varphi}}\right)}} \\ \operatorname{tg}\omega = \dfrac{\sqrt{2\varphi z}}{V_0} \cdot \left[1 + B_0 \cdot \gamma_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2z}{\varphi}}\right] \\ T = \sqrt{\dfrac{2z}{\varphi}} \cdot \left[1 + C_0 \cdot \gamma_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2z}{\varphi}}\right] \\ V_r = V_0 \cdot \left[1 + D_0 \cdot \gamma_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2z}{\varphi}}\right] \end{cases}$$

— *Pentru bombardamentul în picaj.*

Vom înlocui $x \approx \frac{z}{\operatorname{tg}\theta_0}$ şi obţinem:

$$21) \quad \begin{cases} X = \dfrac{Z}{\left[1 + \dfrac{gz}{2V_0^2 \cdot \sin\theta_0} \cdot \left(1 + A_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot z}{V_0 \cdot \sin\theta_0}\right)\right] \cdot \operatorname{tg}\theta_0} \\ \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\theta_0 + \dfrac{2g \cdot z}{V_0^2 \cdot \sin^2\theta_0} \cdot \left(1 + B_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot z}{V_0 \cdot \sin\theta^0}\right) \\ T = \dfrac{z}{V_0 \cdot \sin\theta_0} \cdot \left(1 + C_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot z}{V_0 \cdot \sin\theta_0}\right) \\ V_r = V_0 \cdot \left(1 + D_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot z}{V_0 \cdot \sin\theta_0}\right) \cdot \end{cases}$$

Fascicol de traiectorii

Dacă presupunem mai multe traiectorii plecate din acelaşi punct, şi descrise de bombe identice, însă cu *vitese iniţiale* sau cu *unghiuri de aruncare* variabile, atunci obţinem câte un fascicol de traiectorii. Pe astfel de fascicol se studiază în general proprietăţile traiectoriilor şi cu ajutorul acestor fascicole, care se mai numesc *„reţele"*, calculate în prealabil, se întocmesc tabelele de tragere.

Asemenea fascicole pot fi:

1. *Pentru* $V_0 = const.$ *şi* $\theta_0 = variabil$ şi ne poate da: Curbe de egală înclinare a tangentei; Curbe de egală durată de traiect; Curbe de egală vitesă tangenţială.

2. *Pentru* $V_0 = variabil$ *şi* $\theta_0 = const.$ şi ne poate da o serie de curbe similare celor de mai sus.

Corecţiuni balistice şi atmosferice

Dacă diferenţiem relaţiunile: 16), 17), 18), 19), 20) şi 21) în raport de θ_0, V_0 şi de γ_0 obţinem formule care ne dau aşa zisele corecţiuni balistice şi atmosferice.

Ele sunt foarte utile, fie în practica bombardamentului fie în calculul tabelelor de tragere, atunci când unele elemente variază puţin sau când avem vânt ori ploaie.

Dar pentru înlesnirea calculelor, fără a face mari aproximări, se admit unele ipoteze de simplificare.

In general aceste formule au formele:

$$22) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{X} = A_v \cdot \dfrac{dV_0}{V_0} + Az \cdot \dfrac{dz}{z} - A\gamma \dfrac{d\gamma_0}{\gamma_0} \\ \dfrac{dT}{T} = B_v \cdot \dfrac{dV_0}{V_0} + Bz \cdot \dfrac{dz}{z} + B\gamma \dfrac{d\gamma_0}{\gamma_0} \end{cases}$$

unde A şi B sunt coeficienţi determinaţi cu ajutorul *reţelelor* despre care am pomenit mai sus.

In cazul vântului sau ploaiei, vom avea o variaţie a vitesei V_0, iar în cazul variaţiilor atmosferice (presiune şi temperatură) sau variaţiilor formei şi greutăţei bombei, vom avea o variaţie a lui γ_0.

Elementele necesare unui bombardament

Cunoscând V_0, θ_0 şi Z un bombardament aerian are nevoie de un *unghiu de vizare*, notat — precum am arătat la început — cu α.

In cazul bombardamentului orizontal mai este însă nevoie, pentru verificarea bombardamentului, şi de un unghiu de vizare

înapoi, denumit *unghiu de întârziere* (fig. 2), care se defineşte astfel:

$$23) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{\overline{AA'} - \overline{OB}}{Z} = \frac{V_0 \cdot T - X}{Z} .$$

Unghiul de vizare se calculează din relaţia:

$$24) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Z}{X} .$$

Unghiul de visare în cazul bombardamentului orizontal poate fi calculat din relaţia:

$$25) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{V_0} \sqrt{\frac{g \cdot Z \cdot \left(1 + A_0 \cdot \gamma_0 \cdot \sqrt{\frac{2z}{g}} \right)}{2}} .$$

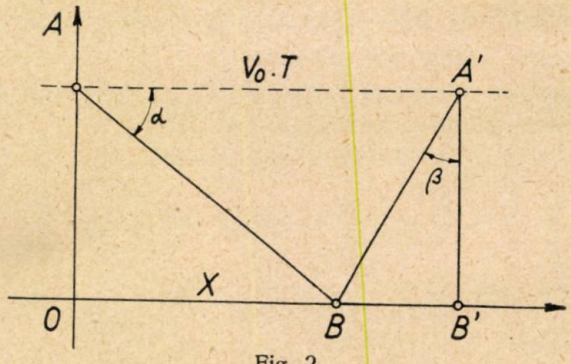


Fig. 2.

Iar în cazul bombardamentului în picaj unghiul de vizare devine $(\alpha - \theta_0)$, cu oarecare aproximaţie:

$$26) \qquad \operatorname{tg} (\alpha - \theta_0) = \frac{1}{\left(\frac{2 V_0^2}{g \cdot Z} + 1 \right) \cdot \operatorname{tg} \theta_0} .$$

De asemenea, unghiul de întârziere mai poate fi calculat din relaţia:

$$27) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{V_0 \cdot \theta_0}{g} \cdot \left[2 C_0 + A_0 - A_0^2 \cdot \sqrt{\frac{z}{2g}} \right] = \frac{V_0 \cdot \theta_0}{g} \left(a - b \cdot \sqrt{z} \right),$$

unde a şi b trebuesc determinaţi experimental sau cu ajutorul reţelelor.

Bombardamentul unei ţinte mai sus decât nivelul mării

Cu cât ne urcăm mai sus, cu atât masa specifică a aerului scade şi deci traiectoria va fi modificată.

In consecinţă, dacă între avionul de bombardament şi ţinta de bombardament este diferenţa de altitudine Z, iar ţinta este situată la altitudinea H deasupra nivelului mării, atunci traiectoria va fi socotită ca începând dela altitudinea $Z' = Z + H$ şi astfel vor fi stabilite toate elementele necesare.

Abateri probabile

In *„Revista Aeronautică"* din anul 1935 apoi în *„Revista Artileriei"* din anul 1937, am stabilit pe „cale teoretică" următoarele abateri probabile:

— *Pentru bombardamentul orizontal:*

$$28) \quad \begin{cases} A_{\text{bătaie}} = \dfrac{Z}{400} + \dfrac{V_0 . \sqrt{z}}{50} + \dfrac{V_0}{20} + 4 . \dfrac{a^2 . l}{p} \\ A_{\text{direcţie}} = \dfrac{Z}{400} + \dfrac{(V_0 + 100)\sqrt{z}}{150} + 2 . \dfrac{a^2 . l}{p} \end{cases}$$

a, fiind calibrul, *l* lungimea şi *p* greutatea.

— *Pentru bombardamentul în picaj:*

$$29) \quad \begin{aligned} A_{\text{bătaie}} &= \frac{Z}{100}\left(1 + \frac{V_0 \cos\theta_0}{20}\right) \\ A_{\text{direcţie}} &= \frac{Z}{100}\left(1 + \frac{V_0 \cos\theta_0}{60}\right) \end{aligned} .$$

Abaterile probabile sunt necesare la calculul *probabilităţii* de a avea în mod sigur o lovitură în semn.

Valorile abaterilor probabile urmează însă a fi verificate şi corectate prin experienţe.

COMANDOR I. LINTEŞ.

O PROBLEMĂ DE MECANICĂ ARTILERISTICĂ

In cele ce urmează dau unele consideraţiuni asupra stabilităţei afetului de tun rigid în timpul tragerii.

Fie figura pe care am notat:

G_r = Centrul de greutate al acesteia.

G = Centrul de greutate al afetului.

A = Punctul de sprijin al roţilor.

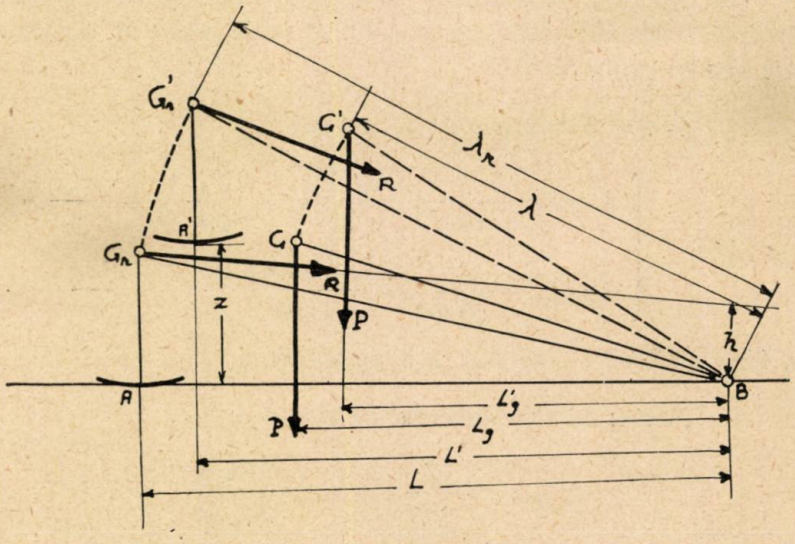
B = Punctul de sprijin al roţilor.

α = Unghiul de proiecţie.

La tragere, forţele active sunt cele arătate în figură şi anume:

R = forţa gazelor în planul de simetrie al afetului.

P = greutatea totală a afetului.



La tragere, afetul tinde să se răstoarne în jurul lui B sub acţiunea cuplului de răsturnare:

$$C_r = R \cdot h.$$

La această acţiune se opune cuplul stabilizator reprezentat prin:

$$C_s = P \cdot Lg.$$

Condiţia de echilibru este deci:

$$C_s \geqslant C_r.$$

Dacă relaţia precedentă nu este satisfăcută, atunci diferenţa

$$C_r - C_s$$

reprezintă un cuplu al cărui efect este rotirea în jurul punctului fix B în planul vertical, rotire ce se manifestă printr'o săritură a afetului, roţile părăsind platforma de reazim.

In cele ce urmează voiu stabili ecuaţia săriturii pe cale elementară utilizând numai datele ce se pot măsura uşor la afet, evitând întrebuinţarea momentetor de inerţie.

Notând cu z ridicarea roţii de pe platformă, vom căuta să stabilim ecuaţia mişcării de sărire.

Fie:

$$C_r - C_s = R \cdot h - P \cdot Lg.$$

Acest moment are axa în B. La braţul reprezentat de distanţa AB = L, rezultă forţa de ridicare:

$$F = \frac{R \cdot h - P \cdot Lg}{L}.$$

Notând cu P_A componenta greutăţii afetului corespunzătoare sprijinului în A, masa corespunzătoare este:

$$\frac{P_A}{g}.$$

Aplicând relaţia lui NEWTON, avem:

$$F = \frac{P_A}{g} \cdot \frac{dz}{dt}$$

sau:

$$\frac{R \cdot h - P \cdot Lg}{L} = \frac{P_A}{g} \cdot \frac{dz}{dt} = P \cdot \frac{Lg}{g \cdot L} \cdot \frac{dz}{dt}$$

de unde:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{R \cdot h}{P \cdot Lg} \cdot g - 1.$$

Această relaţie este valabilă în momentul începerii cabrării. Când ţeava s'a ridicat la înălţimea Z, relaţia este mai complectă. Din figură se vede că avem:

$$C_r - C_s = R \cdot h - P \cdot L'g.$$

Iar forţa:

$$F = \frac{R \cdot h - P \cdot L'g}{L'}.$$

De asemenea

$$\frac{\lambda}{\lambda_r} = \frac{L'g}{L'} = \frac{Lg}{L}$$

apoi:

$$L = \sqrt{\lambda_r^2 + H^2}$$

$$L' = \sqrt{\lambda_r^2 + (H + z)^2} = \sqrt{L^2 + z\,(2H + z)}$$

înlocuind în formula lui F:

$$F = \frac{R \cdot h}{\sqrt{L^2 + z\,(2H + z)}} - P \cdot \frac{Lg}{L}.$$

Acceleraţia este:

$$\gamma = \frac{F}{M_{A'}}.$$

Masa este ceea ce revine din masa totală, reazimului A deplasat în A'. Avem de astă dată:

$$M'_A = \frac{P \cdot L'g}{g \cdot L'} = P\frac{Lg}{gL}$$

şi deci:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{R \cdot h}{P \cdot Lg} \cdot \frac{L}{L'} - 1$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{R}{P} \cdot \frac{g \cdot h \cdot L}{Lg \cdot \sqrt{L^2 + z\,(2H + z)}} - 1$$

care reprezintă ecuaţia săriturii afetului.

Se vede că dacă $z = 0$, găsim tocmai valoarea acceleraţiei în momentul începerei săriturii.

Valoarea maximă este tocmai în acest caz. Accelerația se anulează pentru:

$$z = \sqrt{H^2 - L^2 + \sqrt{\frac{RghL}{P \cdot Lg}}} - H$$

sau:

$$L' = \frac{Rg \cdot hL}{PLg}$$

sau:

$$L'g = \frac{R \cdot g \cdot h}{P}$$

sau:

$$\frac{PL'g}{R \cdot h} = g$$

(unde M este masa întregului afet), care conduce la un corolar cinematic interesant:

Un sistem rigid, mobil în jurul unui punct fix ce admite o axă de simetrie trecând prin acel punct, supus acțiunii unui efort R *din planul de simetrie, se va roti în jurul punctului fix, atingând viteza maximă pe direcția greutății când momentul greutății proprii și momentul forței active* R *sunt în raportul fix al accelerației gravității.*

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

ASUPRA TEOREMEI LUI ROBERT-DUCHÊSNE

Teorema lui ROBERT-DUCHÊSNE întrebuințată în balistica exterioară a tragerilor antiaeriene se bazează pe o demonstrație ce presupune o mică aproximație.

Voiu da adevărata formă a acestei teoreme eliminând aproximația ce se făcea până acum.

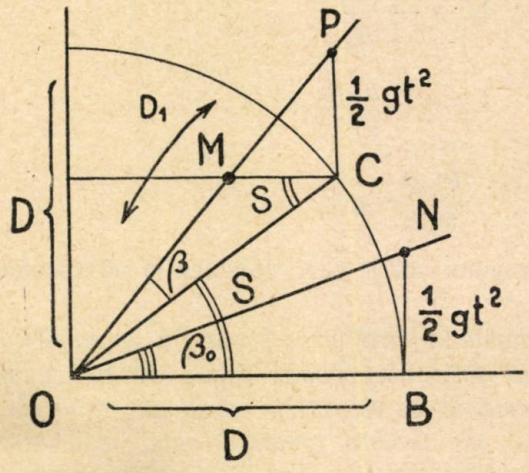
Enunț. Considerând o curbă de egală distanță liniară D, unghiul de înălțător origină (β_0) și unghiul de înălțător (β), la un unghiu de înălțare S relația lui ROBERT-DUCHÊSNE se exprimă:

$$\boxed{\sin\beta = \sin\beta_0 \cdot \cos S}.$$

Considerăm B, C, punctele aparţinând curbei de egală distanţă liniară D şi

$$NB = PC = \frac{1}{2} gt^2$$

căderea traiectoriei în punctele B, C.



Se ştie că unghiurile de înălţător sunt

$$\sphericalangle \beta_0 = \sphericalangle NOB ;$$

$$\sphericalangle \beta = \sphericalangle POC,$$

iar unghiul de înălţare

$$\sphericalangle . S = \sphericalangle COB ;$$

$$BO = CO = D,$$

distanţa liniară corespunzătoare curbei date.

Din punctul C ducem o paralelă la OB ce taie pe OP în M. Ştim că PC, NB sunt perpendiculare pe OB, având direcţia gravităţii iar, OB fiind orizontală.

Se vede că

$$\sphericalangle MCO = \sphericalangle COB = \sphericalangle S$$

ca alterne interne.

Unghiul PCO are deci expresia:

$$\sphericalangle PCO = \sphericalangle PCM + \sphericalangle MCO = 90^0 + S.$$

Notând $PO = D_1$, din triunghiul POC deducem:

$$D_1^2 = PC^2 + CO^2 - 2\,PC \,.\, CO \cos (S + 90^0).$$

Dar $\cos (S + 90^0) = - \sin S$; deci:

$$D_1^2 = PC^2 + CO^2 + 2\,PC \,.\, CO \,.\, \sin S.$$

Dar din triunghiul ONB

$$NB = OB \operatorname{tg}\beta_0 = D \operatorname{tg}\beta_0 .$$

Deci

$$PC = NB = D \operatorname{tg}\beta_0 .$$

Inlocuind, D_1 ia forma

$$D_1^2 = D^2\,tg^2\beta_J + D^2 + 2\,D^2\,tg\beta_0\,\sin S.$$

Şi deci

$$D_1 = D\,.\,\sqrt{tg^2\beta_0 + 2\,tg\beta_0\,\sin S + 1} \qquad (1)$$

Din triunghiul OPC, aplicând formula sinusurilor:

$$\frac{PC}{\sin\beta} = \frac{D_1}{\sin(90^0 + S)} \qquad (1')$$

$$PC = NB = D\,tg\beta_0$$

$$\sin(90^0 + S) = \cos S \qquad D_1 = D\sqrt{tg^2\beta_0 + 2\,tg\beta_0\,\sin S + 1}.$$

Deci:

$$\sin\beta = \frac{tg\beta_0 + \cos S}{\sqrt{tg^2\beta_0 + 2\,tg\beta_0\,\sin S + 1}}$$

Inlocuind $tg\beta_0 = \sin\beta_0/\cos\beta_0$ formula devine

$$\boxed{\sin\beta = \frac{\sin\beta_0\,\cos S}{\sqrt{1 + \sin S\,\sin 2\beta_0}}} \qquad (2)$$

Să vedem de unde provine forma $\sin\beta = \sin\beta_0\,\cos S$.
In formula (1') se considera $D_1 = ON$ şi rezulta imediat

$$\sin\beta = \sin\beta_0\,\cos S \quad \left(\frac{NB}{ON} = \sin\beta_0\right).$$

Să vedem la ce conduce aproximaţia $D_1 = ON$.

Avem: $$ON = \frac{OB}{\cos\beta_0} = \frac{D}{\cos\beta_0}\,.$$

Luând în loc de ON pe D_1 dat de (1), avem:

$$\frac{1}{\cos\beta_0} = \sqrt{tg^2\beta_0 + 2\,tg\beta_0\,\sin S + 1}.$$

$$\therefore \qquad \sqrt{1 + \sin S\,\sin 2\beta_0} = 1.$$

şi raportat la formula (2) rezultă natural forma redusă

$$\sin\beta = \sin\beta_0\,\cos S$$

dată de ROBERT-DUCHÊSNE.

E adevărat că aproximaţia făcută nu e mare; ea atinge valoarea maximă pentru $S = 90^0$.

Să studiem însă şi să arătăm că din punct de vedere matematic ea conduce la imposibilităţi.

Avem: $\sqrt{1 + \sin S \cdot \sin 2\beta_0} = 1$

$$\therefore \quad \sin S \cdot \sin 2\beta_0 = 0 \qquad (S \neq 0).$$

a) $\sin S = 0$, $S = 0$. Problema nu are sens şi exprimă cazul banal $\beta = \beta_0$.

b) $\sin 2\beta = 0$, $\beta = 0$. Ceea ce este imposibil fiindcă ştim că $\beta > 0$.

Reiau formula (2). Caz particular $S = 0$; $\beta = \beta_0$.

In compoziţia ei nu intră D, deducem deci proprietatea cunoscută: *Valoarea unghiului de înălţător este independentă de distanţa liniară* D.

S'ar părea că totuşi $\beta = f(D)$ prin intermediul lui β_0; dar $\operatorname{tg}\beta_0 = \dfrac{NB}{OB}$.

Avem însă: $NB = \dfrac{1}{2} g t^2$

$$OB = D = V \times t = \gamma \times t^2$$

în care γ este acceleraţia proiectilului

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{\gamma t^2} = \frac{g}{2\gamma}.$$

Deci β_0 este independent de distanţa liniară D, iar β fiind funcţie de β_0 rămâne stabilit că: *Unghiul de înălţător este independent de distanţa lineară* (D).

SUBLOCOT. CONSTANTIN PANTELIMON
Artileria antiaeriană Ploeşti.

UN ŞIR DE DESFĂŞURATE SUCCESIVE

I. In cele ce urmează, reiau problema 2556 a cărei soluţie s'a publicat în G. M., XLII, p. 369, pentru a aduce unele precizări şi complectări şi pentru a ilustra cu câteva cazuri particulare natura curbelor-soluţiuni.

In problema 2556 se cere *a se determina curbele* (C) *astfel că dacă* (C_1) *e desfăşurata ei,* (C_2) *desfăşurata lui* (C_1), (C_3) *a lui* (C_2), *etc....; razele de curbură ale curbei* (C_n) *să fie egale cu ale curbei* (C) *în punctele corespunzătoare.*

Fie MT tangenta şi MM_1 normala într'un punct M la curba (C) şi astfel ca $MM_1 = R$, raza de curbură a curbei (C); fie M_1M_2 normala în M_1 la desfăşurata (C_1) astfel ca $M_1M_2 = R_1$, raza de curbură a curbei (C_1); fie M_2M_3 normala în M_2 la desfăşurata (C_2) a lui (C_1) şi astfel ca $M_2M_3 = R_2$ raza de curbură a curbei (C_2); etc....

Fie unghiul $\theta = (Ox, MT)$, Ox fiind o direcţie fixă şi fie $s, s_1, s_2, \ldots s_n$ arcele punctelor M, M_1, M_2, ... M_n respectiv pe curbele (C), (C_1), (C_2)... (C_n), măsurate dela origini corespunzătoare printr'o construcţie analoagă construcţiei M, M_1, M_2... M_n; şi în care razele de curbură sunt respectiv R, R_1, R_2,... R_n.

Scriu după definiţia razei de curbură:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{d\theta} = \varepsilon R \\ \dfrac{ds_1}{d\theta} = \varepsilon_1 R_1 \\ \vdots \\ \dfrac{ds_n}{d\theta} = \varepsilon_n R_n \end{cases}$$

unde $d\theta$ este unghiul de contingenţă, acelaşi pentru toate curbele întru cât unghiurile θ, θ_1, θ_2... θ_n ce le fac tangentele respective cu direcţia fixă Ox diferă dela o curbă la alta prin $\pm\frac{\pi}{2}$ şi unde $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ sunt $\pm$ 1 după cum unghiul tangentei cu normala corespunzătoare pentru fiecare curbă este pozitiv sau negativ *(Lecţiuni de Geometrie Analitică,* N. ABRAMESCU, p. 592).

Pe de altă parte se ştie că diferenţiala arcului desfăşuratei este egală cu diferenţiala razei de curbură a curbei, deci:

$$(2)\qquad \begin{cases} ds_1 = dR \\ ds_2 = dR \\ \vdots \\ ds_n = dR_{n-1} \end{cases}$$

Din relaţiunile (1) şi (2) deducem următoarele, ca proprietăţi ale şirului de desfăşurate succesive:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{d\theta} = \varepsilon R \\ \dfrac{d^2s}{d\theta^2} = \varepsilon \dfrac{dR}{d\theta} = \varepsilon \dfrac{ds_1}{d\theta} = \varepsilon\varepsilon_1 R_1 \\ \dfrac{d^3s}{d\theta^3} = \varepsilon \dfrac{d^2R}{d\theta^2} = \varepsilon \dfrac{d^2s_1}{d\theta^2} = \varepsilon\varepsilon_1 \dfrac{dR_1}{d\theta} = \varepsilon\varepsilon_1 \dfrac{ds_2}{d\theta} = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 R_2 \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n+1}s}{d\theta^{n+1}} = \varepsilon \dfrac{d^n R}{d\theta^n} = \ldots = \varepsilon\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \dfrac{dR_{n-1}}{d\theta} = \\ \qquad = \varepsilon\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \dfrac{ds^n}{d\theta} = \varepsilon\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n R_n \end{cases}$$

sau:

$$(4)\qquad \frac{ds}{\varepsilon R} = \frac{dR}{\varepsilon_1 R_1} = \frac{dR_1}{\varepsilon_2 R_2} = \ldots = \frac{dR_{n-1}}{\varepsilon_n R_n} = d\theta$$

II. Cu acestea condiţia problemei 2556:

$$(5)\qquad R_n = R, \text{ se scrie:}$$

$$(6)\qquad \frac{d^{n+1}s}{d\theta^{n+1}} = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \frac{ds}{d\theta} \text{ sau}$$

$$(7)\qquad \frac{d^{n+1}s}{d\theta^{n+1}} = \pm \frac{ds}{d\theta}$$

care este ecuaţia diferenţială a arcului curbelor căutate şi problema prezintă astfel două familii de soluţiuni pentru un acelaşi n, corespunzătoare semnului.

Integrând odată avem:

$$\frac{d^n s}{d\theta^n} = \pm s + S_0 \tag{8}$$

şi putem dispune de origina arcelor pe curba (C) astfel ca $S_0 = 0$, aceasta revenind la a face o schimbare de funcţiune $s' = s \mp S_0$ respectiv. Avem deci următoarea dublă soluţie generală:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} C_k e^{r_k \theta} \tag{9}$$

unde $r_k = e^{i\frac{2k}{n}\pi}$ sau $e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$ după cum ecuaţia caracteristică este

$$r^n = +1 \text{ sau } r^n = -1.$$

Ţinând seama de proprietăţile (3) avem următoarele reprezentări parametrice ale lui s, R, $R_1 \ldots R_n$ cu n constante arbitrare:

$$(10)\quad \begin{cases} s = \Sigma C_k e^{r_k \theta} \\ R = \varepsilon \Sigma C_k r_k e^{r_k \theta} \\ R_1 = \varepsilon \varepsilon_1 \Sigma C_k r_k^2 e^{r_k \theta} \\ \vdots \\ R_{n-1} = \varepsilon \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \Sigma C_k r_k^n e^{r_k \theta} \\ R_n = \varepsilon \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \Sigma C_k r_k^{n+1} e^{r_k \theta} \end{cases}$$

Luând, fără a pierde generalitatea soluţiunilor, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = +1$ şi luând numai $\varepsilon_n = \pm 1$ după cum r_k sunt rădăcinile ecuaţiilor caracteristice $r^n = \pm 1$, avem:

$$(11)\quad \begin{cases} (C) & s = \Sigma C_k e^{r_k \theta} \\ C_1 & R = \Sigma C_k r_k e^{r_k \theta} \\ & R_1 = \Sigma C_k r_k^2 e^{r_k \theta} \\ & \vdots \\ (C_{n-1}) & R_{n-2} = \Sigma C_k r_k^{n-1} e^{r_k \theta} \\ (C_n) & R_{n-1} = \Sigma C_k r_k^n e^{r_k \theta} = \pm s \\ & R_n = \pm \Sigma C_k r_k^{n+1} e^{r_k \theta} = \Sigma C_k r_k e^{r_k \theta} = R. \end{cases}$$

III. Pe aceste relaţiuni şi ţinând seama de periodicitatea rădăcinilor ecuaţiei binome $r^n = \pm 1$ se citesc următoarele proprietăţi ale şirului de desfăşurate succesive astfel ca razele de curbură ale a n^{ei} desfăşurate să fie egale cu ale curbei iniţiale în punctele corespunzătoare:

(A) *Sunt curbe transcendente.*

(B) *Curba* (C_n) *este egală cu curba* (C).

(C) *Toate desfăşuratele succesive* (C_1), $(C_2)\ldots$ (C_{n-1}) *se bucură de aceeaşi proprietate de a avea cu a* n^a *desfăşurată a lor razele de curbură egale în puncte corespunzătoare şi deci de a fi egale, respectiv, adică, cu* (C_{n+1}), $(C_{n+2})\ldots(C_{2n-1})$.

(D) *Din acestea rezultă că problema are un număr de soluţiuni intrinseci egal cu:*

$$2 \cdot n \cdot \infty^{n+1}$$

căci la fiecare din cele două familii corespunzătoare ecuaţiilor caracteristice $r^n = \pm 1$ *corespund câte* n *soluţii generale cu câte* $n+1$ *constante arbitrare* $(S_0, C_k, k=0,1\ldots n-1)$. *Iar trecând la coordonate carteziene se mai introduc două constante arbitrare numărul total fiind:*

$$2 \cdot n \cdot \infty^{n+3}$$

(E) *Figurile* $F_1 = (C) \quad , \quad (C_1) \quad \ldots (C_{n-1})$

$F_2 = (C_n) \quad , \quad (C_{n+1}) \ldots (C_{2n-1})$

$F_3 = (C_{2n}) \quad , \quad (C_{2n+1}) \ldots (C_{3n-1})$

⋮

sunt egale, aşezarea lor diferind printr'o rotaţie de un multiplu de $\frac{\pi}{2}$ *şi dela un anumit rang putându-se suprapune, după cum vom preciza.*

IV. Pentru a preciza cele enunţate la proprietăţile D şi E, determinăm constantele arbitrare şi trecem la coordonate carteziene.

Luăm următoarele condiţii iniţiale, pentru $\theta = 0$.

$$(12) \quad s(0) = 0 \ , \ s'(0) = a \ , \ s''(0) = a_1, \ldots s^{(n-1)}(0) = a_{n-2}$$

unde derivatele succesive ale arcului fiind cu aproximaţia semnului razele de curbură succesive, constantele introduse; $a, a_1, \ldots a_{n-2}$

sunt respectiv razele de curbură cu semnul lor în punctele desfăşuratelor ce corespund lui $\theta = 0$, adică respectiv $R(0)$, $R_1(0), \ldots R_{n-2}(0)$. Incât constantele C_k sunt date de sistemul:

$$(13)\qquad \begin{cases} \Sigma\, C_k = 0 \\ \Sigma\, C_k r_k = a \\ \Sigma\, C_k r_k^2 = a_1 \\ \vdots \\ \Sigma\, C_k r_k^{n-1} = a_{n-2} \end{cases}$$

Observăm cu acestea că $R_{n-1}(0) = s(0) = 0$.

Obţinem reprezentarea parametrică a coordonatelor carteziene ale curbei (C), integrând în condiţiile problemei, relaţiunile:

$$(14)\qquad \begin{cases} dx = \cos\theta\, ds = R\cos\theta\, d\theta \\ dy = \sin\theta\, ds = R\sin\theta\, d\theta \end{cases}, \text{ deci:}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} x = \int\left(\sum_0^{n-1} C_k r_k e^{r_k\theta}\right)\cos\theta\, d\theta + X_0 = \sum_0^{n-1} C_k r_k \int e^{r_k\theta}\cos\theta\, d\theta + X_0 \\ y = \int\left(\sum_0^{n-1} C_k r_k e^{r_k\theta}\right)\sin\theta\, d\theta + Y_0 = \sum_0^{n-1} C_k r_k \int e^{r_k\theta}\sin\theta\, d\theta + Y_0 \end{cases}$$

unde determinăm constantele cu condiţiile:

$$(16)\qquad \begin{cases} x^0 = x(0) = 0 \\ y^0 = y(0) = 0 \end{cases}$$

astfel încât origina axelor rectangulare să coincidă cu origina arcelor s pe curbă, curba fiind deci tangentă în origină la axa Ox (aceasta simplifică venirea desfăşuratelor).

Ţinând seama de integralele cunoscute:

$$(17)\qquad \begin{cases} \int e^{ax}\cos x\, dx = \dfrac{e^{ax}}{1+a^2}(\sin x + a\cos x) \\ \int e^{ax}\sin x\, dx = \dfrac{e^{ax}}{1+a^2}(a\sin x - \cos x) \end{cases} \qquad 1 + a^2 \neq 0$$

formulele (15) devin:

$$(18)\qquad \begin{cases} x = \sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k\, e^{r_k\theta}}{1+r_k^2}(\sin\theta + r_k\cos\theta) + X_0 \\ y = \sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k\, e^{r_k\theta}}{1+r_k^2}(r_k\sin\theta - \cos\theta) + Y_0 \end{cases} \qquad 1 + r_k^2 \neq 0$$

unde cu condițiile (16), constantele sunt:

$$(19)\qquad \begin{cases} X_0 = -\sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k^2}{1+r_k^2} \\ Y_0 = \sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k}{1+r_k^2} \end{cases}$$

sau (18) sub o altă formă:

$$(20)\qquad \begin{aligned} x &= \Phi(\theta)\sin\theta + \Psi(\theta)\cos\theta - \Psi(0) \\ y &= \Psi(\theta)\sin\theta - \Phi(\theta)\cos\theta + \Phi(0) \end{aligned}$$

unde $\Phi(\theta) = \sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k e^{r_k\theta}}{2+r_k^2}$ și $\Psi(\theta) = \sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k^2 e^{r_k\theta}}{1+r_k^2}$ observând că $\Psi(\theta) = \Phi'(\theta)$.

Pentru cazurile $1 + r_k^2 = 0$, excluse în reprezentarea (18), adică pentru cazurile când printre rădăcinile ecuațiilor caracteristice $r^n = \pm 1$ se găsesc și rădăcinile $\pm i$; avem integralele ce trebuesc scrise separat în sumele dela (18):

$$(21)\qquad \begin{cases} \int (e^{i\theta} + e^{-i\theta})\cos\theta\, d\theta = \theta + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \\ \int (e^{i\theta} + e^{-i\theta})\sin\theta\, d\theta = -\dfrac{1}{2}\cos 2\theta \\ \int (e^{i\theta} - e^{-i\theta})\sin\theta\, d\theta = \theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

Obținem reprezentarea parametrică a desfășuratelor succesive prin integrațiuni analoage, ținând seama de următoarele două observațiuni:

α) Unghiurile de proiecție ale elementelor de arc diferă de θ printr'un multiplu de $\dfrac{\pi}{2}$ dela curbă la curbă, încât formulele (14) trebuesc scrise pentru cazul curent, curba (C_p):

$$(22)\qquad \begin{cases} dx_p = \cos\theta_p\, ds_p = \varepsilon_p R_p \cos\theta_p\, d\theta_p \\ dy_p = \sin\theta_p\, ds_p = \varepsilon_p R_p \sin\theta_p\, d\theta_p \end{cases}$$

Dar $\theta_p = (0x, \overline{M_{p-1}M_p} = \theta + \sum_0^{p-1} \varepsilon_k \frac{\pi}{2}$ cu $\varepsilon_0 = \varepsilon = +1$

ţinând seama de convenţia făcută la (10) şi (11) avem:

$$(23)\quad \begin{cases} dx_p = \varepsilon_p R_p \cos\left(\theta + p\frac{\pi}{2}\right) d\theta \\ dy_p = \varepsilon_p R_p \sin\left(\theta + p\frac{\pi}{2}\right) d\theta \end{cases}$$

β) Determinăm constantele de integrare ţinând seama că pentru $\theta = 0$ trebue să avem pentru desfăşuratele succesive următoarele valori ale coordonatelor carteziene, cum uşor se constată pe o figură:

$$(24)\quad \begin{cases} (C_1) & \begin{cases} x_0^1 = 0 \\ y_1^0 = a \end{cases} \\ (C_2) & \begin{cases} x_2^0 = a_1 \\ y_2^0 = a \end{cases} \\ (C_3) & \begin{cases} x_3^0 = a_1 \\ y_3^0 = a + a_2 \end{cases} \\ \vdots & \\ (C_p) & \begin{cases} x_p^0 = a_1 + a_3 + \ldots + a_{p-1} \\ y_p^0 = a + a_2 + \ldots + a_{p-2} \end{cases} \quad \text{dacă } p = 2m \\ (C_p) & \begin{cases} x_p^0 = a_1 + a_3 + \ldots + a_{p-2} \\ y_p^0 = a + a_2 + \ldots + a_{p-1} \end{cases} \quad \text{dacă } p = 2m+1 \\ \vdots & \end{cases}$$

Cu acestea avem succesiv:

Pentru curba (C_1):

$$(25)\quad \begin{cases} x_1 = \sum_0^{n-1} C_k r_k^2 \int e^{r_k\theta} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta + X_1 = \\ \quad = -\sum_0^{n-1} C_k \frac{r_k^2 e^{r_k\theta}}{1+r_k^2} (r_k \sin\theta - \cos\theta) + X_1 \\ y_1 = \sum_0^{n-1} C_k r_k^2 \int e^{r_k\theta} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta + Y_1 = \\ \quad = \sum_0^{n-1} C_k \frac{r_k^2 e^{r_k\theta}}{1+r_k^2} (\sin\theta + r_k \cos\theta) + Y_1 \end{cases}$$

unde constantele sunt, cu condiţiile scrise la (24):

$$(26)\qquad \begin{cases} X_1 = -\sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k^2}{1+r_k^2} \\ Y_1 = a - \sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k^2}{1+r_k^2} \end{cases}$$

Pentru curba (C_2):

$$(27)\qquad \begin{cases} x_2 = \sum_0^{n-1} C_k r_k^3 \int e^{r_k\theta} \cos(\theta+\pi)\, d\theta + X_2 = \\ \quad = -\sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k^3 e^{r_k\theta}}{1+r_k^2} (\sin\theta + r_k \cos\theta) + X_2 \\ y_2 = \sum_0^{n-1} C_k r_k^3 \int e^{r_k\theta} \sin(\theta+\pi)\, d\theta + Y_2 = \\ \quad = -\sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k^3 e^{r_k\theta}}{1+r_k^2} (r_k \sin\theta - \cos\theta) + Y_2 \end{cases}$$

unde în mod analog constantele sunt:

$$(28)\qquad \begin{cases} X_2 = a_1 + \sum_0^{n-1} C_k \dfrac{r_k^4}{1+r_k^2} \\ Y_2 = a - \sum_0^{n-1} C^k \dfrac{r_k^3}{1+r_k^2} \end{cases}$$

ş. a. m. d.

Interesează în deosebi *coordonatele carteziene ale curbei* (C_n), în acest caz având $R_n = R$ şi $\varepsilon_n = \pm 1$; încât:

$$(29)\qquad \begin{cases} x_n = \pm \int R \cos\left(\theta + n\dfrac{\pi}{2}\right) d\theta + X_n \\ y_n = \pm \int R \sin\left(\theta + n\dfrac{\pi}{2}\right) d\theta + Y_n \end{cases}$$

Curba (C_n) este egală cu curba (C) diferind de aceasta printr'o rotaţie şi o translaţie introduse de semnul ε_k, de paritatea lui n faţă de 4 şi de constantele de integraţiune X_n, Y_n ce se determină ţinând seama de condiţiile (24) scrise pentru $p = n$ şi ştiind că $a_{n-1} = 0$.

V. Suntem conduşi să facem următoarea discuţie care precizează proprietatea E:

1. *Pentru* $\varepsilon_n = +1$:

$$\alpha) \quad n = 4m: \begin{cases} x_n = \int R\cos\theta\, d\theta + X_n = x - X_0 + X_n \\ y_n = \int R\sin\theta\, d\theta + Y_n = y - Y_0 + Y_n \end{cases}$$

căci integralele ce intervin sunt cele din expresiile lui x şi y coordonatele curbei (C) dela (15) respectiv (18).

In acest caz (C_n) e *translatata* lui (C) de modul $\vec{V}$ $(-X_0 + X_n, -Y_0 + Y_n)$. *Şirul de desfăşurate nu se închide.*

$$\beta) \; n = 4m+1: \begin{cases} x_n = \int R\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta + X_n = -(y - Y_0) + X_n \\ y_n = \int R\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta + Y_n = \quad x - X_0 + Y_n \end{cases}$$

(C_n) se obţine lui (C) printr'o rotaţie de $\frac{\pi}{2}$ în jurul originii şi o translaţie de modul $\vec{V}$ $(Y_0 + X_n, -X_0 + Y_n)$ sau o rotaţie de $\frac{\pi}{2}$ în jurul punctului $P\left(\frac{Y_0 + X_n + X_0 - Y_n}{2}, \frac{Y_0 + X_n - X_0 + Y_n}{2}\right)$.

Şirul se închide la (C_{4n}) *adică* $(C_{4n}) \equiv (C)$. Analog, figurile (F)

$$\gamma) \; n = 4m+2: \begin{cases} x_n = \int R\cos(\theta+\pi)\, d\theta + X_n = -(x - X_0) + X_n \\ y_n = \int R\sin(\theta+\pi)\, d\theta + Y_n = -(y - Y_0) + Y_n. \end{cases}$$

(C_n) se obţine din (C) printr'o rotaţie de π în jurul originii şi o translaţie de modul $\vec{V}$ $(X_0 + X_n, Y_0 + Y_n)$ sau o rotaţie de π în jurul punctului $P\left(\frac{X_0 + X_n}{2}, \frac{Y_0 + Y_n}{2}\right)$, fiind *simetrice* faţă

de acest punct. *Şirul se închide la* (C_{2n}), *adică* $(C_{2n}) \equiv (C)$. Analog, figurile (F).

$$\delta)\ n = 4m+3: \begin{cases} x_n = \int R\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) d\theta = y - Y_0 + X_n \\ y_n = \int R\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) d\theta = -(x - X_0) + Y_n. \end{cases}$$

(C_n) se obţine din (C) printr'o rotaţie de $\frac{3\pi}{2}$ în jurul originii şi o translaţie de modul $\vec{V}$ $(-Y_0 + X_n\ ,\ X_0 + Y_n)$ sau o rotaţie rezultantă de $\frac{3\pi}{2}$ în jurul punctului

$$P\left(\frac{-Y_0 + X_n - X_0 - Y_n}{2}\ ,\ \frac{-Y_0 + X_n + X_0 + Y_n}{2}\right).$$

Şirul se închide la (C_{4n}) *adică* $(C_{4n}) \equiv (C)$. Analog, figurile (F).

2. *Pentru* $\varepsilon_n = -1$:

Cazurile α', β', γ', δ' corespunzătoare, coincid în privinţa proprietăţii (E) respectiv cu cazurile γ, δ, α, β studiate mai sus.

VI. Dăm câteva cazuri particulare:

1) $n = 1$. Ecuaţia (8) devine:

$$\frac{ds}{d\theta} = \pm s$$

de unde, şi observând că dublul semn nu e esenţial, confundându-se în acest caz cu sensul de parcurgere pe curbă:

$$\begin{cases} s = C\,e^{\theta} \\ R = C\,e^{\theta} \end{cases}$$

de unde ecuaţia intrinsecă a curbei:

$$R - s = 0$$

sau în coordonate carteziene, cu formulele (18):

$$(C) \begin{cases} x = \frac{C}{2} e^{\theta}\left(\cos\theta + \sin\theta\right) \\ y = \frac{C}{2} e^{\theta}\left(-\cos\theta + \sin\theta\right) \end{cases}$$

căci pentru simplificare e avantajos să luăm aci:

$$X_0 = Y_0 = 0$$

Eliminând pe θ în reprezentarea parametrică obţinem ecuaţia cartezianã:

$$x^2 + y^2 = \frac{C^2}{2} e^{2\operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}}.$$

Curba este deci o *spirală logaritmică,* a cărei ecuaţie în coordonate polare este:

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}+\varphi}.$$

Desfăşurata (C_1) este deci o spirală logaritmică egală precedentei şi rotită de unghiul $\frac{\pi}{2}$ în jurul originii căci şi

$$X_1 = Y_1 = 0.$$

Urmează de-aci că centrul de curbură într'un punct oarecare al spiralei logaritmice este intersecţia normalei punctului cu perpendiculara în pol $(\theta = -\infty)$ *pe raza vectoare a punctului.*

2) $n = 2$. Ecuaţia (8) devine:

$$\frac{d^2 s}{a\theta^2} = \pm s$$

şi urmează 2 cazuri:

α) $r^2 = +1$, deci:

$$\begin{cases} s = C_1 e^{\theta} + C_2 e^{-\theta} \\ R = C_1 e^{\theta} - C_2 e^{-\theta} \end{cases}$$

unde determinând constantele arbitrare cu condiţiile (13):

$$C_1 = -C_2 = \frac{a}{2}$$

şi rezultă reprezentarea parametrică a coordonatelor intrinseci:

$$\begin{cases} s = a\, sh\theta \\ R = a\, ch\theta \end{cases}$$

de unde ecuaţia intrinsecă:

$$R^2 - s^2 = a^2$$

Trecând la coordonate carteziene, avem cu formulele (20):

$$\Phi(\theta) = C_1 \frac{e^{\theta}}{2} + C_2 \frac{-e^{-\theta}}{2} = \frac{a}{2} ch\theta \text{ şi } \Psi(\theta) = \Phi'(\theta) = \frac{a}{2} sh\theta$$

deci:

$$(C)\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(ch\theta \sin\theta + sh\theta \cos\theta\right) \\ y = \dfrac{a}{2}\left(sh\theta \sin\theta - ch\theta \cos\theta + 1\right) \end{cases}$$

curbă care, cu aproximaţia unei translaţii şi unei dilatări face obiectul problemei 4854 propusă în G. M. la p. 672 Vol. XLII, şi a cărei construcţie o aşteptăm dela corespondenţii Gazetei Matematice.

Desfăşurata (C_2) este simetrica curbei (C) faţă de punctul $P\left(\frac{X_0 + X_2}{2}, \frac{Y_0 + Y_2}{2}\right)$ conform cazului 1. γ dela V, adică, după formulele (28) şi ţinând seama că $a_1 = 0$, faţă de punctul $P\left(0, \frac{a}{4}\right)$. Analog, desfăşurata (C_4) este simetrica curbei (C_2) faţă de acelaşi punct, încât şirul de desfăşurate se închide la (C_4), adică $(C_4) \equiv (C)$.

$\beta)$ $r^2 = -1$, deci:

$$\begin{cases} s = C_1 e^{i\theta} + C_2 e^{-i\theta} \\ R = i C_1 e^{i\theta} - i C_2 e^{-i\theta} \end{cases}$$

unde determinând constantele arbitrare cu condiţiile (13):

$$C_1 = -C_2 = \frac{a}{2i},$$

rezultă reprezentarea parametrică a coordonatelor intrinseci

$$(C)\begin{cases} s = a \sin\theta \\ R = a \cos\theta \end{cases}$$

de unde ecuaţia intrinsecă a curbei (C):

$$R^2 + s^2 = a^2.$$

Trecând la coordonatele carteziene, avem cu formulele (21) şi determinând şi constantele cu condiţiile (16):

$$(C)\begin{cases} x = a\left(\theta + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right) \\ y = a\left(1 - \dfrac{1}{2}\cos 2\theta\right). \end{cases}$$

Adică curba (C) este în acest caz o *cicloidă*, care se ştie, se bucură de proprietatea de a avea toate desfăşuratele succesive egale şi translatate de acelaşi modul din două în două. In adevăr,

ne găsim în cazul 2.γ' dela V (identic cu 1.α dela V): adică (C_2) e translatata de modul $\vec{V}$ $(-X_0+X_2, -Y_0+Y_2)$ a curbei (C). Calculând pe X_2 şi Y_2 acest modul este în definitiv $\vec{V}$ $(0, a)$. Deşi desfăşurata (C_1) este şi ea egală cu curba (C), cicloida nu răspunde cazului $n = 1$, pentrucă razele lor de curbură nu sunt egale în puncte corespunzătoare.

VII. La fel se pot studia următoarele probleme mai generale:

1. In ipoteza $R_n = hR$, unde h e o constantă dată, avem ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^n s}{d\theta^n} = \pm hs$$

cu următoarea soluţie generală, dând şirul de desfăşurate:

$$(C)\begin{cases} s = \Sigma C_k e^{r_k\theta} \\ R = \Sigma C_k r_k e^{r_k\theta} \\ \vdots \end{cases} \qquad r_k = \left(\sqrt[n]{\pm h}\right)_k$$

$$(C_n)\begin{cases} R_{n-1} = \Sigma C_k r_k^n e^{r_k\theta} = \pm hs \\ R_n = \pm \Sigma C_k r_k^{n+1} e^{r_k\theta} = hR \end{cases}$$

de unde se vede că curba (C_n) este asemenea cu curba (C) în raportul $a:1$. Deci la proprietăţile B, C dela III *egalitatea* se înlocueşte cu *asemănarea* în raportul $a:1$, iar la proprietatea E: figurile $F_1, F_2, F_3 \ldots$ sunt asemenea în rapoartele $1, a, a^2, \ldots$, asupra aşezărilor lor se face aceeaşi discuţie ca la V, *suprapunerea* înlocuindu-se cu *aşezarea omotetică*, fară a mai exista deci închidere.

In această ipoteză prezintă un deosebit interes cazul $n = 2$, $\varepsilon = -1$, care în ipoteza problemei 2556 conduce la *cicloidă*, şi care aci conduce la curbele *epi* şi *hipocicloide* (într'o notă voiu arăta identificarea).

2. In ipoteza $R_n = hR + l$, unde h şi l sunt două constante date, e uşor de constatat că curba (C) nu este egală şi nici asemenea cu curba (C_n), şi analog figurile F_1 şi F_2 dar dela (C_n) înainte apare asemănarea respectiv omotetia ca în ipoteza precedentă.

3. In ipoteza $R_{n+p} = R_p$ se poate scrie ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^n R_p}{d\theta^n} = \pm R_p$$

de unde rezultă că dela curba (C_{p+1}) înainte sunt valabile concluziile din ipoteza problemei 2556.

4. In ipoteza $R_{n+p} = h R_p$ concluziile rezultă din combinarea ipotezelor (1) şi (3).

5. Analog în ipoteza $R_{n+p} = h R_p + l$ concluziile se combină între cele dela (2) şi (3).

6. Alte generalizări cuprinzând legături lineare între razele de curbură succesive, ne depărtează treptat de cele de mai sus, dar pot da alte proprietăţi.

ADRIAN GHEORGHIU.

NOTE MATEMATICE

12. *O erată.* Din cauză de boală nu am putut revizui corecturile la articolul pe care l-am publicat la paginele 113—115 din numărul trecut şi din această cauză s'a tipărit cu erori, din care unele nu sunt schimbări de litere şi de ortografie a căror rectificare să poată fi lăsată în seama cititorilor. Semnalez aci pe cele ce nu pot fi lăsate pe seama cititorilor. Rândurile sunt numerotate dela începutul paginelor:

Pagina	Rândul	In loc de	Să se scrie
113	9	SHRENKS	SHANKS
113	29	în	prin
113	31	sau exact	sau mai exact
113	31	la	(se va suprima)
113	32	3,24162277661	3,1622776601 ...
113	34	2217	22/7
114	7	AHMAS	AHMES
114	12	aci articolul	aci figura din articolul
115	5	$\sqrt{2,5^2}$	$\sqrt{2,50}$
115	7	3,162322776601	3,1622776601 ...
115	17	în E	în G
115	31	28,3136	28,3137
115	31	1,23102	1,23103
115	33	$1,23102^2$	$1,23103^2$
115	33	2,5154102404	2,5154348609.

Concluzia nu se schimbă.

I. IONESCU.

13. *Factori şi produse cu cifre diferite.* Problema 5119 propusă de D-l I. IONESCU, şi rezolvată în G. M. Vol. XLVII, pag. 87 şi 479, m'a condus la nota dela pag. 108, vol. XLVIII, unde am dat grupele de 3 numere cu cifre diferite aşa ca produsul a două din ele să fie egal cu al treilea şi la nota de la pag. 81 din acest volum unde am dat grupele de 5, 6 şi 7 numere scrise cu cifre diferite astfel ca produsul a n din ele să fie egal cu al $(n-1)$ ea.

La punctul 1° dela acea din urmă notă trebue adăugat

$$1 \times 2 \times 3 \times 9 = 54,$$

iar la punctul 3° trebue observat că

$$2 \times 4 \times 8 \times 9 = 576,$$

care este menţionat la 1°.

In continuare mi-am propus a căuta grupele de 4 numere, scrise cu cifre diferite, aşa ca produsul a trei din ele să fie egale cu al patrulea. In luna de vacanţă, dispunând de o mică maşină „*Brunsviga*" marca fabricei *Brunsviga Maschinenwerke* a societăţii *Grimme, Natalis & Co.*, mi-a fost uşor să satisfac această curiozitate, făcând bine înţeles în calcule multe eliminări şi reduceri dictate de unele proprietăţi ale numerelor. Am găsit următoarele 269 grupe de astfel de produse, pe care le-am înscris în ordinea crescândă a factorilor membrului I:

1×2×	3=	6	1×3×	68=	204	1×	5×972=	4860	1×	8×345=	2760				
1×2×	4=	8	1×3×	69=	207	1×	6×	7=	42	1×	8×459=	3672			
1×2×	34=	68	1×3×	89=	267	1×	6×	8=	48	1×	8×465=	3720			
1×2×	35=	70	1×3×	269=	807	1×	6×	43=	258	1×	8×469=	3752			
1×2×	38=	76	1×4×	5=	20	1×	6×	45=	270	1×	8×537=	4296			
1×2×	39=	78	1×4×	7=	28	1×	6×	57=	342	1×	8×579=	4632			
1×2×	43=	86	1×4×	9=	36	1×	6×	89=	534	1×	8×592=	4736			
1×2×	45=	90	1×4×	89=	356	1×	6×	97=	582	1×	8×634=	5072			
1×2×	48=	96	1×4×	92=	368	1×	7×	8=	56	1×	8×674=	5392			
1×2×	345=	690	1×4×	95=	380	1×	7×	9=	63	1×	8×679=	5432			
1×2×	435=	870	1×4×	209=	836	1×	7×	52=	364	1×	8×742=	5936			
1×2×	453=	906	1×4×	695=	2780	1×	7×	56=	392	1×	8×754=	6032			
1×2×	465=	930	1×4×	735=	2940	1×	7×	58=	406	1×	8×794=	6352			
1×2×	478=	956	1×5×	6=	30	1×	7×	69=	483	1×	8×932=	7456			
1×2×	485=	970	1×5×	8=	40	1×	7×	94=	658	1×	8×942=	7536			
1×2×	3485=	6970	1×5×	46=	230	1×	7×	458=	3206	1×	8×953=	7624			
1×2×	3548=	7096	1×5×	64=	320	1×	8×	9=	72	1×	8×954=	7632			
1×2×	4538=	9076	1×5×	68=	340	1×	8×	45=	360	1×	9×	42=	378		
1×2×	4685=	9370	1×5×	72=	360	1×	8×	59=	472	1×	9×	52=	468		

1× 2×4835= 9670 ; 1×5× 76= 380 ; 1× 8× 63= 504 ; 1× 9× 72= 648
1× 2×4853= 9706 ; 1×5× 78= 390 ; 1× 8× 74= 592 ; 1× 9× 84= 756
1× 2×4865= 9730 ; 1×5×476= 3820 ; 1× 8× 79= 632 ; 1× 9×638= 5742
1× 3× 8= 24 ; 1×5×728= 3640 ; 1× 8× 92= 736 ; 1× 9×647= 5823
1× 3× 9= 27 ; 1×5×784= 3920 ; 1× 8× 94= 752 ; 1× 9×834= 7506
1× 3× 26= 78 ; 1×5×872= 4360 ; 1× 8× 95= 760 ; 1× 9×836= 7524
2× 3× 9= 54 ; 2×4×895= 7160 ; 2× 7× 45= 630 ; 2×14×307= 8596
2× 3× 15= 90 ; 2×6× 7= 84 ; 2× 7× 65= 910 ; 2×41× 73= 5986
2× 3× 109= 654 ; 2×6× 9= 108 ; 2× 8× 19= 304 ; 2×41× 85= 6970
2× 3× 145= 870 ; 2×6× 59= 708 ; 2× 9× 17= 306 ; 2×43× 95= 8170
2× 4× 7= 56 ; 2×7× 35= 490 ; 2× 9× 45= 810 ; 2×45× 71= 6390
2× 4× 95= 760 ; 2×7× 36= 504 ; 2× 9×465= 8370 ; 2×51× 69= 7038
2× 4× 107= 856 ; 2×7× 39= 546 ; 2×14× 35= 980 ; 3× 9× 28= 756
2×59× 73= 8614 ; 3×5× 8= 120 ; 3× 5×618= 9270 ; 3× 9× 64= 1728
3× 4× 5= 60 ; 3×5× 16= 240 ; 3× 5×648= 9720 ; 3× 9× 78= 2106
3× 4× 6= 72 ; 3×5× 18= 270 ; 3× 6× 15= 270 ; 3× 9×241= 6507
3× 4× 8= 96 ; 3×5× 48= 720 ; 3× 6× 28= 504 ; 3×18× 94= 5076
3× 4× 9= 108 ; 3×5× 84= 1260 ; 3× 6× 45= 810 ; 3×21× 89= 5607
3× 4× 59= 708 ; 3×5× 86= 1290 ; 3× 6× 54= 972 ; 3×24× 98= 7056
3× 4× 65= 780 ; 3×5× 98= 1470 ; 3× 8× 19= 456 ; 3×26× 95= 7410
3× 4× 76= 812 ; 3×5×184= 2760 ; 3× 8× 21= 504 ; 3×28× 71= 5964
3× 4× 716= 8592 ; 3×5×186= 2760 ; 3× 8× 24= 576 ; 3×42× 65= 8190
3× 4× 765= 9180 ; 3×5×418= 6270 ; 3× 8× 54= 1296 ; 4× 8× 56= 1792
3× 5× 6= 90 ; 3×5×486= 7290 ; 3× 9× 21= 567 ; 4× 8× 96= 3072
4× 5× 6= 120 ; 4×5× 39= 780 ; 4× 5×936=18720 ; 4× 8×961=30752
4× 5× 8= 160 ; 4×5× 69= 2380 ; 4× 6× 8= 192 ; 4× 9× 21= 756
4× 5× 9= 180 ; 4×5× 86= 1720 ; 4× 6× 38= 912 ; 4× 9× 35= 1260
4× 5× 13= 260 ; 4×5× 93= 1860 ; 4× 6× 58= 1392 ; 4× 9×107= 3852
4× 5× 16= 320 ; 4×5×138= 2760 ; 4× 6×158= 3892 ; 4×17× 89= 6052
4× 5× 18= 360 ; 4×5×186= 3720 ; 4× 7× 19= 532 ; 4×37× 61= 9028
4× 5× 19= 380 ; 4×5×139= 2780 ; 4× 7× 35= 980 ; 5× 6× 7= 210
4× 5× 31= 620 ; 4×5×381= 7620 ; 4× 7×182= 5096 ; 5× 6× 8= 240
4× 5× 36= 720 ; 4×5×391= 7820 ; 4× 7×309= 8652 ; 5× 8× 74= 2960
4× 5× 38= 760 ; 4×5×639=12780 , 4× 7×935=26180 ; 5× 8× 79= 3160
5× 6× 9= 270 ; 5×6× 83= 2490 ; 5× 7× 18= 630 ; 5× 8× 91= 3640
5× 6× 27= 810 ; 5×6× 91= 2730 ; 5× 7× 26= 910 ; 5× 8× 93= 3720
5× 6× 29= 870 , 5×6×129= 3870 ; 5× 7×234= 8190 ; 5× 8×173= 6920
5× 6× 43= 1290 ; 5×6×238= 7140 ; 5× 8× 9= 360 ; 6× 9× 13= 702
5× 6× 73= 2190 ; 5×6×273= 8190 ; 5× 8× 19= 760 ; 6× 9× 27= 1458
5× 6× 78= 2340 ; 5×6×291= 8730 ; 5× 8× 24= 960 ; 8×19× 37= 5624
5× 6× 81= 2430 ; 5×6×327= 9810 ; 5× 8× 43= 1720 ; 8×31× 97=24056
6× 9× 47= 2538 ; 7×8× 9= 504 ; 7×18× 29= 3654 ; 8×35× 64=17920
6× 9× 138= 7452 ; 7×8× 35= 1960 ; 7×19× 26= 3458 ; 8×37× 65=19240
6× 9× 145= 7830 ; 7×8×165= 9240 ; 7×26× 45= 8190 ; 8×42× 91=30576
6× 9× 381=20574 ; 7×8×541=30296 ; 8× 9× 51= 3672 ; 9×13× 52= 6084
6×15× 42= 3780 ; 7×9× 41= 2583 ; 8× 9× 56= 4032 ; 9×15× 62= 8370

$6\times29\times45=7830$; $7\times9\times61=3843$; $8\times19\times36=5472$; $9\times16\times28=4032$
$9\times16\times38=5472$; $9\times26\times31=7254$; $9\times32\times58=16704$; $9+47\times61=25803$

Sunt interesante de subliniat următoarele 11 grupe în care se întrebuinţează *toate* cifrele sistemului zecimal câte o singură dată:

$4\times5\times639=12780$; $6\times9\times381=20574$; $8\times42\times91=30576$
$4\times5\times936=18720$; $7\times8\times541=30296$; $9\times32\times58=16704$
$4\times7\times935=26180$; $8\times35\times64=17920$; $9\times47\times61=25803$
$4\times8\times961=30752$; $8\times37\times65=19250$.

G-l Gh. Buicliu.

14. *Numere pare care nu pot reprezenta indicatori.* Imi propun să arăt că pot există o infinitate de numere pare, care nu reprezintă indicatori. In adevăr, să presupunem că avem un număr de forma:

$$N = 2^{\varepsilon} . (2^{a} . A + 1)^{\alpha} . (2^{b} . B + 1)^{\beta} \ldots$$

unde parantezele reprezintă numere prime absolut. Atunci indicatorul lui **N** este:

$$\varphi(N) = 2^{\varepsilon-1+a+b+\cdots} . A . B \ldots (2^{a} . A + 1)^{\alpha-1} . (2^{b} . B + 1)^{\beta-1} \ldots$$

Or, dacă vom avea un număr de forma:

$$M=2^{x} . P . (2^{a} . A + 1)^{y} . (2^{b} . B + 1)^{z} \ldots$$

unde $P = A . B \ldots$ şi unde, dacă $(M + 1)$ nu este prim absolut şi:

— dacă $\varepsilon > 1$, avem: $x < \varepsilon - 1 + a + b + \ldots$

— dacă $\varepsilon = 0$, avem: $x < a + b + \ldots$

atunci M nu poate reprezenta indicator.

Se mai poate întâmpla să avem:

$x \geqslant \varepsilon - 1 + a + b + \ldots$ în primul caz sau $x \geqslant a + b + \ldots$ în al doilea caz, totuşi numărul M să nu poată reprezenta indicatori dacă în produsul P ar lipsi unul sau mai mulţi factori dintre: A, B, ... sau ar fi înlocuiţi cu alţi factori diferiţi. De exemplu $76 = 2^{2} . (2 . 9 + 1) = 2^{2} . 19$ nu mai poate reprezenta indicator deoarece îi lipseşte factorul $A = 9$.

Astfel de numere pot fi găsite deci oricât de multe.

Comandor I. Linteş.

15. *Asupra problemei 5179*[1]). Soluţia dată în G. M., XLVIII, 367 se putea simplifica mult dacă se avea în vedere modul de generare tangenţial al hipocicloidei lui STEINER. Se ştie într'adevăr că aceasta este înfăşurătoarea dreptei ce uneşte două puncte M_1 şi M_2, care pornind dela origina comună M, se deplasează pe un cerc în sensuri contrarii cu vitesele constante $V_1 = 2V_2$.

In aceste condiţiuni, dacă T e polul dreptei M_1M_2, adică intersecţia tangentelor în M_1 şi M_2, la cercul de centru O şi dacă notăm $\sphericalangle MOT = \theta$, vom avea $\sphericalangle M_1OT = 3\theta$.

De unde: $\overline{OT} = \rho = \frac{R}{2\cos 3\theta}$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului fundamental. Curba-loc e deci trisectoarea lui LONGCHAMPS.

Făcând: $\rho = \infty$ avem direcţiile distincte ale asimptotelor: $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{6}$, $\theta_3 = \frac{5\pi}{6}$, iar distanţele dela centrul cercului lui EULER la aceste asimptote se calculează: $d = \frac{R}{6}$.

Se mai pot calcula şi alte elemente ale trisectoarei, ecuaţia polară mai simplă, pretându-se mai uşor la calculele respective. De exemplu razele de curbură în punctele de tangenţă cu cercul lui EULER sunt egale cu raza acestui cerc.

ING. ION C. VASILIU.

16. *Asupra tetraedrului ortocentric.* 1°. Fie un tetraedru ortocentric ABCD, de ortocentru H. Tetraedrele ABCD, HBCD, HCDA, HDAB, HABC formează un grup de tetraedre ortocentrice. Sferele de raze ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c, ρ_d, conjugate tetraedrelor ABCD, HBCD, HCDA, HDAB, HABC, întâlnesc planurile feţelor acestor tetraedre după cercurile lor conjugate.

Dacă punem

$$BC = a,\ DA = a',\ CA = b,\ DB = b',\ AB = c,\ DC = c'$$

---

1) A se vedea şi nota Nr. 56 dela pag. 505, Vol. XLVIII.

şi dacă R este raza sferei de centru O, circumscrisă tetraedrului fundamental ABCD, avem:

$$a^2+a'^2=b^2+b'^2=c^2+c'^2;\ \rho^2=R^2-\frac{a^2+a'^2}{4}$$

$$\rho_a^2=\frac{b^2+a'^2-c'^2}{2}=\frac{c^2+a'^2-b'^2}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$
$$=\frac{b^2+c^2+a'^2}{3}-\frac{a^2+b'^2+c'^2}{6} \qquad (1)$$

şi expresii analoge pentru ρ_b^2, ρ_c^2, ρ_d^2, obţinute prin permutări circulare convenabile. Urmează că *suma* $\rho_a^2+\rho_b^2+\rho_c^2+\rho_d^2$ *este egală cu suma patratelor muchiilor opuse ale tetraedrului* ABCD.

In plus avem

$$4\rho^2+\rho_a^2+\rho_b^2+\rho_c^2+\rho_d^2=4R^2$$

2°. Dacă A', B', C', D' sunt picioarele înălţimilor AA', BB', CC', DD', rezultă din egalităţile (1) că *cercurile conjugate ale triunghiurilor* BA'C, CB'A AC'B *sunt egale.*

3°. Fie O_a, O_b, O_c, O_d centrele sferelor circumscrise tetraedrelor HBCD, HCDA, HDAB, HABC. Avem, în mărime şi semn:

$$R^2=\overline{OH}^2=2\,OO_a\,.\,HA' \quad \therefore \quad HA'=\frac{R^2-\overline{OH}^2}{2\,OO_a}.$$

Dar $HA\,.\,HA'=\rho^2$ şi $HA'=\frac{\rho^2}{HA}$

aşa că

$$OO_a=\frac{R-\overline{OH}^2}{2\,HA'}=\frac{HA\,(R^2-\overline{OH}^2)}{2\,\rho^2}.$$

Prin urmare

$$\frac{OO_a}{AH}=\frac{\overline{OH}^2-R^2}{2\,\rho^2}=-\frac{3}{2}$$

adică: *tetraedrele* ABCD *şi* $O_aO_bO_cO_d$ *sunt invers omotetice. Tetraedrul* $O_aO_bO_cO_d$ *este ortocentric; ortocentrul său coincide cu centrul* O *al sferei* ABCD *iar dacă* S *este centrul de omotetie al tetraedelor* ABCD şi $O_aO_bO_cO_d$, atunci

$$\frac{SO}{SH}=-\frac{3}{2}.$$

Fie O′ centrul sferei $O_a O_b O_c O_d$ şi G centrul de greutate al tetraedrelor ABCD. Avem

$$\frac{SO'}{SO} = -\frac{3}{2} \quad \therefore \quad OS = \frac{6}{5} Ob, \quad SO' = \frac{9}{5} Ob, \quad OO' = 3\,OG.$$

Centrul O′ *al sferei* $O_a O_b O_c O_d$ *coincide cu simetricul centrului de gravitate* G *faţă de ortocentrul* H *al tetraedrului* ABCD.

Cum

$$\frac{OO'}{OH} = \frac{3}{2} = \frac{OS}{SH}$$

diviziunea (O, S, H, O′) *este armonică.*

In fine, *punctele* H *şi* O *sunt conjugate isogonal faţă de tetraedrului* $O_a O_b O_c O_o$ [1]), sau cu alte cuvinte, *ortocentrul* H *al tetraedrul* ABCD *coincide cu acela al tetraedrului complimentar* $O_a O_b O_c O_d$ [2]).

Tetraedrul complimentar $O_a O_b O_c O_d$ avea vârfurile în baricentrele feţelor $O_a O_c O_d$, . . .

V. THÉBAULT.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA DE OFIŢERI DE INFANTERIE

Proba scrisă la examenul de admitere Iulie 1943

1. Să să calculeze valoarea expresiunii:

$$E = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - \frac{1}{1+\frac{1}{4}}.$$

Dacă schimbăm semnele (+) cu (—) dela numitori, ce valoare capătă expresia ?

2. O unitate de infanterie este dotată pentru trei zile de luptă cu câte 300 de cartuşe de om. Angajată într'o luptă de mai multe zile, unitatea termină muniţia în a patra zi.

---

1) V. THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921 — 240.

2) V. THÉBAULT. *Matésis*, 1922 — 363.

Ştiind că pierderile zilnice sunt de 20% din efectivul fiecărei zile, iar muniţia celor evacuaţi este repartizată celorlalţi luptători, câte cartuşe a tras zilnic un om ?

Dar dacă şi raţia de cartuşe ar fi scăzut zilnic cu 10%, câte cartuşe ar fi tras în prima zi un luptător ?

3. Laturile unui lot de forma unui paralelogram sunt respectiv de 1 hectometru şi de 2 hectometri.

Ştiind că unghiurile ascuţite ale paralelogramului au 45° se cere să se afle suprafaţa lotului.

Dacă s'ar instala câte o conducă de apă pentru irigaţie de-a-lungul celor două diagonale, ce lungime ar avea conductele ?

(Sunt obligatorii două chestiuni la alegere).

BIBLIOGRAFIE

Bulletin dela section scientifique de l'Académie roumaine. Tome XXV. No. 1. Bucureşti 1943. ENRICO BOMPIANI: Sur les directions inflexionelles d'une transformation de DE JONQUIÈRES.

Idem. Nr. 2. Bucureşti 1943. M. GHERMĂNESCU: Sur une équation fonctionnelle. C-DOR I. LINTEŞ: Sur la distribution des nombres premiers.

Idem. Nr. 9. Bucureşti 1943. CAIUS IACOB: Sur le mouvement fluide bidimensionnel produit par la rotation de deux lignes en prolongement.

Disquisitiones Mathematicae et Physicae. Tomus III. Fasc. 1—2 1943. ST. PETRESCU: Sur les invariants des hypersurfaces non holonomes V_n^{n-1}. FLORICA CÂMPAN: Surfaces parallèles et semblables. R. WOINAROSKI: Die Kinematik des starren Körpers in einem vierdimensionalen euklidischen Raum. JEANNINE VIARD: Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable mécanique ondulatoire. IOANA MĂNESCU: Etudes des spectres L des éléments de numéros atomique 72 (celtium) et 73 (tantale). Détermination de leurs niveaux caractéristiques.

Europäische Revue. Iuli/August 1943. Stuttgart-Berlin.

Revista Matematică din Timişoara. An. XXIII. No. 9, Noemvrie 1943. V. ALACI: Relaţiuni remarcabile într'un triunghiu (urmare). Note matematice, chestiuni de examen, Bibliografie, Probleme rezolvate şi propuse.

CERERI

325. In unele tratate de aritmetică se vorbeşte de o parte denumită *aritmologie*. Care este caracteristica acestei ramuri a aritmeticii ?

I. I.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică"

Şedinţa de Luni 29 Noemvrie 1943 a Societăţii *Gazeta Matematică*, a fost închinată comemorării centenarului Artileriei Române.

Au luat parte la şedinţă: 1°. Din partea comitetului comemorării centenarului Artileriei D-nii general de corp de Armată V. ATANASIU, Inspectorul Artileriei, generali de divizie GH. POTOPEANU, membru al Soc. *Gazeta Matematică*, N. STOENESCU şi generali de rezervă AL. RIZEANU şi I. P. GEORGESCU.

2°. Din partea societăţii *Gazeta Matematică* D-na GABRIELA ŢIŢEICA şi D-nii: I. S. ANTONIU, R. BĂDESCU, I. C. BUDEANU, GENERAL GH. BUICLIU, AL. D. BUNESCU, I. I. CHIŢULESCU, MAIOR ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE, N. I. GEORGESCU, COLONEL AL. GHIMUŞ, CĂPITAN C. IONESCU-ŢIU, COMANDOR I. LINTEŞ, GENERAL GH. I. LITEANU, MAIOR AD. MICLESCU, PROFESOR AL. PANTAZI, MAIOR I. M. POPESCU, AL. AL. ROŞU, G. D. SIMIONESCU, CĂPITAN A. STAN, AL. STOENESCU, D. V. STOICA, H. G. THEODORU, I. VARDALA şi COMANDOR GR. ZAPAN.

D-l PROF. AL. PANTAZI salută prezenţa în sânul *Gazetei Matematice* a membrilor comitetului de organizarea centenarului artileriei.

D-l G-L GH. BUICLIU arată legătura între *Gazeta Matematică* şi Artileria Română, prin cuvântarea publicată la pag. 201 din acest număr.

D-l G-L V. ATANASIU ţine cuvântarea de la pag. 205 din acest număr.

D-l G-L I. P. GEORGESCU aminteşte figura regretatului G-L TOMA GHENEA, care a inventat aparatul de ochire la tunurile de 75 m/m Md. 1904, aparat bazat pe proprietatea că *două unghiuri cu laturile perpendiculare şi de acelaşi sens, sunt egale.* Aceste aparate sunt şi azi în vigoare şi se întrebuinţează şi la alte tunuri.

D-sa a oferit din partea fostei soţii a generalului T. GHENEA, astăzi D-na LULI V. MICULESCU, suma de 5000 lei pentru a se da un premiu în memoria generalului T. GHENEA.

Şedinţa se închide la ora 18 de către D-l PROF. AL. PANTAZI, care mulţumeşte D-lui G-L V. ATANASIU şi comitetului organizator pentru oferirea medaliei comemorative şi a numerelor festive care vor fi păstrate la *Gazeta Matematică* ca un simbol nepreţuit.

b) Redacţionale

Numărul de faţă apare în 68 pagini graţie contribuţiei D-lui AD. GHEORGHIU, care s'a angajat să suporte costul imprimării numărului de pagini care depăşeşte numărul normal de 56 pagini lunare ale revistei.

c) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

A. ANGELESCU. Sur les polynomes orthogonaux en rapport avec d'autres polynomes. Cluj 1921.

GUSTAV ENESTRÖM. Verzeichniss der Schriften LEONARD EULERS. Erste Lieferung. Leipzig 1910.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1911. *Se dă un triunghiu* ABC. *Se duce o transversală oarecare* DE *care intercepteză pe laturile* AB *şi* AC *ale triunghiului, segmentele* AE *şi* AD *astfel că* $AE \cdot AD = C_t$. *Să se afle locul geometric al proiecţiunilor vârfurilor triunghiului* ABC *pe dreapta* DE *prelungită indefinit.*

AL. ROŞU.

Soluţia acestei probleme se cuprinde în soluţia, cazului mai general, dată la pag. 259 din acest număr problemei 5796, propusă de D-l Prof. M. GHERMĂNESCU.

După cum se arată în nota dela pag. 262 din acest număr, redacţia a primit dela D-l I. ST. TEODORESCU, o prea frumoasă soluţie şi generalizare a problemei 1911, cu câteva zile înainte de a apărea numărul în care a fost propusă problema 5796.

Pentru cazul particular al problemei 1911, D-l I. ST. TEODORESCU dă următoarea soluţie:

1°. *Podara punctului* A. Făcând $p = q = 0$ în ecuaţia (2) dela pag. 261 din acest număr se găseşte că proiecţia lui A pe DE descrie cuartica

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2,$$

care este o *lemniscată* cu punctul dublu în A. Tangentele în A la lemniscată sunt

$$ax + by = 0 \quad \text{şi} \quad ax - by = 0$$

care sunt perpendiculare respectiv pe AC şi AB.

Dacă unghiul A este drept, atunci

$$a = b = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

iperbola înfăşurată de DE este echilateră, iar proiecţia lui A pe DE descrie lemniscata lui BERNOULLI:

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{k^2}{2}(x^2 - y^2).$$

2°. *Podarele punctului* B *şi* C sunt cuartice bicirculare de forma (3) dela pag. 262 din acest număr, cu particularitatea că între p şi q avem relaţiile:

$$aq = \pm bp \quad \text{sau} \quad q = \pm p \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Notă. Problema 1911 a fost propusă în Vol. XVIII în numărul dela 15 Februarie 1913. De atunci s'au primit diferite soluţiuni bune, care au fost anunţate pe copertele volumelor arătate în parantezele dela finele numelor după cum urmează: M. GHERMĂNESCU (XXII, XXIV, XXVI); G. GRIGORESCU (XXV); EM. GRIGORESCU (XXVI); A. A. BUŞILĂ (XXXII); I. C. VASILIU (XXXVII); N. N. MIHĂILEANU (XXXVIII) şi E. WEGENER (Bucureşti).

G-L GH. B.

PROBLEMA 3950. *Să se arate că avem o egalitate de forma:*

$$\int_0^a e^{x^2} dx = \frac{\theta}{a}(e^{a^2} - 1)$$

pentru $a \geqslant 0$ *şi* $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$.

A. ANGELESCU.

Avem succesiv

$$\int_0^a e^{x^2} dx = \int_0^a \left(1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x + \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{a}\left[a^2 + \frac{a^4}{1!\,3} + \frac{a^6}{2!\,5} + \ldots + \frac{a^{2n+2}}{n!\,(2n+1)} + \ldots\right]$$

şi ţinând seamă că pentru $a \geqslant 0$ avem

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{a^{2n+2}}{(n+1)!} \leqslant \frac{a^{2n+2}}{n!\,(2n+1)} \leqslant \frac{a^{2n+2}}{(n+1)!}$$

în care, dacă facem $n = 0, 1, \ldots$ şi adunăm, găsim

$$\frac{1}{2}(e^{a^2} - 1) \leqslant a\int_0^a e^{x^2} dx < e^{a^2} - 1.$$

De aici se vede că dacă $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$ putem scrie egalitatea din enunț.

Mai general, dacă presupunem $\alpha > 0$, $a > 0$ și $m > 1$, avem o egalitate de forma

$$\int_0^{\alpha} a^{x^m}\,dx = \frac{\theta}{a^{m-1}\log a}\,(a^{\alpha^m} - 1)$$

pentru $\frac{1}{m} \leqslant \theta \leqslant 1$.

Soluția și generalizarea precedentă, este aceea pe care a dat-o D-l GH. TH. GHEORGHIU, când era student anul III la București.

Soluții analoage s'au primit dela D-nii P. I. GHIȘOIU (când era elev la Politehnica din București) și H. P. IONESCU (când era student).

D-l I. V. MĂTIEȘ a dat aceeași soluție plecând dela neegalitățile (1) și generalizarea

$$\int_a^b e^{x^2}\,dx = \frac{\theta}{b}\,(e^{b^2} - 1) - \frac{\theta}{a}\,(e^{a^2} - 1)$$

pentru $b - a \geqslant 0$ și $\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$.

PROBLEMA 4412. *Pentru ce arc diferența a două linii trigonometrice ale lui poate fi 2?*

I. IONESCU.

Soluția acestei probleme a fost dată complect de D-l P. P. DRĂGHICESCU, cu formarea, deslegarea și verificarea tuturor celor 56 ecuații algebrice sau trigonometrice pe care le comportă pentru arcele mai mici ca 2π. Soluția cerută ar ocupa un spațiu prea mare și de aceea o publicăm aci în rezumat.

Vom căuta numai arcele inferioare lui 2π care au două linii trigonometrice diferind cu 2, adică soluțiile următoarelor 30 ecuații trigonometrice:

$(1, 1')$ $\sin x - \cos x = \pm 2$; $(2, 2')$ $\sin x - \operatorname{tg} x = \pm 2$;
$(3, 3')$ $\sin x - \operatorname{cosec} x = \pm 2$; $(4, 4')$ $\sin x - \operatorname{cotg} x = \pm 2$;
$(5, 5')$ $\sin x - \sec x = \pm 2$; $(6, 6')$ $\operatorname{tg} x - \cos x = \pm 2$;
$(7, 7')$ $\operatorname{tg} x - \operatorname{cosec} x = \pm 2$; $(8, 8')$ $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \pm 2$;
$(9, 9')$ $\operatorname{tg} x - \sec x = \pm 2$; $(10, 10')$ $\cos x - \operatorname{cosec} x = \pm 2$;
$(11, 11')$ $\cos x - \operatorname{cotg} x = \pm 2$; $(12, 12)$ $\cos x - \sec x = \pm 2$;
$(13, 13')$ $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = \pm 2$; $(14, 14')$ $\operatorname{cosec} x - \sec x = \pm 2$;
$(15, 15')$ $\operatorname{cotg} x - \sec x = \pm 2$.

Ecuaţiile (1, 1′) nu au rădăcini căci sin$x$ şi cos$x$ sunt inferiori lui 1 în valoare absolută.

Ecuaţiile (2, 2′) se deduc una din alta înlocuind x cu $(-x)$. E deci destul a ne ocupa de ecuaţia

(2) $$\sin x - \operatorname{tg} x = 2.$$

Punem $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$ şi găsim $t^4 - 3t^3 - 1 = 0$. Derivata acestei ecuaţii are rădăcinile 0 şi 1,5; şirul lui ROLLE este $-\infty$; 0; 1, 5; $+\infty$. Rădăcinile ecuaţiei sunt

$$t = 0{,}71666\ldots \quad \text{şi} \quad t = 2{,}1070\ldots.$$

care ne dă:

$$x = 129^0 13' 15'' \quad \text{şi} \quad x = 288^0 34' 38'', 8.$$

Ecuaţia (2′) este transformata în $(-x)$ a lui (2) şi are rădăcinile:

$$x = 71^0 25' 21'', 2 \quad \text{şi} \quad x = 230^0 46' 45''.$$

Ecuaţia (11) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuaţiei (2) şi are rădăcinile:

$$x = 161^0 25' 21'', 2 \quad \text{şi} \quad x = 320^0 46' 45''.$$

Ecuaţia (11′) este transformata analoagă a ecuaţiei (2′) şi dă

$$x = 18^0 34' 38'', 8 \quad \text{şi} \quad x = 219^0 13' 15''.$$

Ecuaţia (3) se rezolvă uşor şi dă $\sin x = 1 - \sqrt{2}$, care dă:

$$x = 204^0 27' 49'', 2 \quad \text{şi} \quad x = 335^0 32' 10'', 8.$$

Ecuaţia (3′) este transformata în $(-x)$ a ecuaţiei (3) şi are rădăcinile:

$$x = 24^0 27' 49'', 2 \quad \text{şi} \quad x = 155^0 31' 10'', 8.$$

Ecuaţia (12) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuaţiei (3) şi are rădăcinile:

$$x = 114^0 27' 49'', 2 \quad \text{şi} \quad x = 245^0 32' 10'', 8.$$

Ecuația (12′) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuației (3) și are rădăcinile:

$$x = 65^0 32'10'',8 \quad \text{și} \quad x = 294^0 27'49'',2.$$

In ecuația (6) punem $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ și devine $t^4+2t^3+2t^2+2t-3=0$.

Derivata ei are singura rădăcină reală (-1) și deci șirul lui ROLLE este $-\infty; -1; +\infty$. Rădăcinile ecuației sunt $t=-1{,}9228$ și $t = 0{,}66521$ care dă soluțiile:

$$x = 67^0 15'50'' \quad \text{și} \quad x = 234^0 57'19'',8.$$

Ecuația (6′) este transformata în $(-x)$ a ecuației (6) și are rădăcinile:

$$x = 112^0 44'10'' \quad \text{și} \quad x = 305^0 2'40'',2.$$

Ecuația (4) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuației (6) cu rădăcinile:

$$x = 144^0 57'19'',8 \quad \text{și} \quad x = 337^0 15'50''.$$

Ecuația (4′) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuației (6′) și are rădăcinile:

$$x = 22^0 44'10'' \quad \text{și} \quad 215^0 2'40'',2.$$

Ecuația (5) se rezolvă punând $\sin x = t$ și devine:

$$t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 4t - 3 = 0.$$

Șirul lui STURM este $(t^4-4t^3+3t^2+4t-3)$; $(2t^3-6t^2+3t+2)$; $(3t^2-9t+4)$; $(-t-6)$; (0). Pentru $t=-1$, șirul are 3 variații, pentru $t=0$ are două și pentru $t=1$ are o variație. Ecuația are deci două rădăcini între -1 și $+1$, una negativă și alta pozitivă. Aceste rădăcini sunt $t=-0{,}94040\ldots$, $t=0{,}66348$ și dă rădăcinile

$$x = 138^0 26'4'',8 \quad \text{și} \quad x = 250^0 7'.$$

Ecuația (5′) este transformata în $(\pi + x)$ a ecuației (5) și are rădăcinile

$$x = 70^0 7' \quad \text{și} \quad x = 318^0 26'4'',8.$$

Ecuaţia (10) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuaţiei (5) şi are rădăcinile:

$$x = 133^0 53' \quad \text{şi} \quad x = 311^0 33' 55'', 2.$$

Ecuaţia (10′) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuaţiei (5′) şi are rădăcinile:

$$x = 19^0 53' \quad \text{şi} \quad x = 131^0 26' 4'', 8.$$

Ecuaţia (7) se rezolvă punând $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$ şi ne dă

$$t^4 + 4t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0.$$

Şirul lui STURM este $(t^4+4t^3+4t^2-4t-1)$, (t^3+3t^2-2t-1); (t^2+5t); $(-12t+1)$; (20). Deci ecuaţia are două rădăcini reale între 0 şi 1 care sunt: $t = 0{,}21360\ldots$ şi $t = 0{,}72467$. Se deduc rădăcinile:

$$x = 71^0 51' 34'', 2 \quad \text{şi} \quad x = 335^0 53' 7'', 8.$$

Ecuaţia (7′) este transformata în $(-x)$ a ecuaţiei (7) şi are rădăcinile:

$$x = 24^0 2' 52'', 2 \quad , \quad x = 288^0 8' 25'', 8.$$

Ecuaţia (15) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuaţiei (7) şi are rădăcinile:

$$x = 18^0 8' 25'', 8 \quad \text{şi} \quad x = 114^0 6' 52'', 2.$$

Ecuaţia (15′) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuaţiei (7′) şi are rădăcinile:

$$x = 60^0 53' 7'', 8 \quad \text{şi} \quad x = 161^0 51' 34'', 2.$$

Ecuaţia (9) dă $\sin x = 1$ şi $\sin x = -0{,}6$. Prima nu este admisibilă căci $lim\,(\sin x - 1)/\cos x = 0$ pentru $x = \frac{1}{2}\pi$. A doua valoare dă soluţia:

$$x = 216^0 52' 10'', 6.$$

Ecuaţia (9′) este transformata în $(\pi - x)$ a ecuaţiei (9) şi are rădăcina:

$$x = 323^0 7' 49'', 4.$$

Ecuaţia (13) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuaţiei (9) şi are rădăcina:

$$x = 126^0 52' 10'', 6.$$

Ecuaţia (13′) este transformata în $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ a ecuaţiei (9′) şi are rădăcina:

$$x = 233^0 7' 44'', 4.$$

Ecuaţia (8) dă $\operatorname{tg} x = 1 \pm \sqrt{2}$ de unde se deduce imediat:

$$x = 67^0 30' \quad \text{şi} \quad x = 247^0 30'$$

$$x = 157^0 30' \quad \text{şi} \quad x = 337^0 30'.$$

Ecuaţia (8′) este transformata în $(-x)$ sau $(\pi - x)$ a ecuaţiei (8′) şi are rădăcinile:

$$x = 22^0 30' \quad \text{şi} \quad x = 202^0 30'$$

$$x = 112^0 30' \quad \text{şi} \quad x = 252^0 30'.$$

Ecuaţia (14), devine punând $\sin x = t$,

$$4t^4 - 4t^3 - 2t^2 + 4t - 1 = 0.$$

Şirul lui STURM este $(4t^4 - 4t^3 - 2t^2 + 4t - 1)$; $(4t^3 - 3t^2 - t + 1)$; $(7t^2 - 11t + 3)$; $(-122t - 5)$; < 0. Ecuaţia are o rădăcină pozitivă şi una negativă, între -1 şi $+1$, şi cum $t = 0{,}94502$ şi $t = 0{,}32699$, la care corespund rădăcinile:

$$x = 19^0 5' 10'', 7 \quad \text{şi} \quad 250^0 54' 43''.$$

Ecuaţia (14′) este transformata în $(\pi + x)$ a ecuaţiei (14) şi dă soluţiile:

$$x = 70^0 54' 45'' \quad \text{şi} \quad x = 199^0 5' 10'', 7.$$

S'au găsit astfel 56 arce sub 2π, care îndeplinesc condiţia cerută.

PROBLEMA 5247. *In triunghiul* ABC, *fie* A'B'C' *triunghiul median,* H *ortocentrul,* AA_1 *şi* AA_2 *respectiv bisectoarele interioară şi exterioară,* M *mijlocul segmentului* AH; *apoi* D_1 *şi* D_2 *punctele unde bisectoarele* AA_1 *şi* AA_2 *taie pe* B'C'. *Să se arate că:*

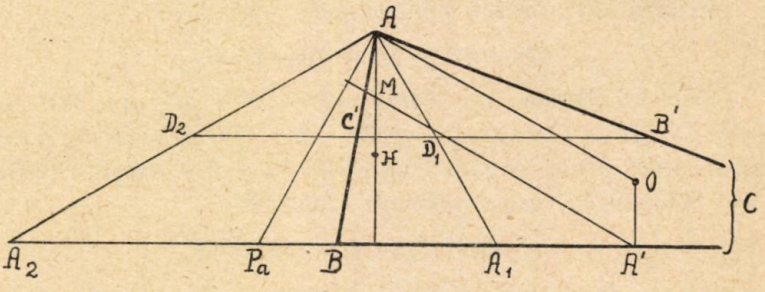
1°. *Perpendicularele ridicate în* D_1 *pe* AA_1, *în* D_2 *pe* AA_2 *şi perpendiculara din* A *pe* A'M, *se taie într'un punct* P_a, *pe latura* BC.

2°. P_b, P_c *fiind analoagele lui* P_a, *punctele* P_a, P_b, P_c *sunt în linie dreaptă.*

HORIA M. BODNĂRESCU.

Soluţie dată de D-nii: MIREL D. STOENESCU (Şc. of. aviaţie), MIRCEA D. POPA, AUREL N. POPA, PANTELIMON CONSTANTIN, PAUL P. DRĂGHICESCU (elevi lic. mil., Iaşi).

1°. Dreapta B'C' trecând prin mijlocul laturilor AB, AC, va trece şi prin mijloacele segmentelor $\overline{AA_1}$ şi $\overline{AA_2}$, care sunt punctele D_1 şi D_2 din enunţ. De altă parte cele două bisectoare sunt perpendiculare, încât triunghiul AA_1A_2 este dreptunghic, astfel că ducând perpendicularele în D_1 şi D_2 respectiv pe AA_1 şi AA_2, ele sunt paralele cu AA_2 şi AA_1, adică se formează triunghiul complementar $D_1D_2P_a$. Rămâne să arătăm că AP_a este perpendiculară pe A'M.



Fie O centrul cercului circumscris. Se ştie că $\overline{OA'} = \frac{\overline{AH}}{2} = \overline{AM}$, aşa că A'M este paralelă cu raza OA. Se mai ştie de asemenea că cercul A_1AA_2 este ortogonal cercului circumscris, deci AP_a este tangentă cercului circumscris, adică este *simediana exterioară.*

De altfel se demonstrează uşor observând că în triunghiul isoscel $P_a AA_1$ avem: $\sphericalangle P_a AA_1 = \sphericalangle AA_1 P_a = C + \frac{A}{2}$ (unghiu exterior tr. $AA_1 C$). Apoi $\sphericalangle P_a AB = \sphericalangle P_a AA_1 - \sphericalangle BAA_1 = C + \frac{A}{2} - \frac{A}{2} = C$, deci $A P_a$ este tangentă cercului ABC şi în consecinţă perpendiculară pe raza AO, deci pe A'M.

2°. Punctele P_a, P_b, P_c fiind picioarele simedianelor exterioare, ele sunt în linie dreaptă (dreapta lui LEMOINE).

G. D. S.

PROBLEMA 5302. *Problemă investigativă. Să se studieze geometriceşte ogiva echilaterală, adică figura triunghiulară cu o latură rectilinie şi celelalte două, arce de cerc descrise din vârfurile acelei laturi luate drept centre cu lungimea ei ca raze.*

I. IONESCU.

Denumiri. Baza ogivei. Latura rectilinie a ogivei AB se numeşte baza ei şi o vom însemna cu *l*. Mijlocul ei este *centrul* O al ogivei. Vârful V opus acestei laturi se numeşte *vârful ogivei.* El este intersecţia arcelor de cerc laterale ale ogivei. Unghiul de întâlnire al acestor două arce de cerc este de 90°. Dreapta care uneşte centrul O cu vârful V este *axa ogivei.*

Aria ogivei. Este egală cu sectoarele de cerc cu centrele în A şi B şi arcele BC şi AC micşorate cu triunghiul echilateral ABC, adică:

$$S = \frac{2\pi l^2}{6} - \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$

Perimetrul ogivei. Se compune din baza *l* şi din două arce de cerc laterale care face o treime din cerc, deci:

$$p = l + \frac{2\pi l}{3} = \frac{l(2\pi + 3)}{3}.$$

Proprietăţile enumerate până aci au fost date de D-nii I. A. BADEA, D. D. BOIANGIU, S. GAICU, P. P. DRĂGHICESCU.

S'au mai dat proprietăţile următoare:

1) Suma unghiurilor ogivei este 300° (P. P. DRĂGHICESCU).

2) Medianele AA', BB' sunt şi înălţimi căci taie ortogonal arcele opuse (P. P. DRĂGHICESCU).

3) Aria unei lunule cuprinse între cercul circumscris ogivei şi o latură curbă a ei este $\frac{l^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}$ (P. P. DRĂGHICESCU). Raza cercului înscris în ogivă este $\frac{3l}{8}$ (P. P. DRĂGHICESCU).

4) Raza cercului circumscris ogivei este $\frac{l\sqrt{3}}{3}$ (P. P. DRĂGHICESCU).

PROBLEMA 5626. *Să se afle valoarea expresiei*

$$E \equiv \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \quad \textit{pentru}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-(b+c)^2}}{b+c}; \; y = \frac{b \pm \sqrt{b^2-(c+a)^2}}{c+a}; \; z = \frac{c \pm \sqrt{c^2-(a+b)^2}}{a+b}$$

I. I. STAMATE.

Soluţia I-a dată de D-nii: C. D. EFTIMIE (elev inginer, Bucureşti), CPT. EUG. ŞT. IACOB, SLT. AV. MIREL D. STOENESCU (Bucureşti), EUGEN WEGENER (bacalaureat, Bucureşti), SEVER N. TRESTIANU (liceul „Mihai Viteazul" Buc.), IOAN N. GLIGOR (Aliuş), DORU MUSCELEANU (liceul Caracal), PETRE F. IONESCU (elev particular, Craiova), OCTAV C. GHEORGHIU, MIRCEA C. MANOLACHE (liceul internat, Iaşi), AUREL H. CUBAT, GEORGE GH. DONŢU (elevi liceul de Aplicaţie, Iaşi), P. P. DRĂGHICESCU, AUREL GH. ANDREI, N. GANEA, TIBERIU D. TURCULEŢ (elevi liceul militar Iaşi), DAN AL. VOLANSCHI, VICTOR VULCAN, PETRE D. COLUMBEANU, MARIUS GHEORGHIU, VLAD GH. JURIST, C. C. ILIESCU, ALEX. C. NICOLAE (elevi „Colegiul N. Filipescu"), NICOLAE V. IONESCU (liceul „Radu Greceanu", Slatina), C. BAKONYI (Timişoara), IOAN D. PÂRVAN, IOAN M. STANCU (elevi liceul militar, Timişoara), Subloc. M. VASILESCU-STABU.

Inlocuind valoarea lui x avem:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{a-b-c \pm \sqrt{a^2-(b+c)^2}}{a+b+c \pm \sqrt{a^2-(b+c)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a-b-c}\,(\sqrt{a-b-c} \pm \sqrt{a+b+c})}{\sqrt{a+b+c}\,(\sqrt{a+b+c} \pm \sqrt{a-b-c})}.$$

Semnele din paranteze se corespund la numărător şi numitor. Dacă luăm (+) raportul expresiilor închise în paranteză este 1, când luăm semnul (−1) raportul este (−1). Deci

$$\frac{x-1}{x+1} = \pm\sqrt{\frac{a-b-c}{a+b+c}} \quad \text{şi} \quad \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \frac{a-b-c}{a+b+c}.$$

Expresiile analoage se obţin prin permutări circulare ale literelor a, b, c. Expresia dată devine:

$$E \equiv \Sigma \frac{a-b-c}{a+b+c} = -\frac{a+b+c}{a+b+c} = -1.$$

Soluţia II-a dată de D-nii: PANTELIMON CONSTANTIN (Şc. of. art. antiaeriană Bucureşti), MARCEL D. COTARIU (Brăila), ALDEA V. MINEA (student-inginer, Buzău), GEORGE M. NICOLAE (colegiul „Carol I" Craiova), MARIN GH. POPESCU (cl. VIII liceul „Brătianu", Piteşti), TRAIAN N. CĂTUNEANU (liceul „Petru şi Pavel", Ploeşti), CORNELIU V. DAMIAN, CONST. GUŢU (elevi liceul militar Cernăuţi), C. STAICU (cl. VI), LUCIAN I. PLEŞU (cl. VII), ADRIAN I. GH. POPESCU (elev-inginer, Timişoara), V. D. PĂLĂCEANU (liceul militar, Timişoara).

Cele două valori ale lui x, date prin enunţ, sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$(b+c)\,x^2 - 2ax + (b+c) = 0.$$

Deducem $x^2 + 1 = \dfrac{2ax}{b+c}$ şi atunci putem scrie

$$E \equiv \Sigma \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \Sigma \frac{x^2+1-2x}{x^2+1+2x} = \Sigma \frac{\dfrac{2ax}{b+c} - 2x}{\dfrac{2ax}{b+c} + 2x} = \Sigma \frac{a-b-c}{a+b+c}$$

însă $\Sigma \dfrac{a-b-c}{a+b+c} = -\dfrac{a+b+c}{a+b+c} = -1$, deci $E = -1$.

Observaţii. 1°. S'a primit o soluţie cu calculul bine condus, dar în care s'a pus $b + c = a \sin \alpha$, ceea ce nu e totdeauna posibil căci se poate ca $\dfrac{b+c}{a} > 1$.

2°. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu iar x, y, z au formele din enunţ, numai cu semnul + înaintea radicalilor, atunci

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = -\frac{p^2+2Rr+r^2}{4p^2}$$

p, R, r fiind elementele triunghiului... Aceasta formează obiectul problemei 1991, propusă tot de D-l I. I. STAMATE la pag. 112, Vol. XXI, *Revista Matematică din Timişoara.*

G. D. S.

PROBLEMA 5630. *Pentru tipărirea a 1000 de exemplare din broşura „Maxime şi minime geometrice", apărută în „Biblioteca Matematică* GEORGE ŢIŢEICA*" Nr. 1, Tipografia „Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului" a prezentat o factură din care extrag următoarele:*

Tipăritul a 172 pagini pe costul de 3400 de lei de coală de 16 pagini. Pentru culesul formulelor supliment total de 3080 de lei; pentru clişeele figurilor 14680 lei, în total. In plus impozitul de 4% la valoarea totală sporită la prima sută de lei peste valoarea facturii, în total 2572 lei impozite. Pentru legatul volumelor 10000 lei.

Regulamentul fondului cerea ca broşurile să nu întreacă 100 de pagini. Din broşură primele 6 pagini conţin titlul şi prefaţa, iar ultimele 5 pagini Tabla numelor şi Tabla de materii.

In aceste condiţiuni să se calculeze care este partea din valoarea totală de 66882 lei care revine fondului şi care este partea ce rămâne în sarcina autorului pentru depăşirea numărului regulamentar de pagini.

ION IONESCU.

Soluţie dată de P. P. DRĂGHICESCU, (Bacalaureat, Liceul Militar Iaşi).

Presupunem că figurile şi formele sunt repartizate în mod egal prin textul broşurii.

In aceste condiţiuni pentru o pagină se plăteşte $3400/16 = 212{,}50$ lei pentru tipărit. Broşura conţine $(172 - 6 - 5) = 161$ pagini de text matematic. Să presupunem că formulele şi figurile sunt repartizate în mod egal prin textul broşurii. Atunci, pentru formule revine la o pagină $3080/161 = 19{,}13$ lei pentru o pagină în mediu, iar pentru clişeele figurilor $14680/161 = 91{,}18$ lei de pagină, în mediu.

Numărul paginelor de text matematic ce revine fondului este $100 - 6 - 5 = 89$ iar autorului 72. Va trebui deci plătit din fond:

$$100 \times 212{,}50 + 89 \times 19{,}13 + 89 \times 91{,}18 =$$
$$15300 + 1377{,}36 + 6564{,}96 = 31067{,}59 \text{ lei};$$

iar autorului îi revine:

$$72 \times 212{,}50 + 72 \times 19{,}13 + 72 \times 91{,}18 =$$
$$15300 + 1377{,}36 + 6564{,}96 = 23242{,}32 \text{ lei}.$$

Legatul volumelor, 10 000 lei se plăteşte din fond, căci acest cost nu depinde de o mică diferenţă în numărul paginelor broşurii. Deci suma ce revine fondului este 31 067,50 + 10 000 = 41 067,59 lei.

Impozitul de 4% asupra sumelor cuvenite fondului se aplică la suma de 41 100, prima sută ce trece peste costul găsit mai înainte 1 644 lei iar autorului 4% la suma de 23 300, care face 932 lei. Deci fondul va suporta în total 41 067,59 + 1 644 = 42 711,59 lei iar autorul 23 242,32 + 932 = 24 174 lei.

Totalul sumelor de mai sus nu corespunde cu valoarea facturii, deoarece impozitul aplicat la suma totală este mai mare ca suma impozitelor la sumele parţiale.

Notă. O soluţie foarte bună cu o interpretare puţin diferită a fost dată de D-l VASILE D. PĂLĂCEANU (Şcoala militară, Timişoara). D-sa a semnalat nepotrivirea dintre suma cheltuită şi valoarea facturii şi a atribuit diferenţa unei erori. In adevăr, în loc de 66 882, trebuia pus 66 842.

Au mai trimes soluţii cu alte interpretări CLAUDIU SENI (elev inginer), AUREL H. CUBAT (Liceul de Aplicaţii, Iaşi).

PROBLEMA 5776. *Dacă medianele unui triunghiu verifică relaţia*

$$m_a^2 = m_b^2 + m_c^2,$$

iar laturile a, b, c sunt numere întregi, atunci

$$b + 2c = \mathcal{M}5 \quad , \quad 2b - c = \mathcal{M}5.$$

G. G. CONSTANTINESCU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU. Cum

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \ldots$$

relaţia între mediane se transformă în următoarea

$$b^2 + c^2 = 5a^2$$

care scrisă sub forma

$$4c^2 - b^2 = 5(c^2 - a^2)$$

arată că unul din factorii primului membru $2c - b$ sau $2c + b$ este divizibil prin 5.

Dacă admitem

$$2c + b = \mathcal{M}_5$$

atunci

$$2(2c + b) = 2b - c + 5c = \mathcal{M}_5$$

deci şi

$$2b - c = \mathcal{M}_5$$

invederând proprietatea.

Dacă însă admitem

$$2c - b = \mathcal{M}_5$$

atunci

$$2(2c - b) = 5c - (2b - c) = \mathcal{M}_5$$

astfel că $2b - c$ e divizibil prin 5 şi deci avem conform celor de mai sus

$$b + 2c = \mathcal{M}_5$$

invederând proprietatea enunţului şi în a doua ipoteză.

Observare. 1°. Problema se poate rezolva, considerând soluţiile ecuaţiei nedeterminate $b^2 + c^2 = 5a^2$, anume

$$a = p^2 + q^2 \quad , \quad b = 2(p^2 - pq - q^2) \quad , \quad c = q^2 - p^2 - 4pq$$

sau $$b = q^2 - p^2 - 4pq \quad , \quad c = 2(p^2 - pq - q^2).$$

2°. Au mai rezolvat problema, D-nii: MIRCEA BÂRZESCU, JOHANNES MAHRENHOLZ, D. NACHE, G. M. NICOLAE, V. D. PĂLĂCEANU şi A. N. L. PITIŞ.

PROBLEMA 5790. *Să se găsească numărul* n *astfel încât să avem:*

$$P_{12}(35) = P_n(35) \cdot P_{12-n}(35) \cdot R$$

unde $P_x(y)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* y *din şirul natural al numerelor până la* x, *iar* R *un număr întreg.*

COMANDOR I. LINTEŞ.

Ştim că:

$$P_{12}(35) = \frac{12!\, E\left(\frac{12}{5.7}\right)!\, \Pi(5.7)^{E\left(\frac{12}{5.7}\right)}}{E\left(\frac{12}{5}\right)!\, E\left(\frac{12}{7}\right)!\, 5^{E\left(\frac{12}{5}\right)} \cdot 7^{E\left(\frac{12}{7}\right)}} = \frac{12!}{2!\, 5^2 \cdot 7} = 2^9 \cdot 3^5 \cdot 11.$$

Apoi analog deducem că:

$$P_{11}(35) = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 11 \quad , \quad P_6(35) = 2^4 \cdot 3^2$$
$$P_{10}(35) = 2^7 \cdot 3^4 \quad , \quad P_5(35) = 2^3 \cdot 3$$
$$P_9(35) = 2^7 \cdot 3^4 \quad , \quad P_4(35) = 2^3 \cdot 3$$
$$P_8(35) = 2^7 \cdot 3^2 \quad , \quad P_3(35) = 2 \cdot 3$$
$$P_7(35) = 2^4 \cdot 3^2 \quad , \quad P_2(35) = 2$$
$$P_1(35) = 1.$$

Făcând pe rând $n = 1, 2, 3 \ldots 11$, avem:

n	1; 11	2; 10	3; 9	4; 8	5; 7	6
R	$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 11$	$2 \cdot 11$	—	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$	$2 \cdot 3 \cdot 11$

Aşa dar nu avem soluţie decât pentru $n = 4$ sau 8.

A rezolvat bine problema D-l P. D. COLUMBEANU. D-l P. P. DRĂGHICESCU a raţionat bine, dar a plecat dela egalitatea: $P_1(35) = 0$, care nu este adevărată.

I. L.

PROBLEMA 5796. *O transversală variabilă taie laturile* AB, AC *ale unui triunghiu* ABC *în punctele* D, E, *astfel ca* $\overline{AD}.\overline{AE} = const.$ *Se cere locul proiecţiei unui punct fix* P *din plan pe transversala* DE.

Caz particular, problema 1911.

M. GHERMĂNESCU.

I. Luăm ca axă Ox bisectoarea interioară a unghiului A, îndreptată spre latura opusă, iar ca axă Oy bisectoarea exterioară a aceluiaşi unghiu, îndreptată spre partea unde se află vârful C. Dacă însemnăm $AB = \lambda$, $AC = \mu$, ca lungimi, avem $\lambda\mu = k^2$, apoi

$$D\left(\lambda \cos\frac{A}{2}, -\lambda \sin\frac{A}{2}\right), \quad E\left(\mu \cos\frac{A}{2}, \mu \sin\frac{A}{2}\right),$$

astfel că ecuaţiile dreptei DE şi a perpendicularei din $P(u, v)$ pe ea sunt respectiv

$$(1) \qquad \frac{x - \lambda\cos\frac{A}{2}}{(\mu - \lambda)\cos\frac{A}{2}} = \frac{y + \lambda \sin\frac{A}{2}}{(\mu + \lambda)\sin\frac{A}{2}},$$

$$(2) \qquad \frac{x - u}{(\lambda + \mu)\sin\frac{A}{2}} = \frac{y - v}{(\lambda - \mu)\cos\frac{A}{2}}.$$

Locul geometric al piciorului perpendicularei duse din P pe dreapta DE se obține eliminând λ și μ între ecuațiile precedente și $\lambda\mu = k^2$.

Inmulțindu-le membru cu membru, obținem

$$(3)\quad x^2+y^2-ux-vy=\lambda\left[(x-u)\cos\frac{A}{2}-(y-v)\sin\frac{A}{2}\right].$$

De altă parte, (2) devine, cu $\mu=\frac{k^2}{\lambda}$,

$$\left[(x-u)\cos\frac{A}{2}-(y-v)\sin\frac{A}{2}\right]\lambda^2=k^2\left[(x-u)\cos\frac{A}{2}+(y-v)\sin\frac{A}{2}\right]$$

sau încă, introducând valoarea lui λ, scoasă din (3),

$$f(x,y)=(x^2+y^2-ux-vy)^2-k^2\left[(x-u)^2\cos^2\frac{A}{2}-(y-v)^2\sin^2\frac{A}{2}\right]=0,$$

care reprezintă o cuartică bicirculară ce trece prin P (u, v), care este de altfel un punct dublu al curbei, căci avem și $f'_x(u, v) = 0$, $f'_y(u, v) = 0$.

In acest caz, ne reamintim un frumos rezultat, demonstrat de D. PROF. GH. TH. GHEORGHIU [1]), care arată că pentru ca o cuartică să fie podara unei conice în raport cu un punct dat, este necesar ca punctul să fie dublu pentru cuartică, iar aceasta trebue să fie bicirculară.

Efectuând calculele indicate de D-l GH. TH. GHEORGHIU, găsim că cuartica de mai sus este podara în raport cu P a unei iperbole ce are dreptele AB, AC ca asimptote.

Când P este în unul din vârfurile triunghiului, suntem în cazul particular al problemei 1911, a cărei soluție se publică la pag. 245 din acest număr.

II. *Soluție* dată de D. I. ST. TEODORESCU (Ploești).

Fie T, mijlocul segmentului DE, prin care ducem paralele TF și TQ la laturile unghiului A. Punem $AD = 2x$, $AE = 2y$ și avem relația

$$TF \cdot TQ = \frac{AD}{2}\cdot\frac{AE}{2}=\frac{k^2}{4} \qquad \text{sau} \qquad x.y=\frac{k^2}{4}.$$

---

1) *Gazeta Matematică*, XXXVIII, 1932 — 1933, p. 452.

Ceea ce ne arată că, dacă laturile unghiului A sunt luate ca axe de coordonate, atunci punctul T (x, y) descrie o iperbolă cu aceste laturi ca asimptote. De asemenea secanta DE cu mijlocul ei T rămâne tangentă acestei iperbole. T fiind punctul de contact.

Ajungem la concluzia că secanta DE înfăşoară o iperbolă cu laturile AD şi AE ca asimptote.

Dacă (p, q) este punctul P din planul unei curbe (C), atunci ducând din acest punct perpendiculare pe tangentele la curba (C), locul geometric al picioarelor acestor perpendiculare este curba podară, curbei (C).

In particular, locul proiecţiei unuia din vârfurile A, B, C pe dreapta DE este podara acestui vârf faţă de o iperbolă.

Dacă luăm ca axe de coordonate bisectoarele unghiului A, şi anume bisectoarea interioară ca axă transversă, atunci iperbola înfăşurată de secanta DE are ca ecuaţie

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Semiaxele a, b se determină imediat; deoarece pentru poziţia secantei DE astfel ca:

$$AD' = AE' = k$$

avem vârful T' al iperbolei, precum şi

$$a = \overline{AT'} = k \cdot \cos\frac{A}{2} \quad , \quad b = \overline{T'D'} = k \cdot \sin\frac{A}{2} .$$

Să căutăm acum ecuaţia curbei podare a punctului P (p, q).

Pentru aceasta scriem ecuaţia tangentei la iperbola (I) într'un punct T (x_0, y_0) al ei precum şi a perpendicularei dusă din P pe tangentă. Avem respectiv

$$b^2 x\, x_0 - a^2 \cdot y \cdot y_0 = a^2 b^2$$

$$b^2 x_0 (y-q) + a^2 y_0 (x-p) = 0.$$

Rezolvim acest sistem de ecuaţii în raport cu x_0, y_0 şi găsim

$$x_0 = a^2 \frac{x-p}{x(x-p) + y(y-q)} \quad , \quad y_0 = -b^2 \frac{y-q}{x(x-p) + y(y-q)}$$

iar dacă scriem că aceste coordonate satisfac ecuaţia iperbolei I, vom avea ecuaţia curbei podare căutate

$$(2) \quad a^2 (x-p)^2 - b^2 (y-q)^2 = [x(x-p) + y(y-q)]^2.$$

Să transportăm paralel cu ele, axele de coordonate în punctul P (p, q). Ecuaţia faţă de axele PX, PY are forma

$$(3) \qquad (X^2 + Y^2 + pX + qY)^2 = a^2 X^2 - b^2 Y^2$$

de unde se vede că este o cuartică bicirculară cu P ca punct dublu.

Notă 1°. D-l E. N. WEGENER (Bucureşti) a dat o bună soluţie analitică luând ca axe latura BC şi înălţimea AD şi găsind ecuaţia locului sub forma $[a(y-\beta)-(x^2+y^2-\alpha x-\beta y)]^2 = k[a(y-\beta)+b(\alpha-x)][a(y-\beta)+c(\alpha-x)]$ unde α,β sunt cordonatele lui P.

2°. Problema 5796 a fost propusă, după cum uşor se vede din enunţul său, pentru a provoca soluţii la problema 1911, care aşteaptă de treizeci de ani să fie publicată. O coincidenţă a făcut ca, cu câteva zile înainte de a apare Nr. din Mai 1943, în care era propusă problema 5796, să parvină redacţiei eleganta generalizare dată problemei 1911 de D-l I. ST. TEODORESCU, care constitue în acelaşi timp o rezolvare a problemei 5796. De aceea, o şi publicăm aci. Este evident că pentru rezolvarea problemei 5796 nu era nevoe să se ştie că dreapta DE înfăşură o iperbolă, după cum se vede din prima soluţie, însă soluţia D-lui I. ST. TEODORESCU aduce precizări care duc direct la proprietatea fundamentală a ecuaţiei-loc geometric, ceea ce nu este de prisos.

3°. Faptul că DE înfăşură o iperbolă cu asimptotele AB, AC se poate dovedi şi în felul următor: relaţia AD . AE = const. arată o corespondenţă omografică între punctele D şi E deci, după o teoremă cunoscută, dreapta DE înfăşură o conică. Când D vine în A, pe AB, E este aruncat la infinit pe AC, iar când E vine în A, pe AC, D este aruncat la infinit pe AB, deci conica este tangentă la infinit dreptelor AB, AC, adică este o iperbolă cu dreptele de mai sus ca asimptote.

M. G.

PROBLEMA 5802. *Să se arate că numărul numerelor prime cu* N, *din şirul numerelor: 1, 2, 3, ...,* N^m, *este egal cu indicatorul lui* N^m.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, V. D. PĂLĂCEANU (lic. militar, Iaşi), A. L. PITIŞ şi G. G. VRÂNCEANU (lic. militar, Timişoara).

Prin definiţie indicatorul lui N^m este egal cu numărul numerelor prime cu N^m din şirul numerelor: 1, 2, 3, ..., N^m.

Aceste numere fiind prime cu N^m sunt prime şi cu N, iar celelalte numere, neprime cu N^m, nu pot să fie prime cu N, pentrucă N^m şi N au aceiaşi factori primi.

Egalitatea din problemă este deci evidentă.

EXERCIŢII

11. Să se demonstreze, că oricare ar fi numerele reale a, b, c, d există neegalitatea:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+dc)^2 > (a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)^2.$$

Să se generalizeze.

T. STOICESCU.

R. Desvoltând patratul din membrul I al inegalităţii în mod convenabil şi trecând totul în partea întâia, găsim:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+2(a^2+b^2+c^2+d^2)(ab+ac+ad+bc+bd+dc)+$$
$$+(ab+bc+ac+ad+bd+dc)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)^2>0;$$

prin darea în factor comun a sumei

$$a^2+b^2+c^2+d^2,$$

avem:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)[a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+dc)-(a+b+c+d)^2]+$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+dc)^2>0,$$

ori, paranteza mare este nulă, astfel că rămâne:

$$(ab+ac+ad+bc+bd+dc)^2>0$$

lucru evident. Pentru generalizare, aceeaşi demonstraţie.

12. Să se rezolve ecuaţia

$$a(ax^4+cx^3)-(2ab+d)x^2-b(cx+b=0.$$

CĂP. E. ST. IACOB.

R. Avem succesiv

$$(ax^2-b)^2+cx(ax^2-b)-dx^2=0$$

$$\therefore \left(\frac{ax^2-b}{x}\right)^2+c\frac{ax^2-b}{x}-d=0.$$

$$\therefore \frac{ax^2-b}{x}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4d}}{2}$$

$$\therefore 2ax^2-2b=x(-c\pm\sqrt{c^2+4d})$$

care dă

$$x_{1,2}=\frac{-(c-\sqrt{c^2+4d})\pm\sqrt{(c-\sqrt{c^2+4d})^2+16ab}}{4a}$$

$$x_{3,4}=\frac{-(c-\sqrt{c^2+4d})\pm\sqrt{(c+\sqrt{c^2+4d})^2+16ab}}{4a}$$

13. Să se rezolve în numere întregi şi pozitive ecuaţia

$$x^2+y+z(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=2(13+\sqrt{21}).$$

CĂP. E. ST. IACOB.

R. Desvoltând şi egalând părţile raţionale, găsim

$$z=1 \quad \text{şi} \quad x^2+y+10z=26.$$

Inlocuind pe z în ultima şi rezolvând în raport cu x avem

$$x=\pm\sqrt{16-y}.$$

Luăm numai valorile pozitive şi găsim soluţiile

$$z=1 \; ; \; y=0,\ 7,\ 12,\ 15,\ 16 \quad \text{şi} \quad x=4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

PROBLEME PROPUSE

5875. Să se dea o soluţie aritmetică următoarei probleme cunoscute, din timpurile când sistemul monetar era al Uniunii latine:

„Unui funcţionar i se dă la permutarea dintr'un oraş la altul câte 16 bani de fiecare kilometru distanţă între punctul de plecare şi cel de sosire şi de fiecare membru al familiei care a trecut de 3 ani etate, dacă distanţa de mutare este mai mică decât 100 km şi câte 11 bani pentru fiecare km ce trece peste 100 km. La o permutare, când ultimul copil nu avea încă 3 ani, a luat 185 lei, iar în urmă, după ce acel copil a trecut peste 3 ani, şi pentru o distanţă cu 75 km mai mică, i s'a dat 190 lei. La ce distanţe a fost permutat în cele două rânduri şi câţi copii are, ştiind că soţia îi trăieşte".

I. IONESCU.

5876. Să se găsească un cub de zece cifre, a cărui primă cifră este 1, iar celelalte se împart, în ordinea în care sunt scrise, în trei grupe de câte trei, aşa fel ca unul din ele să fie egal cu suma celorlalte două.

M. GHERMĂNESCU.

5877. Să se rezolve în numere întregi sistemul

$$E\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \quad , \quad E\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 11,$$

unde $E(i)$ înseamnă întregii lui i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5878. Să se afle valoarea determinantului

$$D(N) = \begin{vmatrix} \varphi(d_1 d_1) & \varphi(d_2 d_1) & \varphi(d_3 d_1) \ldots \varphi(d_n d_1) \\ \varphi(d_1 d_2) & \varphi(d_2 d_2) & \varphi(d_3 d_2) \ldots \varphi(d_3 d_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(d_1 d_n) & \varphi(d_2 d_n) & \varphi(d_3 d_n) \ldots \varphi(d_n d_n) \end{vmatrix},$$

unde $\varphi(n)$ este indicatorul lui n, iar $d_1, d_2, \ldots d_n$ sunt divizorii aritmetici ai lui N.

IOAN B. FLORESCU.

5879. In cercul O se dau doi diametri perpendiculari AB, CD şi un punct oarecare M pe CD. Cercul este întâlnit în N de AM şi în E, F de perpendiculara în M pe AN. Fie H intersecţia lui CD cu AF şi I intersecţia cercului cu NH. Să se demonstreze că NBFI este trapez isoscel şi că EI este paralelă la CD.

G-L GH. BUICLIU.

5880. Dându-se în plan patru drepte neparalele câte două şi neconcurente câte trei, se cere:

a) Câte puncte există în planul dreptelor, astfel ca proiecţiile lor pe cele patru drepte să fie conciclice?

b) Să se găsească caracteristicele acestor cercuri şi să se dea proprietăţile punctelor ce satisfac problemei.

c) Cazuri particulare.

CPT. MIHAI I. FOCŞENEANU.

5881. Pe două drepte D şi D' se iau respectiv punctele fixe A şi B, apoi punctele variabile P şi Q. Fie M un punct al dreptei AB. Cercurile MAP şi MBQ întâlnesc a doua oară dreapta PQ respectiv în P' şi Q'. Să se găsească locul geometric al intersecţiei

dreptelor AP' şi BQ', atunci când unghiul PMQ rămâne constant şi se roteşte în jurul vârfului său M, iar acesta se mişcă pe dreapta AB. (Exemplu de existenţa unui loc geometric, deşi se dau două grade de libertate).

GH. D. SIMIONESCU.

5882. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC; α, β, γ proiecţiile punctului M pe laturile triunghiului, M_a, M_b, M_c punctele simetrice lui M faţă de aceleaşi laturi; fie D proiecţia lui M pe pe dreapta $\alpha\beta\gamma$, iar a, b, c punctele în care perpendicularele duse din M_a, M_b, M_c pe dreapta $\alpha\beta\gamma$ întâlnesc laturile BC, CA, AB. Dacă R este raza cercului ABC, să se demonstreze, că

$$\overline{Ma} \cdot \overline{Mb} \cdot \overline{Mc} = 4R^2 \cdot \overline{MD}$$

$$2R \cdot \overline{\alpha D} \cdot \overline{\beta D} \cdot \overline{\gamma D} = \overline{MD} \cdot \overline{\alpha a} \cdot \overline{\beta b} \cdot \overline{\gamma c}.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

5883. Dacă $A_1B_1C_1$ este triunghiul podar al unui punct M faţă de triunghiul ABC, să se demonstreze relaţia

$$4S^2 + \Sigma a^2 a_1^2 = 8S \cdot S_1 (\operatorname{cotg}\omega \cdot \operatorname{cotg}\omega_1 + 1),$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

ION C. VASILIU.

5884. Se consideră un triunghiu ABC şi o parabolă înscrisă. Fie R raza cercului circumscris triunghiului, F focarul, iar R_a raza de curbură a parabolei, în punctul de contact cu latura BC. Avem relaţia

$$R_a = 4R \cdot \frac{\overline{BF} \cdot \overline{CF}}{\overline{AF}^2}.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

5885. Se notează cu x numărul de ordine al literelor a, b,..., z din alfabet. Se cere să se descifreze textul

58.76.1.64.19.76 // 40.76.19.64.40.76.19.52.70.76
76.25.64 // 31.76.19.25.16. 1.64.70.52 22.52
34.31.19 67.64 76.37.52

în care numerele separate prin puncte, sunt valorile pe care le ia y din expresia

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{1} = \arccos [1 - 2(79 - x)^2],$$

când i se dau lui x diferite valori.

Punctele dintre numerele textului separă literele, iar numerele cu linie deasupra înseamnă litere mari.

AD. I. POPESCU.

5886. Intr'un triunghiu oarecare ABC, în care notaţiile sunt cele obişnuite, avem totdeauna relaţiile:

$$\frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\sin^3 \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos^3 \frac{B}{2}} = \frac{c^3}{r_a^3} \cos \frac{B-A}{2},$$

$$\frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin^3 \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{C-B}{2}}{\cos^3 \frac{B}{2}} - \frac{3}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \cdot \frac{c}{r_a} = \frac{c^3}{r_a^3} \sin \frac{B-A}{2}.$$

V. ALACI.

5887. Să se dovedească neegalitatea

$$2x \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \alpha \right) + L(1 + x^2) < 0$$

pentru $x > 0$ şi $\alpha > \frac{\pi}{2}$, arcele fiind în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, iar L fiind simbolul logaritmilor neperieni.

TH. ANGHELUŢĂ.

5888. Pe o masă orizontală, situată la înălţimea h deasupra solului, se află un corp A căruia i se imprimă *o iuţeală iniţială* orizontală v_0. Corpul străbate o distanţă $\overline{AB} = a$ cu *frecare de alunecare* (coeficient de frecare f) şi *loveşte* un alt corp B aflat în *repaos* pe marginea mesei, (coeficient de elasticitate în ciocnire k).

Cele două corpuri au aceeaşi *masă* şi pot fi asimilate unor puncte materiale.

Să se studieze mişcarea după ciocnire a celor două corpuri.

ALEXANDRU STOENESCU.

5889. Fie S aria unui poligon convex (P) cu $n(\geqq 3)$ laturi, S_1 aria poligonului având ca vârfuri mijloacele laturilor primului poligon, S_2 aria poligonului având ca vârfuri mijloacele laturilor poligonului al doilea, etc. Se pune

$$A_m^{(n)} = \min. \frac{S_m}{S} \quad , \quad B_m^{(n)} = \max. \frac{S_m}{S}$$

și se cere:

1°. Să se arate că pentru calcularea numerelor $A_m^{(n)}$, $B_m^{(n)}$ este suficient să considerăm numai poligoane (P) având numai trei vârfuri distincte și să se deducă de aici că aceste numere sunt pozitive.

2°. Să se găsească un procedeu pentru calcularea numerelor $A_m^{(n)}$, $B_m^{(n)}$ și să se arate că, în particular, avem:

$$A_m^{(m+1)} = \frac{1}{4^m}\left[\frac{1}{m+1}\binom{2m+2}{m} - 2m\right],$$

$$A_m^{(m+2)} = \frac{1}{4^m}\left[\frac{1}{m+1}\binom{2m+2}{m} - 1\right],$$

$$A_m^{(n)} = \frac{1}{4^m}\cdot\frac{1}{m+1}\binom{2m+2}{m} \quad ; \quad B_m^{(3n)} = \frac{4^m - 3}{4^m};$$

$$B_m^{(3m+2)} = \frac{4^m - 1}{4^m} \quad , \quad B_m^{(n)} = 1,$$

pentru $n > m+2$ respectiv $n > 3m+2$.

TIB. POPOVICIU.

ERATĂ. 1°. In enunțul problemei 5756, a cărei soluție s'a publicat la pag. 193 din numărul precedent, se va adăoga, după cuvântul *cercul* din rândul 4 de sus: *interior, care întâlnește cercul . . .*

2°. Exercițiului propus de D-l T. STOICESCU, la pag. 196 din numărul precedent i se va da numărul 10.

3°. Pag. 177 în primul rând după tabloul de discuție se înlocuește $64n$ prin n.

4°. In enunțul problemei 5865, propusă la pag. 198 în numărul precedent, se înlocuește AF cu AB.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andreescu M. (5543); *Barbu N. I.* (4550, 898, 5861, 70, 71); *Bârzescu M.* (5684, 832, 42); *Cubat H. A.* (5697); *Dimitriu D. Tigran* (5841); *Drăghicescu P. P.* (5865, 70); *Dumitrescu Tr.* (5684, 801, 17); *Enache I.* Subloc. (5801); *Gloden A.* (5826); *Grigore A. Gh.* (5842); *Ionescu F. P.* (5031, 632, 729); *Ionescu M. Corneliu* Subloc. (5801); *Manolache M.* (5825, 31, 32, 52); *Marinescu Emil* (5865, 71); *Miroslav T.* (5841, 42, 52); *Munteanu G. Lucian* (5760); *Nache D. D.* (5825); *Niculescu V. Gh.* Lt. C-dor (N); *Oprea D. Nifon* (5825); *Păläceanu D. V.* (5123, 206, 36, 76, 366, 92, 95, 610, 719, 24, 73, 801, 02, 13, 15, 25, 42); *Pantelimon C.* (5204, 47, 358, 610, 11, 57, 70, 84, 721, 30, 47, 54, 81, 86, 808, 65, 70, 71, E); *Popescu I. Barbu* (5801); *Popescu I. Gh.* G-l (A); *Staicu I. C.* (5801, 25, 49, 70); *Tigran D.* (5840); *Turcu R. Sandu* (5785, 865, 70); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4568, 76, 91, 5675, 91, 711, 29, 45, 47, 48, 83, 825, 45, P); *Vasiliu Gh. D.* (5434, 610, 20, 34, 97, 754, 65, 84, 852, 70); *Voinea P. R.* (5785, 804); *Vrânceanu Gh. Gh.* (5813, 25, 27, 40, 49, 69, 70, 71); *Wegener N. E.* (5343, 435, 64, 610, 16, 18, 75, 724, 805, 69, 70, 71).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ"

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică*. Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică*. Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 21.310

M2540

Biblioteca „ASTRA"
— SIBIU —

0 - MAR. 1944

22

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1944

SUMARUL

1. $\sqrt{2}$. . . . . *I. Ionescu.*
2. Configuraţia formată de paralelele duse printr'un punct la laturile unui triunghiu. *A. Dobrescu.*
3. O problemă de mecanică artileristică . *V. Vâlcovici.*
4. Raport pentru decernarea premiului „Nicolae G. Botea" . . . . . } *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 17 — 21.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 326.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2577, 2587, 3610, 4192, 5055, 5137, 5394, 5565, 5652, 5755, 5825, 5831.
11. Exerciţii: 14—15.
12. Probleme propuse: 5890 — 5904.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1944

74318

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 5837, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 5900, 01, 02, 03, 04.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Calcul diferenţial şi analitic* . . . . . „ 250

$\sqrt{2}$

Rădăcina patrată a lui 2 joacă un rol important în matematici încât merită să-şi aibă o monografie. Este sigur că 2 a fost primul număr căruia i s'a cerut cunoaşterea rădăcinii lui patrate, prin faptul că $\sqrt{2}$ este raportul dintre diagonala unui patrat şi latura acelui patrat. Acest raport nu se poate exprima prin o fracţie cu numărătorul şi numitorul numere întregi, ceea ce se poate dovedi uşor în felul următor. Fie m/n o fracţie ireductibilă care ar fi egală cu $\sqrt{2}$. Din relaţia:

$$m/n = \sqrt{2}$$

deducem, prin ridicare la patrat:

$$m^2 = 2n^2,$$

de unde se vede că m trebue să fie un număr pereche. Fracţia m/n fiind ireductibilă n trebue să fie un număr nepereche. Punând $m = 2p$ şi înlocuind, găsim:

$$2p^2 = n^2$$

relaţie imposibilă căci n este nepereche, $\sqrt{2}$ este deci un număr *incomensurabil* sau *iraţional* şi este de sigur primul număr de această categorie care a apărut în matematici. De altfel, geometrii găsiseră de mult că $\sqrt{2}$ este incomensurabil cu 1.

Fie patratul ABCD având AB = BC = CD = DA = 1, în care vom avea

$$AC = BD = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Fie E pe AC aşa că AE = AB = 1. Măsurăm acum pe BC cu EC luând pe CB lungimea

$$CF = CE = \sqrt{2} - 1.$$

Ne rămâne din BC lungimea

$$BF = 1 - (\sqrt{2} - 1) = (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1),$$

de unde rezultă că $BF/CF = \sqrt{2} = AC/AB$. Am ajuns la acelaşi raport de lungimi ca la începutul măsurării şi prin urmare măsurarea diagonalei cu unitatea de lungime nu se va termina niciodată

74318

pe calea măsurătorilor directe. Deci diagonala patratului este incomensurabilă cu latura lui. Este sigur că determinarea rădăcinii patrate a lui 2 a dus pentru prima dată la existența numerelor incomensurabile.

Incomensurabilitatea laturii și a diagonalei unui patrat se exprimă uneori și în felul următor: Fie patratul ABCD cu latura $AB = a$ și diagonala $AC = d$. Să presupunem că pe conturul patratului merge un mobil M cu o iuțeală constantă v și pe AC alt mobil N dela A la C și înapoi cu iuțeala v. Cele două mobile nu se vor întâlni niciodată în punctul C comun al drumurilor lor, căci M după m parcursuri parcurge un drum egal cu $4ma$, iar N după n dusuri și întoarceri drumul $2dn$. Raportul acestor două drumuri este $\frac{1}{2}\, d/a \,.\, (n/m)$ sau $(\sqrt{2}/2)\ (n/m)$ număr irațional nerealizabil.

Matematicienii vechi au căutat mijloace ca să găsească fracții din ce în ce mai apropiate de $\sqrt{2}$. Astfel o metodă este de a folosi mediile aritmetice care sunt mai mari la două numere ca mediile geometrice. Astfel $\sqrt{1.2}$ este cuprins între 1 și 2 căci patratul lui 2 este cuprins între 1^2 și $2^2 = 4$. Media aritmetică a acestor două numere 1 și 2 este 3/2 care este mai aproape de media geometrică a lor $\sqrt{2}$ decât 2. Deci 3/2 este o valoare apropiată a lui $\sqrt{2}$, mai mare ca acesta. Câtul lui 2 prin (3/2) adică 4/3 va fi o valoare apropiată mai mică, căci produsul lor este 2, prin urmare $\sqrt{2}$ este cuprins între 3/2 și 4/3. Media aritmetică a acestora, adică

$$\tfrac{1}{2}\,[(3/2) + (4/3)] = (17/12)$$

este o valoare apropiată a lui $\sqrt{2}$ cu spor, iar câtul

$$2 : (17/12) = (24/17)$$

este o valoare apropiată cu lipsă. Făcând calculele cu zecimale găsim că aceste două valori ale lui $\sqrt{2}$ sunt 1,416... și 1,411... Media aritmetică a acestor două valori e și mai apropiată; ea este

$$\tfrac{1}{2}\,[(17/12) + (24/17)] = 1{,}41412\ldots$$

Dacă se calculează $\sqrt{2}$ cu mai multe zecimale se găsește:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213156254\ldots$$

Prin căutare de mijloace de a găsi pe $\sqrt{2}$ s'a ajuns la *fracțiile continui*. $\sqrt{2}$ fiind cuprins între patratele 1 și 4, rădăcina

lui este cuprinsă între 1 şi 2. Să punem surplusul peste 1 sub forma unei fracţii pure $(1/x)$, deci:

$$\sqrt{2} = 1 + (1/x),$$

pe care ordonând-o după puterile lui x găsim:

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

de unde scoatem:

$$x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Rădăcina negativă nu convine. Inlocuind pe x în expresiunea lui $\sqrt{2}$, găsim:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Inlocuim pe $\sqrt{2}$ dela numitor cu valoarea lui dată de partea II a egalităţii şi găsim:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}}$$

Procedând la fel mai departe se ajunge la fracţia continuă egală cu $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}}$$

$\sqrt{2}$ se întâlneşte în multe chestiuni de matematici pure şi aplicate. Aşa de exemplu la problema celulelor albinelor se întâlneşte unghiul a cărui tangentă este $\sqrt{2}$. La teoria grinzilor cu zăbrele cu tălpile paralele, cu diagonale şi stâlpi verticali înclinarea cea mai economică a diagonalelor este *arctang.*$\sqrt{2}$ etc.

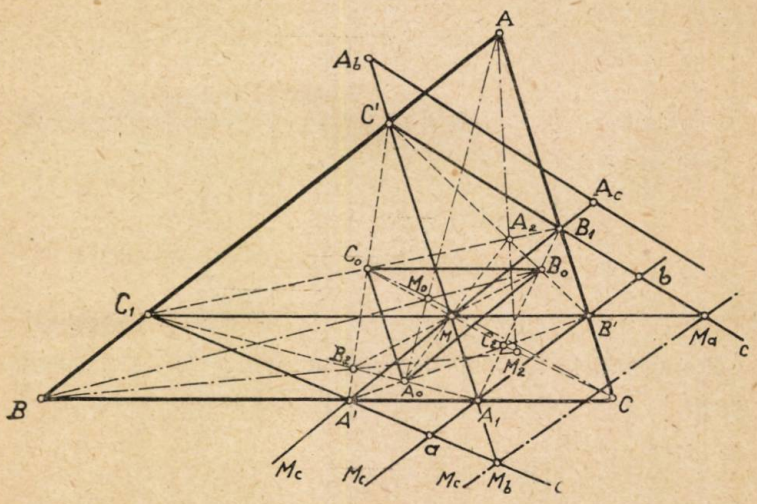
Ca să complectez această monografie voiu publica ca note orice alte ştiri mi se vor trimite despre $\sqrt{2}$.

I. IONESCU.

CONFIGURAȚIA FORMATĂ DE PARALELELE DUSE PRINTR'UN PUNCT LA LATURILE UNUI TRIUNGHIU

In rândurile care urmează, pun în evidență câteva proprietăți în legătură cu configurația formată de paralelele duse printr'un punct de planul unui triunghiu la laturile triunghiului.

1°. *Fie triunghiul* ABC *și paralelele* $B'C_1$, $C'A_1$, $A'B_1$, *duse prin punctul* M, *din planul triunghiului, la laturile* BC, CA, AB *respectiv.*



Fie încă punctele : $A_2 \equiv (B'C', B_1C_1)$, $B_2 \equiv (C'A', C_1A_1)$, $C_2 \equiv (A'B', A_1B_1)$.

Triunghiurile ABC *și* $A_2B_2C_2$ *sunt omologice, centrul de omologie fiind potențialul de ordinul II al lui* M, *iar axa de omologie fiind paralelă cu polara trilineară a anticomplementarului lui* M.

Să însemnăm cu α_0, β_0, γ_0, *coordonatele baricentrice* ale punctului M față de triunghiul ABC.

Punctele B', C', B_1, C_1 au coordonatele:

$B'(\alpha_0, 0, \beta_0+\gamma_0)$, $C'(\alpha_0+\gamma_0, \beta_0, 0)$, $B_1(\alpha_0+\beta_0, 0, \gamma_0)$, $C_1(\alpha_0, \beta_0, +\gamma_0, 0)$.

Deducem că dreptele B'C' şi B_1C_1 au ecuaţiile:

$$(1)\quad \begin{cases} -\beta_0(\beta_0+\gamma_0)\alpha+(\alpha_0+\gamma_0)(\beta_0+\gamma_0)\beta+\alpha_0\beta_0\gamma=0 \\ -\gamma_0(\beta_0+\gamma_0)\alpha+\alpha_0\gamma_0\beta+(\alpha_0+\beta_0)(\beta_0+\gamma_0)\gamma=0. \end{cases}$$

Ecuaţia dreptei AA_2 este de forma $P'+kP_1=0$, unde P' şi P_1 sunt membrii I ai ecuaţiilor (1).

Scriind că punctul A (1, 0, 0) este pe această dreaptă, găsim

$$k=-\frac{\beta_0}{\gamma_0}.$$

Urmează că ecuaţia dreptei AA_2 este, după ce facem toate simplificările:

$$\frac{\beta}{\beta_0^2}-\frac{\gamma}{\gamma_0^2}=0.$$

Prin permutări circulare obţinem ecuaţiile dreptelor BC_2 şi CC_2:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0^2}-\frac{\alpha}{\alpha_0^2}=0\ ,\ \frac{\alpha}{\alpha_0^2}-\frac{\beta}{\beta_0^2}=0.$$

Vedem că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 concură în punctul M_2 de coordonate baricentrice α_0^2, β_0^2, γ_0^2, care este *potenţialul de ordinul II* al punctului M.

Aşa dar triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ sunt omologice, centrul de omologie fiind potenţialul de ordinul II al lui M.

Pentru a forma ecuaţia axei de omologie, calculăm coordonatele lui A_2, cu ajutorul ecuaţiilor (1):

$$A_2[\alpha_0\beta_0^2+\alpha_0\gamma_0^2+\beta\gamma_0^2+\beta_0^2\gamma_0+\alpha_0\beta_0\gamma_0, \beta_0^2(\beta_0+\gamma_0), \gamma_0^2(\beta+\gamma_0)].$$

Prin permutări circulare, obţinem coordonatele punctelor B_2 şi C_2.

Urmează că ecuaţia dreptei B_2C_2 este:

$$[(\beta_0\gamma_0^2+\beta_0\alpha_0^2+\gamma_0\alpha_0^2+\gamma_0^2\alpha_0+\alpha_0\beta_0\gamma_0)(\gamma_0\alpha_0^2+\gamma_0\beta_0^2+\alpha_0\beta_0^2+\alpha_0^2\beta_0+\alpha_0\beta_0\gamma_0)$$
$$-\beta_0^2\gamma_0^2(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0+\gamma_0)]\alpha+\alpha_0^2(\alpha+\gamma_0)[\gamma_0^2(\alpha_0+\beta_0)-\gamma_0\alpha_0^2-\gamma_0\beta_0^2-\alpha_0\beta_0^2$$
$$-\alpha_0^2\beta_0-\alpha_0\beta_0\gamma_0]\beta+\alpha_0^2(\alpha_0+\beta_0)[\beta^2(\alpha_0+\gamma_0)-\beta_0\gamma_0^2-\beta_0\alpha_0^2-\gamma_0\alpha_0^2-\gamma_0^2\alpha_0$$
$$-\alpha_0\beta_0\gamma_0]\gamma=0.$$

Simplificând cu factorul comun $\alpha_0(\alpha_0\beta_0+\beta_0\gamma_0+\gamma_0\alpha_0)$ al coeficienţilor, ecuaţia dreptei B_2C_2 se scrie:

$$-[(\alpha_0+\beta_0)(\beta_0+\gamma_0)(\gamma_0+\alpha_0)-\alpha_0\beta_0\gamma_0]\alpha+\alpha_0(\alpha_0+\gamma_0)(\alpha_0+\beta_0-\gamma_0)\beta+$$
$$\alpha_0(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0-\beta_0+\gamma_0)\gamma=0.$$

Deducem că punctul (BC, B_2C_2) are coordonatele:

$$0, (\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0-\beta_0+\gamma_0), -(\alpha_0+\gamma_0)(\alpha_0+\beta_0-\gamma_0).$$

Printr'o permutare circulară obţinem coordonatele punctului (CA, C_2A_2) şi găsim că ecuaţia axei de omologie a triunghiurilor ABC şi $A_1B_2C_2$ este:

$$(2)\qquad \frac{\beta_0+\gamma_0}{-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0}\alpha+\frac{\gamma_0+\alpha_0}{\alpha_0-\beta_0+\gamma_0}\beta+\frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0+\beta_0-\gamma^0}\gamma=0.$$

Membrul I al acestei ecuaţii se poate însă scrie succesiv:

$$\sum\frac{(-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)+\alpha_0}{-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0}\alpha=\sum\frac{\alpha_0}{-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0}\alpha+\Sigma\alpha=$$

$$\frac{1}{2}\sum\frac{[(-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)+(\alpha_0-\beta_0+\gamma_0)+(\alpha_0+\beta_0-\gamma_0)]-(-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)}{-\alpha+\beta_0+\gamma_0}+\Sigma\alpha=$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)\sum\frac{\alpha}{-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0}-\frac{1}{2}\Sigma\alpha+\Sigma\alpha=$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)\sum\frac{\alpha}{-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0}+\frac{1}{2}\Sigma\alpha.$$

Deci ecuaţia (2) se mai poate scrie sub forma:

$$(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)\left(\frac{\alpha}{-\alpha_0+\beta_0+\gamma_0}+\frac{\beta}{\alpha_0-\beta_0+\gamma_0}+\frac{\gamma}{\alpha_0+\beta_0-\gamma_0}\right)+(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

de unde se vede că *axa de omologie a triunghiurilor* ABC *şi* $A_2B_2C_2$ *este paralelă cu polara trilineară a anticomplementarului punctului* M.

2°. E clar că, plecând dela M_2 şi repetând construcţia care ne-a condus la găsirea lui, obţinem un punct M_4, ale cărui coordonate baricentrice sunt pătratele coordonatelor lui M_2, adică $\alpha_0^4, \beta_0^4, \gamma_0^4$; acest punct este potenţialul de ordinul IV al lui M; ş. a. m. d.

Proprietatea demonstrată ne dă, deci, un mijloc simplu pentru găsirea potenţialelor succesive ale unui punct, *de ordine egale cu puterile lui 2.*

3°. *Fie punctele:* $A_0 \equiv (A'B', A_1C_1)$, $B_0 \equiv (B'C', B_1A_1)$, $C_0 \equiv (C'A', C_1B_1)$. *Triunghiurile* ABC *şi* $A_0B_0C_0$ *sunt omotetice, centrul de omotetie fiind reciprocul complimentarului punctului* M.

Dreptele $A'B'$ şi A_1C_1 au respectiv ecuaţiile:

$$(3)\quad \begin{cases} (\alpha_0+\beta_0)(\beta_0+\gamma_0)\alpha+\alpha_0\gamma_0\beta-\alpha_0(\alpha_0+\beta_0)\gamma=0 \\ (\alpha_0+\gamma_0)(\beta_0+\gamma_0)\alpha-\alpha_0(\alpha_0+\gamma_0)\beta+\alpha_0\beta_0\gamma=0. \end{cases}$$

Găsim uşor că ecuaţia dreptei AA_0 este:

$$(\alpha_0+\gamma_0)\beta-(\alpha_0+\beta_0)\gamma=0.$$

Prin permutări circulare formăm ecuaţiile dreptelor BB_0 şi CC_0.

Se găseşte că aceste drepte concură în punctul M_0 de coordonate baricentrice $\frac{1}{\beta_0+\gamma_0}, \frac{1}{\gamma_0+\alpha_0}, \frac{1}{\alpha_0+\beta_0}$, care este *reciprocul complimentarului* punctului $M(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

Ecuaţiile (3) ne permit să aflăm coordonatele lui A_0:

$$A_0[\alpha_0^2, (\alpha_0+\beta_0)(\beta_0+\gamma_0), (\alpha_0+\gamma_0)(\beta_0+\gamma_0)].$$

Prin permutări circulare găsim coordonatele punctelor B_0 şi C_0.

Deducem că ecuaţia dreptei B_0C_0 este:

$$[\beta_0^2\gamma_0^2-(\beta_0+\gamma_0)^2\cdot(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0+\gamma_0)]\alpha+(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0+\gamma_0)\cdot$$
$$[(\alpha_0+\gamma_0)(\beta_0+\gamma_0)-\gamma_0^2]\beta+(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0+\gamma_0)[(\alpha_0+\beta_0)(\beta_0+\gamma_0)-\beta_0^2]\gamma=0.$$

Observăm că expresiunile din croşete, care intră în compunerea coeficienţilor lui β şi γ, se reduc la $\alpha_0\beta_0+\alpha_0\gamma_0+\beta_0\gamma_0$. iar coeficientul lui α se poate scrie:

$$-(\beta_0^2+\gamma_0^2+\alpha_0\beta_0+\alpha_0\gamma_0+\beta_0\gamma_0)(\alpha_0\beta_0+\alpha_0\gamma_0+\beta_0\gamma_0).$$

Prin simplificarea cu factorul comun al coeficienţilor, ecuaţia dreptei B_0C_0 se scrie:

$$-(\beta_0^2+\gamma_0^2+\alpha_0\beta_0+\alpha_0\gamma_0+\beta_0\gamma_0)\alpha+(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0+\gamma_0)(\beta+\gamma)=0$$

de unde se vede lămurit că dreapta B_0C_0 este paralelă cu latura BC a triunghiului ABC.

In mod analog C_0A_0 şi A_0B_0 sunt paralele cu laturile CA şi AB, astfel că proprietatea este demonstrată.

4°. *Triunghiurile* $A_0B_0C_0$ *şi* $A_2B_2C_2$ *sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul* M, *iar axa de omologie fiind paralelă cu polara trilineară a lui* M.

In adevăr, se verifică uşor că determinantul format cu coordonatele punctelor M, A_0 şi A_2 este nul, ceea ce însemnează că aceste puncte sunt în linie dreaptă.

Pentru a obține ecuația axei de omologie, calculăm coordonatele punctului de intersecție al dreptelor B_0C_0 și B_2C_2:

$$\alpha_0(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0+\gamma_0)(\beta_0-\gamma_0),\ \beta_0(\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0\beta_0+\alpha_0\gamma_0+\gamma_0^2),$$
$$-\gamma_0(\alpha_0+\gamma_0)(\alpha_0\beta_0+\alpha_0\gamma_0+\beta_0^2).$$

Printr'o permutare circulară, obținem coordonatele punctului $(C_0A_0,\ C_2A_2)$.

Deducem că ecuația axei de omologie a triunghiurilor $A_0B_0C_0$ și $A_2B_2C_2$, este:

$$\beta_0\gamma_0(\beta_0+\gamma_0)\alpha+\gamma_0\alpha_0(\gamma_0+\alpha_0)\beta+\alpha_0\beta_0(\alpha_0+\beta_0)\gamma=0$$

care se mai scrie:

$$(4)\qquad (\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}+\frac{\beta}{\beta_0}+\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

și care este, cum se vede, paralelă cu polara trilineară a lui M.

5°. Un calcul analog cu cel făcut la 3° arată că *în punctul* M_0 *concură și dreptele care unesc vârfurile triunghiului* ABC *cu punctele* $(A_1B_1,\ A'C'),\ (B_1C_1,\ B'A'),\ (C_1A_1,\ C'B')$. De altfel aceste 3 puncte sunt în linie dreaptă, deoarece definesc axa de omologie a triunghiurilor $A'B'C',\ B_1C_1A_1$ (cu centrul de omologie, prin construcție în M), a cărei ecuație se găsește că este tocmai ecuația (4).

6°. Să însemnăm cu *a*, *b*, *c* vârfurile triunghiului ale cărui laturi sunt dreptele $B_1C',\ C_1A',\ A_1B'$.

Triunghiurile ABC *și* abc *sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul* M, *iar axa de omologie fiind dreapta (4).*

In adevăr, ecuațiile dreptelor C_1A' și A_1B' sunt:

$$(5)\qquad \begin{cases} \gamma_0(\beta_0+\gamma_0)\alpha-\alpha_0\gamma_0\beta+\alpha_0(\alpha_0+\beta_0)\gamma=0 \\ \beta_0(\beta_0+\gamma_0)\alpha+\alpha_0(\alpha_0+\gamma_0)\beta-\alpha_0\beta_0\gamma=0. \end{cases}$$

Deducem că dreapta care unește pe A cu punctul *a* are ecuația:

$$\frac{\beta}{\beta_0}-\frac{\gamma}{\gamma_0}=0$$

ceea ce ne arată că această dreaptă trece prin M.

In mod asemănător, dreptele care unesc pe B și C cu punctele $b\equiv(A_1B',\ B_1B')$ și $c\equiv(B_1C',\ C_1A')$ trec prin M, care este, deci, centrul de omologie al triunghiurilor ABC și *abc*.

Ecuațiile (5) ne permit să calculăm coordonatele punctelor (C_1A', CA) și (A_1B', AB):

$$[-\alpha_0(\alpha_0+\beta_0),\ 0,\ \gamma_0(\beta_0+\gamma_0)]\ ;\ [\alpha_0(\alpha_0+\gamma_0),\ -\beta_0(\beta_0+\gamma_0),\ 0].$$

Găsim că ecuația dreptei determinată de aceste puncte, care este axa de omologie a triunghiurilor ABC și *abc*, este ecuația (4).

7°. *Paralelele la dreptele* B_1C', C_1A', A_1B', *astfel încât împart segmentele* MB_1, MC_1, MA_1 *în același raport, determină un triunghiu omologic cu triunghiul* ABC, *centrul de omologie fiind punctul* M, *iar axa de omologie fiind paralelă cu polara trilineară a lui* M.

Fie A_b, C_c punctele în care o paralelă la B_1C' taie dreptele $C'A_1$ și $A'B_1$.

Să însemnăm:

$$\frac{MA_b}{A_b C'} = \frac{MA_c}{A_c B_1} = k.$$

Deducem că punctele A_b și A_c au coordonatele:

$$A_b\,[(1+k)\alpha_0+k\gamma_0,\ (1+k)\beta_0,\ \gamma_0];$$

$$A_c\,[(1+k)\alpha_0+k\beta_0,\ \beta_0,\ (1+k)\gamma_0]$$

de unde rezultă ecuația dreptei $A_b A_c$:

$$(6)\qquad \begin{cases} -(2+k)\beta_0\gamma_0\alpha+\gamma_0[(1+k)(\alpha_0+\gamma_0)-\beta_0]\beta \\ +\beta_0[(1+k)(\alpha_0+\beta_0)-\gamma_0]\gamma=0. \end{cases}$$

Această dreaptă întâlnește pe BC în punctul de coordonate:

$$0,\ \beta_0[(1+k)(\alpha_0+\beta_0)-\gamma_0],\ -\gamma_0[(1+k)(\alpha_0+\gamma_0)-\beta_0].$$

Se verifică ușor că acest punct, împreună cu punctele analoage obținute ducând paralele cu dreptele C_1A' și A_1B' astfel încât să împartă segmentele MC_1 și MA_1 în același raport k, sunt situate pe dreapta a cărei ecuație este:

$$\beta_0\gamma_0[(1+k)(\beta_0+\gamma_0)-\alpha_0]\alpha+\gamma_0\alpha_0[(1+k)(\gamma_0+\alpha_0)-\beta_0]\beta$$
$$+\alpha_0\beta_0[(1+k)(\alpha_0+\beta_0)-\gamma_0]\gamma=0,$$

ceea ce însemnează că triunghiul ABC este omologic cu triunghiul determinat de dreptele $A_b A_c$ și analoagele, ecuația de mai sus fiind ecuația axei de omologie.

Se constată de asemenea (scriind, prin permutări circulare, ecuațiile dreptelor $B_c B_a$, $C_a C_b$) că centrul de omologie este punctul M.

Observăm că ecuația axei de omologie se mai poate scrie sub forma:

$$(7)\quad (1+k)(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}+\frac{\beta}{\beta_0}+\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)-(2+k)(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

care ne spune că *axa de omologie este paralelă cu polara trilineară a lui* M.

Un caz particular interesant avem pentru $k=-2$, când dreptele $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ trec prin vârfurile triunghiului ABC. In acest caz vedem că axa de omologie este chiar polara trilineară a punctului M.

8. Dacă luăm intersecțiile dreptelor $A_b A_c$, $B_c B_a$ și $C_a C_b$ cu dreptele $B'C_1$, $C'A_1$, $A'B_1$ (paralelele prin M la laturile triunghiului fundamental), găsim că punctele de intersecție se află pe dreapta a cărei ecuație se poate scrie sub forma:

$$(8)\quad (1+k)(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}+\frac{\beta}{\beta_0}+\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)-(3+2k)(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

dreaptă care de asemenea este paralelă cu polara trilineară a lui M.

Avem 2 cazuri particulare interesante:

I. Pentru $k=\infty$, (8) se reduce la ecuația:

$$(9)\quad (\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}+\frac{\beta}{\beta_0}+\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)-2(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

la care se reduce și (7) pentru $k=0$.

Urmează deci că *punctele în care dreptele* B_1C', C_1A', A_1B' *întâlnesc respectiv paralelele* $B'C_1$, $C'A_1$, $A'B_1$, *duse prin* M *la laturile triunghiului* ABC, *sunt pe aceeași dreaptă cu punctele în care paralelele prin* M *la dreptele* B_1B', C_1A', A_1B' *întâlnesc respectiv laturile triunghiului* ABC.

II. Pentru $k=-\frac{3}{2}$, ecuația (8) se reduce la ecuația polarei trilineare a lui M.

Putem enunța deci proprietatea:

Paralelele la dreptele B_1C', C_1A', A_1B' *prin simetricele, față de vârfurile triunghiului* ABC, *ale punctelor în care cevienele lui*

M *întâlnesc dreptele* B_1C', C_1A', A_1B', *întâlnesc dreptele* $B'C_1$, $C'A_1$, $A'B_1$ *în aceleaşi puncte în care aceste paralele sunt întâlnite de polara trilineară a lui* M.

9°. *Observare.* Se poate uşor constata că *triunghiul* ABC *este omologic cu fiecare din triunghiurile*

$$A_2 M_b M_c , \quad B_2 M_c M_a , \quad C_2 M_a M_b ,$$

unde

$$M_a \equiv (B'C_1, B_1C'), \quad M_b \equiv (C'A_1, C_1A'), \quad M_c \equiv (A'B_1, A_1B'),$$

centrele de omologie fiind punctele armonic asociate punctului M_2.

Despre punctele M_a, M_b, M_c ştim (8°, I) că sunt situate pe dreapta a cărei ecuaţie este ecuaţia (9).

Notă. In *Association française pour l'avancement des sciences,* 1882— La Rochelle, p. 122—127, LEMOINE studiază locul geometric al punctului M, aşa încât, *m* fiind variabil, ariile paralelogramelor MB_1AC', MC_1BA', MA_1CB' să fie proporţionale cu puterile de ordinul *m* ale laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC.

A. DOBRESCU.

O PROBLEMĂ DE MECANICĂ ARTILERISTICĂ

Sub acest titlu D-l CĂPITAN I. GH. ZAMFIRESCU publică un articol în *G. M.* a. XLIX, p. 216, în care îşi propune să calculeze „cabrarea" tunului. Este vorba de tendinţa de rotaţie pe care o are tunul în jurul unei axe orizontale de pe sol, din cauza impulsului de recul dat de explozia din ţeava tunului, rotaţie care se manifestă prin deslipirea roţilor tunului şi înălţarea lor la o cotă *z*.

Erori de mecanică şi de matematici elementare îl fac pe autor să ajungă la concluziuni inexacte.

Problema propusă este prezentată sub înfăţişarea următoare.

Tunul e presupus a fi un solid rigid sprijinit pe un plan orizontal (solul) de-a-lungul axei Δ precum şi în punctele unde roţile tunului ating planul. Solidul are, în poziţie normală, un plan vertical de simetrie — planul său median — care este perpendicular pe axa roţilor şi pe dreapta ce uneşte punctele de contact ale roţilor cu solul. Fie AB intersecţia solului cu planul median, A fiind situat pe dreapta ce uneşte punctele de contact ale roţilor

cu solul, iar B fiind situat pe Δ. In momentul când proiectilul începe a se deplasa în țeava tunului, ia naștere în sens contrar de cum se mișcă proiectilul, o forță foarte mare $\overline{R}$, care produce un cuplu de moment C_r față de Δ. Acestui cuplu se opune cuplul C_s al greutății tunului. Dacă C_r este mai mare de cât C_s, solidul încearcă o rotație în jurul lui Δ, tunul se „cabrează".

Autorul anunță dela început că va evita „întrebuințarea momentelor de inerție, utilizând numai datele ce se pot măsura la afet".

Pentru a evita calculul momentului de inerție I al solidului față de Δ, moment care apare în mod natural în cazul rotației, D-l CĂPITAN ZAMFIRESCU identifică efectul cuplului $C_r - C_s = N$ asupra solidului, cu efectul pe care l-ar avea o forță F normală la sol, dirijată în sus și lucrând în B asupra unei părți din masa tunului, anume asupra părții care se sprijină în B. Forța este așa fel luată, încât momentul ei față de Δ să fie egal cu N:

$$F = \frac{N}{L},$$

însemnând cu L distanța AB:

$$L = AB.$$

Cu alte cuvinte, dacă P este greutatea tunului și L_g distanța cea mai scurtă între Δ și verticala centrului de greutate în poziția inițială, ecuația de mișcare ar fi:

$$(1)... \qquad \frac{P}{g}\frac{L_g}{L}\gamma = \frac{N}{L},$$

unde am însemnat cu γ accelerația socotită pe verticală în sus. (La stabilirea ecuației precedente D-l CĂPITAN ZAMFIRESCU confundă accelerația cu vitesa).

Comparând ecuația (1) cu ecuația

$$(2)... \qquad I\ddot{\theta} = N$$

care ne dă rotația în jurul axei Δ, θ fiind unghiul de rotație, deducem:

$$(3)... \qquad I = \frac{P}{g} L_g L,$$

adică pentru ca ipoteza D-lui CĂPITAN ZAMFIRESCU să fie adevărată, ar trebui ca momentul de inerţie al solidului faţă de axa Δ să aibă expresia precedentă. Că aşa ceva nu e cu putinţă se vede imediat şi din faptul că membrul al doilea al relaţiei (3) depinde de distanţa L, adică momentul de inerţie al unui corp faţă de axa Δ trecând prin B este proporţional cu distanţa punctului de sprijin A la axa Δ, când ştiut este că I nu poate depinde de punctul unde îi mai dăm un sprijin solidului pe solul orizontal.

D-l ZAMFIRESCU îşi urmăreşte mai departe ideea, însă nu fără greşeli. Spre pildă, între altele, găseşte

$$(4)\ldots \qquad \frac{L'_g}{L'} = \frac{L_g}{L},$$

însemnând cu L'_g şi L' distanţele dela B la verticala centrului de greutate, respectiv la verticala punctului A, când tunul e rotit de un unghiu θ împreună cu A în jurul axei Δ. Că nu e aşa, se vede imediat dacă observăm că avem

$$(5)\ldots \qquad L' = L\cos\theta \quad , \quad L'_g = L_g \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos\alpha},$$

unde am însemnat cu α unghiul pe care-l face dreapta BG (G = centrul de greutate) cu orizontala din B. Egalitatea (4) ne-ar da

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha\cos\theta,$$

ceea ce în genere, nu este adevărat.

De altfel chiar figura ataşată articolului este rău făcută. Intre altele, un unghiu drept al solidului rigid (unghiul din A), devine un unghiu obtuz, după rotaţie.

Articolul se încheie cu un „corolar cinematic" foarte obscur, care permite mai multe interpretări, însă toate inexacte.

Acum să vedem adevărata faţă a problemei ce şi-a propus-o D-l CĂPITAN ZAMFIRESCU. Vom păstra notaţiile D-sale, şi anume:

P = greutatea totală a afetului;
R = forţa gazelor în planul de simetrie al afetului;
G = centrul de greutate al afetului în poziţia iniţială;
G' = centrul de greutate al afetului după rotaţia de unghiul θ;
Δ = axa de rotaţie situată pe sol;
B = intersecţia ei cu planul median al solidului;

A = punctul unde dreapta ce unește cele două puncte de contact al roților înțeapă planul median;

L = AB;

L_g = cea mai scurtă distanță între Δ și verticala centrului de greutate G (în poziția inițială);

L'_g = cea mai scurtă distanță între Δ și verticala centrului de greutate G' (după rotația θ);

α = unghiul ABG;

θ = unghiul de rotație la momentul t;

C_r = valoarea absolută a momentului forței R față de Δ;

C_s = valoarea absolută a momentului greutății P față de Δ.

Reluăm ecuația (2). Vom împărți timpul cât roțile sunt deslipite de sol, în trei intervale:

a) primul durează dela $t = 0$, până la $t = t_1$, cât lucrează cuplul C_r, adică atâta timp cât pune proiectilul să străbată țeava tunului;

b) al doilea durează dela $t = t_1$ până la $t = t_2$. Momentul t_2 va fi caracterizat prin vitesa de rotație nulă;

$$\dot{\theta} = 0;$$

c) al treilea durează dela $t = t_2$ până la $t = t_3$, până când tunul atinge din nou solul cu roțile.

Primele două sunt intervale de ascensie pentru centrul de greutate al tunului; în cel de al treilea interval de timp centrul de greutate are o mișcare descendentă.

In primul interval de timp $(0, t_1)$, ecuația (1) va fi:

$$(6)\ldots \qquad I\ddot{\theta} = C_r - C_s .$$

In celelalte două intervale ea devine

$$(7)\ldots \qquad I\ddot{\theta} = -C_s$$

deoarece cuplul C_r dispare.

Vom presupune că cuplul C_r este constant, ceea ce revine la a presupune că reacțiunea R a explozivului are o valoare scalară constantă. Se înțelege că această ipoteză nu este riguros adevărată. Valoarea lui R depinde de felul de ardere al explozivului. Totuși dat fiind intervalul scurt de timp cât lucrează acest cuplu, se poate presupune, cu o bună aproximație, C_r egal tot timpul cu valoarea sa medie din intervalul $(0, t_1)$.

Cuplul C_s este egal cu momentul greutăţii P a tunului faţă de axa Δ

$$C_s = PL'_g$$

sau, folosind relaţia a doua din (5):

$$C_s = PL_g \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos\alpha}.$$

Vom presupune că unghiul θ este tot timpul foarte mic, aşa fel încât putem înlocui pe $\sin\theta$ prin θ. Atunci relaţia precedentă devine

$$C_s = PL_g (1 - \theta \operatorname{tg}\alpha).$$

Cu aceste relaţii, ecuaţiile (6) şi (7) devin respectiv;

(6')... $$\ddot{\theta} = a + b\theta,$$

(7')... $$\ddot{\theta} = -a' + b\theta$$

unde am pus:

$$a = \frac{C_r - PL_g}{I}, \quad a' = \frac{PL_g}{I}, \quad b = \frac{PL_g \operatorname{tg}\alpha}{I}.$$

Prima ecuaţie (6') se integrează imediat. Integrala ei generală este

(8)... $$\theta = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt} - \frac{a}{b},$$

C_1 şi C_2 fiind două constante de integrare, iar n fiind rădăcina patrată pozitivă a lui b:

$$n = +\sqrt{b}.$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină prin condiţiile iniţiale, care în cazul nostru sunt

$$\theta = 0, \quad \dot{\theta} = 0 \qquad \text{pentru } t = 0.$$

Deducem

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2b},$$

aşa încât (8) devine:

(9)... $$\theta = \frac{a}{b}(\operatorname{ch} nt - 1).$$

Formula (9) este valabilă numai în intervalul $t = (0, t_1)$. După t_1 unghiul θ verifică ecuația (7') a cărei integrală generală este

$$(10)\ldots \qquad \theta = C_3 e^{nt} + C_4 e^{-nt} + \frac{a'}{b},$$

unde C_3 și C_4 sunt iarăși două constante de integrare. Le vom determina prin condițiile inițiale care în cazul acesta devin:

$$\theta = \theta_1 \ , \ \dot{\theta} = \dot{\theta}_1 \qquad \text{pentru } t = t_1,$$

$\dot{\theta}_1$ fiind valoarea derivatei $\dot{\theta}$ în momentul $t = t_1$.

Observând că avem

$$(11)\ldots \qquad \theta_1 = \frac{a}{b}(\operatorname{ch} nt_1 - 1) \ , \ \dot{\theta}_1 = \frac{a}{n} \operatorname{sh} nt_1$$

scoatem

$$C_3 = \frac{1}{2b}(a - a'' e^{-nt_1}),$$

$$C_4 = \frac{1}{2b}(a - a'' e^{nt_1}),$$

unde am pus

$$(12)\ldots \qquad a'' = a + a' = \frac{C_r}{I}.$$

Cu aceste valori ale constantelor C_3 și C_4 soluția (10) devine

$$(13)\ldots \qquad \theta = \frac{1}{b}[a \operatorname{ch} nt - a'' \operatorname{ch} n(t - t_1) + a'].$$

Pentru a afla pe θ_2, valoarea lui θ în momentul t_2, adică valoarea maximă a unghiului θ, vom pune condiția ca $\dot{\theta}$ să se anuleze:

$$a \operatorname{sh} nt_2 - a'' \operatorname{sh} n(t_2 - t_1) = 0$$

ceea ce ne dă:

$$(14)\ldots \qquad e^{nt_2} = \sqrt{\frac{a'' e^{nt_1} - a}{a'' e^{-nt_1} - a}},$$

sau

$$(14')\ldots \qquad t_2 = \frac{1}{2n} \log \frac{a'' e^{nt_1} - a}{a'' e^{-nt_1} - a}.$$

Introducând în (13) această valoare a timpului, obţinem pe θ_2

$$(15)\ldots \qquad \theta_2 = \frac{1}{b}[a \operatorname{ch} nt_2 - a'' \operatorname{ch} n(t_2 - t_1) + a'],$$

expresie care se poate pune şi sub altă formă,

$$(15')\ldots \qquad \theta_2 = \frac{1}{b}(a' - \sqrt{a^2 + a''^2 - 2aa'' \operatorname{ch} nt_1}),$$

dacă se foloseşte relaţia (14).

Cunoscând pe θ_1 şi θ_2 vom putea calcula imediat înălţimile z_1 şi z_2 la care se va găsi punctul A respectiv la momentele t_1 şi t_2

$$(16)\ldots \qquad z_1 = L\theta_1 \ , \quad z_2 = L\theta_2 .$$

In fine, în intervalul al treilea de timp (t_2, t_3) este valabilă tot ecuaţia (13). Pentru a determina pe t_3, va trebui să facem în (13) $\theta = 0$. Deci t_3 va fi dat de ecuaţia:

$$a \operatorname{ch} nt_3 - a'' \operatorname{ch} n(t_3 - t_1) + a' = 0.$$

Ecuaţia aceasta are două soluţii pentru e^{nt_3}:

$$(17)\ldots \qquad e^{nt_3} = \frac{a' \pm 2\sqrt{aa''} \operatorname{sh} \frac{nt_1}{2}}{a'' e^{-nt_1} - a} .$$

Pentru a decide ce semn trebue luat la numărător, ne vom folosi de condiţia evidentă

$$e^{nt_3} > e^{nt_2}.$$

Vom pune însă pe e^{nt_2} din (14) sub forma:

$$e^{nt_2} = \frac{\sqrt{a'^2 - 2aa''(\operatorname{ch} nt_1 - 1)}}{a'' e^{-nt_1} - a} = \frac{\sqrt{a'^2 - 4aa'' \operatorname{sh}^2 \frac{nt_1}{2}}}{a'' e^{nt_1} - a}$$

sau încă

$$e^{nt_2} = \frac{\sqrt{\left(a' + 2\sqrt{aa''} \operatorname{sh} \frac{nt_1}{2}\right)\left(a' - 2\sqrt{aa''} \operatorname{sh} \frac{nt_1}{2}\right)}}{a'' e^{-nt_1} - a} .$$

Revenind la valoarea anterioară (17) dată lui e^{nt_3} vom avea

$$e^{nt_3} = k\, e^{nt_2} \quad \text{sau} \quad e^{nt_3} = \frac{1}{k} e^{nt_2},$$

după cum luăm în (17) semnul plus sau semnul minus, k fiind,

$$k = \sqrt{\frac{a' + 2\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}{a' - 2\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}},$$

un număr mai mare ca unitatea. Se vede deci că va trebui să luăm în (17) semnul plus.

Aşa dar vom avea:

$$(18)\ldots \qquad e^{nt_3} = \frac{a' + 2\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}{a''\,e^{-nt_1} - a}$$

sau

$$(18')\ldots \qquad t_3 = \frac{1}{n}\log\frac{a' + 2\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}{a''\,e^{-nt_1} - a}.$$

In momentul t_3 roţile tunului iau din nou contact cu pământul. Contactul acesta este violent. El înseamnă o percusiune. Ne propunem să aflăm valoarea acestei percusiuni. O vom însemna cu Q şi o vom considera normală pe sol. Aplicând teorema momentelor faţă de axa Δ şi ţinând seama că momentul total al cantităţilor de mişcare faţă de Δ, adică $I\dot{\theta}$, este consumat în întregime de percusiune, în momentul t_3, vom avea

$$(19)\ldots \qquad -I\dot{\theta}_3 = QL,$$

unde am însemnat cu $\dot{\theta}_3$ valoarea lui $\dot{\theta}$ în momentul când roţile tunului iau din nou contact cu pământul. Valoarea lui $\dot{\theta}$ o vom deduce prin derivare din (13)

$$\dot{\theta}_3 = \frac{1}{nb}\left[a\,\mathrm{sh}\,nt_3 - a''\,\mathrm{sh}\,n(t_3 - t_1)\right]$$

sau, folosindu-ne de relaţia (17),

$$(20)\ldots \qquad \dot{\theta}_3 = -\frac{2\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}{n}.$$

Din (19) scoatem pe Q:

$$(21)\ldots \qquad Q = \frac{2I\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}{nL}.$$

In rezumat, prin formulele găsite (11), (14'), (15'), (18'), (20) şi (21) am exprimat în funcţie de t_1, mărimile θ_1, $\dot{\theta}_1$, t_2, θ_2, t_3, $\dot{\theta}_3$ şi Q:

$$\theta = \frac{a}{b}(\mathrm{ch}\,nt_1 - 1)\ ,\quad \dot{\theta}_1 = \frac{a}{n}\,\mathrm{sh}\,nt_1\ ,\quad t_2 = \frac{1}{2n}\log\frac{a''e^{nt_1} - a}{a''e^{-nt_1} - a},$$

$$\theta_2 = \frac{1}{b}\left(a' - \sqrt{a^2 + a''^2 - 2aa''\,\mathrm{ch}\,nt_1}\right),$$

$$t_3 = \frac{1}{n}\log\frac{a' + 2\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}{a''e^{-nt_1} - a},$$

$$\dot{\theta}_3 = -\frac{2\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}{n}\ ,\quad Q = \frac{2I\sqrt{aa''}\,\mathrm{sh}\,\frac{nt_1}{2}}{nL}.$$

Dintre aceste mărimi, le putem socoti observabile pe următoarele: t_1, t_2, θ_2, t_3 şi Q.

Dintre mărimile care intră în partea dreaptă a acestor relaţii putem presupune cunoscute: C_r, P, P_g, α şi L. Aşa dar, cele 7 relaţii obţinute ne pot servi la determinarea următoarelor mărimi: $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_3$, I. Vom avea deci 4 relaţii de verificare pentru valorile găsite, care pot constitui verificări şi pentru mărimile măsurate. Am mai putea adăuga şi relaţiile (16), care ne dau pe z_1 şi z_2, ca relaţii de verificare, întru cât s'ar putea determina prin observaţii mărimile z_1, z_2.

Pentru mânuirea relaţiilor precedente, le vom simplifica, presupunând că t_1 este în deajuns de mic pentru a i se putea neglija puterea a treia.

In această ipoteză, formulele de mai sus devin:

$$\theta_1 = \frac{a}{2}t_1^2\ ,\quad \dot{\theta}_1 = at_1\ ,\quad t_2 = \frac{a''}{a'}t_1\ ,\quad \theta_2 = \frac{aa''}{2a'}t_1^2$$

$$t_3 = \frac{a'' + \sqrt{aa''}}{a'}t_1\ ,\quad \dot{\theta}_3 = \sqrt{aa''}\,t_1\ ,\quad Q = \frac{I\sqrt{aa''}}{L}t_1.$$

De aici se vede că unghiurile θ_1 şi θ_2 sunt mici de ordinul al doilea în raport cu t_1 considerat el însuşi foarte mic. Intervalul de timp din momentul t_1 când proiectilul a părăsit ţeava şi până când roţile ating în t_2 înălţimea maximă este

$$t_2 - t_1 = \frac{a'}{a} t_1 = \frac{C_r - PL_g}{PL_g} t_1,$$

iar dela momentul t_2 până în momentul căderii tunului pe sol avem intervalul

$$t_3 - t_2 = \frac{\sqrt{aa''}}{a'} t_1.$$

Se constată imediat că acest din urmă interval $t_3 - t_2$ este mai mic decât timpul t_2, cu alte cuvinte, tunul pune mai mult timp să-şi atingă înălţimea maximă, decât pune ca să revină cu roţile pe pământ. Insă acelaşi interval $t_3 - t_2$ este mai mare decât intervalul $t_2 - t_1$ în care se urcă afetul, după ce proiectilul a părăsit gura tunului, ceea ce trebuia să prevedem dacă observam că solidul după ce a scăpat de presiunea gazelor, devine un pendul fizic în jurul axei Δ.

Unghiul θ_1 trebue scăzut din unghiul α pentru a obţine înclinarea corectată a tunului.

Desvoltările ce preced presupun ţeava tunului solidar legată cu afetul, pentru a ne pune în ipoteza articolului de care ne-am ocupat. In realitate, fenomenul este mai complicat. Ţeava tunului este mobilă pe afet, aşa încât ea are o mişcare de alunecare. Ţinând seama de această mişcare, problema ia un alt aspect. Intr'o lucrare viitoare mă voiu ocupa de problema ce rezultă din ipoteza alunecării ţevii în lungul ei.

V. VÂLCOVICI.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

Subsemnaţii, membri în Comisiunea pentru acordarea premiului « NICOLAE G. BOTEA », având în vedere condiţiile regulamentului şi activitatea corespondenţilor în volumul XLVIII al *Gazetei Matematice*, decernăm premiul NICOLAE G. BOTEA pe acest an, D-lui P. P. DRĂGHICESCU (elev Şcoala Ofiţeri Geniu).

D-sa generalizează în Nota apărută la pag. 115, problema Nr. 2575, publicată în Vol. XLVII. A dat de asemenea soluţii distinse problemelor 5246, 4464, 5504, 5025 — dovedind o deplină stăpânire a Geometriei triunghiului, în noţiunile proprietăţile sale şi în calculul baricentric.

Menţionăm cu acest prilej, că în Vol. XLVIII, nu a apărut niciun articol de Geometria triunghiului, nicio notă matematică din acest domeniu, — afară de Notele 14 şi 33 ale D-lui P. P. DRĂGHICESCU — care să intre în prevederile regulamentului premiului NICOLAE G. BOTEA.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

AL. PANTAZI, Prof. C. IONESCU-BUJOR.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală din 26 August 1943.

NOTE MATEMATICE

17. *Redacţionale.* Printre rezolvitorii problemei 5363, rezolvată la pag. 184 din acest volum, se adaugă şi D-nii: P. F. IONESCU şi E. N. WEGNER care, încă din 1941, au trimis soluţii foarte bune găsind ambele soluţii

$$567^2 = 321489 \quad \text{şi} \quad 854^2 = 729316.$$

GH. B.

18. *Asupra notei Nr. 27, Vol. XXXIV, p. 294.* In această notă, D-l C. I. RÂMNICEANU vrea să găsească, analog cu problema 2231, rezolvată la pag. 303 din *Gazeta Matematică* Vol. XX, limita pentru $x = 0$ a expresiunii:

$$\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3 \sec x} - \frac{1}{x^3 \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x \cot x}$$

D-sa scrie, ca şi în problema 2231, expresiunea astfel:

$$\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3}\right] + \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\cot x}{x^3}\right] + \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \cot x}\right]$$

şi calculează limita fiecare paranteză în parte.

Impingând însă analogia prea departe, D-sa găseşte că

$$\lim_{x=0} \frac{\cos x}{6x} = \frac{1}{6} \; ; \quad \lim_{x=0} \frac{\cos x}{x} = 1 \; ; \quad \lim_{x=0} \frac{1}{\sin^2 x} = 1$$

ş. a. m. d. găsind astfel că limita expresiunii propuse este $\frac{5}{6}$.

Este uşor de văzut că fiecărei paranteze în parte este infinită pentru $x = 0$, astfel că expresiunea dată nu are o limită finită pentru $x = 0$.

I. S. A.

19. *Asupra problemei Nr. 5439.* Această problemă, rezolvată la pag. 429, G. M., Vol. XLVII se pretează unor extinderi:

Prima extindere:

Dacă scriem condiţiunea:

$$\varphi(\pi a_i) \leqslant \sqrt[n]{\pi\varphi(a_i^n)}$$

unde $i = 1, 2, 3, \ldots n$ şi dacă notăm:

$$Pa_i = \pi \frac{Fa_i - 1}{Fa_i}$$

$$Pa_i\, a_j = \pi \frac{Fa_i\, a_j - 1}{Fa_i\, a_j - 1}$$

$$Pa_i\, a_j\, a_k = \pi \frac{Fa_i\, a_j\, a_k - 1}{Fa_i\, a_j\, a_k}$$

. . . . . .

unde Fa_i reprezintă factorii primi cari aparţin numai lui a_i, fără să mai aparţină şi altora $(a_j, a_k, a_l, \ldots)$; $Fa_i\, a_j$ reprezintă factorii primi cari sunt comuni numai lui a_i şi a_j ; $Fa_i\, a_j\, a_k$ reprezintă factorii primi cari sunt comuni numai lui a_i, a_j şi a_k, şi tot aşa mai departe.

Indicii $j, k, l, \ldots$ se găsesc între numerele $1, 2, 3, \ldots n$ însă sunt diferiţi de i.

Procedând acum analog soluţiei dată de D-l T. POPOVICIU, avem:

$$\varphi(\pi a_i) = \pi a_i \,.\, Pa_i \,.\, Pa_i\, a_j \,.\, Pa_i\, a_j\, a_k \ldots$$

$$\varphi(a_1^n) = a_1^n \,.\, Pa_1 \,.\, Pa_1\, a_j \,.\, Pa_1\, a_j\, a_k \ldots$$

$$\varphi(a_2^n) = a_2^n \,.\, Pa_2 \,.\, Pa_2\, a_j \,.\, Pa_2\, a_j\, a_k \ldots$$

. . . . . .

$$\varphi(a_n^n) = a_n^n \,.\, Pa_n \,.\, Pa_n\, a_j \,.\, Pa_n\, a_j\, a_k \ldots$$

Inmulţind ultimele n egalităţi între ele, avem:

$$\pi\varphi\,(a_i^n) = \pi a_i^n \,.\, Pa_i \,.\, P^2 a_i\, a_j \,.\, P^3 a_i\, a_j\, a_k \,.$$

Inlocuind în neegalitatea dată, obţinem:

$$P^{n-1} a_i \,.\, P^{n-2} a_i\, a_j \,.\, P^{n-3} a_i\, a_j\, a_k \,. \,. \,. \leqslant 1.$$

Această ultimă neegalitate este evidentă deoarece avem $P < 1$.

In cazul că numerele a_i au aceiaşi factori primi, atunci produsele: $Pa_i\, a_j$, $Pa_i\, a_j\, a_k$, etc... devin egale cu 1 prin faptul că nu există factori primi, iar

$$Pa_1 = Pa_2 = \ldots = Pa_n = Pa.$$

Deci cei doi membri vor avea valorile:

$$\varphi\,(\pi a_i) = \pi a \,.\, Pa$$

şi

$$\pi\varphi\,(a_i^n) = \pi a^n \,.\, Pa^n$$

Observaţie. In acest ultim caz nu trebue să se confunde faptul că numerele a_1, a_2, a_3, ... a_n au aceiaşi factori primi cu egalitatea numerelor între ele, care poate să nu existe, din moment ce factorii primi pot fi ridicaţi la puteri diferite.

Altă extindere. Utilizând notaţiunile din „*Théories des Nombres*“ de E. LUCAS, pag. 399, vom scrie relaţia sub forma:

$$\varphi\,(p \,.\, q \,.\, r \,. \,. \,. \,.) \leqslant \sqrt[n]{\varphi\,(p^n) \,.\, \varphi\,(q^n) \,.\, \varphi\,(r^n) \ldots}$$

Aplicând formula dela pagina citată mai sus, adică:

$$\varphi\,(p \,.\, q \,.\, r \,. \,. \,. \,.) = \varphi\,(p) \,.\, \varphi\,(q) \,.\, \varphi\,(r) \,. \,. \,. \,.$$

$$\ldots \frac{\delta_1}{\varphi\,(\delta_1)} \cdot \left[\frac{\delta_2}{\varphi\,(\delta_2)}\right]^2 \cdot \left[\frac{\delta_3}{\varphi\,(\delta_3)}\right]^3 \ldots$$

unde δ_1 reprezintă produsul primelor puteri ale tuturor divizorilor primi comuni numai la două numere oarecare, din numerele date; δ_2 produsul primelor puteri a tuturor divizorilor primi comuni numai la trei numere oarecare, şi aşa mai departe.

Această formulă ne permite să scriem.

$$\varphi\,(p^n) \,.\, \varphi\,(q^n) \,.\, \varphi\,(r^n) \ldots = \varphi\,(p^n \,.\, q^n \,.\, r^n \ldots)$$

$$\left[\frac{\varphi\,(\delta_1)}{\delta_1}\right] \cdot \left[\frac{\varphi\,(\delta_2)}{\delta_2}\right]^2 \cdot \left[\frac{\varphi\,(\delta_3)}{\delta_3}\right]^3 \ldots$$

Condiția din problemă devine deci:

$$\frac{[\varphi(p\,.\,q\,.\,r\ldots)]^n}{\varphi(p^n\,.\,q^n\,.\,r^n\ldots)} \leqslant \left[\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1}\right]\cdot\left[\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2}\right]\cdot\left[\frac{\varphi(\delta_3)}{\delta_3}\right]\cdots$$

Dar observăm că, dacă δ_0 reprezinta factorii primi ai numerelor p, q, r, ... fără să fie comuni cu ale altor numere, ci numai pentru unul singur, adică δ_0 reprezintă produsul numerelor prime absolute cuprinse în fiecare din numerele p, q, r, ..., atunci

$$\frac{[\varphi(p\,.\,q\,.\,r_1\ldots)]^n}{\varphi(p^n\,.\,q^n\,.\,r\ \ldots)} = \left[\frac{\varphi(\delta_0)}{\delta_0}\right]^{n-1}\cdot\left[\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1}\right]^{n-1}\cdot\left[\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2}\right]^{n-1}\cdots$$

Prin urmare avem:

$$\left[\frac{\varphi(\delta_0)}{\delta_0}\right]^{n-1}\cdot\left[\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1}\right]^{n-2}\cdot\left[\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2}\right]^{n-3}\cdots \leqslant 1$$

unde fiecare paranteză este subunitară.

COMANDOR I. LINTEȘ.

20. *Asupra criteriilor de convergență.* 1. In G. M. XLIII, 457, D-l Prof. M. GHERMĂNESCU stabilește următoarea proprietate: *o serie cu termeni pozitivi pentru care primul criteriu* RAABE *dă* p *limite, depinzând de forma rangului termenului general față de divizorul* p, *este convergentă sau divergentă, după cum media aritmetică a acestor* p *limite este sau nu superioară unității, existând neprecizare în cazul egalității.*

Această proprietate sugerată D-lui Prof. M. GHERMĂNESCU de problema 2945 a D-lui Prof. TH. ANGHELUȚĂ, rezolvată în G. M. XXIX, 68, *este valabilă pentru criteriul* RAABE *de un rang oarecare*, demonstrația fiind asemănătoare celei date de D-l Prof. M. GHERMĂNESCU pentru primul criteriu RAABE.

Intr'adevăr, dacă în teorema lui CESARO privitoare la egalitatea

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}-U_n}{V_{n+1}-V_n}$$

valabilă atunci când ultima limită există [1]), punem

$$U_n = \log\frac{1}{\lambda_\mu(np+i)\,u_{np+i}}\ ,\quad V_n = \log_{\mu+2}(np+i)$$

1) M. GHERMĂNESCU, *Gazeta Matematică*, XLI, 89.

cu notaţia obişnuită

$\lambda_{-1}(x) = 1$, $x_\mu(x) = x \log_1 x \log_2 x \ldots \log_\mu x$, $\log \log_\mu x = \log_{\mu+1} x$

vom avea pentru criteriul BERTRAND de rangul $\mu + 2$

$$\lim_{n \to \infty} B_{\mu+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log \dfrac{\lambda_\mu (np+i)\, u_{np+i}}{\lambda_\mu [(n+1)p+i]\, u_{(n+1)p+i}}}{\log \dfrac{\log_{\mu+1} [(n+1)p+i]}{\log_{\mu+1} (np+i)}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\log \dfrac{u_{np+i}}{u_{(n+1)p+i}}}{\log \dfrac{\log_{\mu+1} [(n+1)p+i]}{\log_{\mu+1} (np+i)}}$$

şi deci

$$\lim_{n \to \infty} B_{\mu+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log \dfrac{u_{np+i}}{u_{np+i+1}} + \log \dfrac{u_{np+i+1}}{u_{np+i+2}} + \ldots + \log \dfrac{u_{(n+1)p+i}}{u_{(n+1)p+i+1}}}{\log \dfrac{\log_{\mu+1} [(n+1)p+i]}{\log_{\mu+1} (np+i)}}.$$

Cum însă, R_μ fiind criteriul RAABE de rangul μ, avem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \dfrac{u_n}{u_{n+1}}}{\log \dfrac{\log_\mu (n+1)}{\log_\mu n}} = \lim_{n \to \infty} R_{\mu+1}$$

adăogat faptului bine cunoscut al egalităţii limitelor criteriilor BERTRAND şi RAABE de acelaşi rang, când ultima limită există [1]), rezultă

$$\lim_{n \to \infty} B_{\mu+2} = \frac{k_1 + k_2 + \ldots k_p}{p}$$

ceea ce demonstrează proprietatea în existenţa ipotezii

$$\lim_{n \to \infty} R_{\mu+2} = \lim_{n \to \infty} \left\{ \ldots \left[\left(\frac{u_{np+i}}{u_{np+i+1}} - 1 \right) (np+i) - 1 \right] \ldots \right\} \times$$

$$\times \log_{\mu+1} (np+i) = k_i \quad , \qquad (i = 1, 2, \ldots p).$$

---

1) TH. ANGHELUŢĂ, *Buletinul Asociaţiei de matematici pure şi aplicate.* Anul II, Nr. 3.

2. Dacă ne propunem să cercetăm aceeaşi chestiune pentru criteriul D'ALEMBERT, deci dacă facem ipoteza

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{np+i+1}}{u_{np+i}} = k_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots p)$$

vom avea pentru criteriul CHAUCHY

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{np+i}}{np+i} = \log k_i$$

astfel încât folosind teorema lui CESARO, rezultă

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log u_{np+i}}{np+i} = \lim_{n \to \infty} \log \sqrt[p]{\frac{u_{(n+1)\,p+i}}{u_{np+i}}}$$

deoarece am luat

$$U_n = \log u_{np+i} \quad , \quad V_n = np + i.$$

Cum însă, pe de altă parte

$$\frac{u_{(n+1)\,p+i}}{u_{np+i}} = \frac{u_{np+i+1}}{u_{np+i}} \frac{u_{np+i+2}}{u_{np+i+1}} \cdots \frac{u_{(n+1)\,p+i}}{u_{(n+1)\,p+i-1}}$$

conchidem că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log u_{np+1}}{np+i} = \log \sqrt[p]{k_1 k_2 \ldots k_p}$$

şi prin urmare: *dacă criteriul* D'ALEMBERT *dă* p *limite, depinzând de forma rangului termenului general al seriei faţă de divizorul* p, *atunci limita criteriului* CAUCHY *este egală cu media geometrică a acestor limite.* Cu alte cuvinte: *o serie cu termeni pozitivi pentru care criteriul* D'ALEMBERT *dă* p *limite depinzând de forma rangului termenului general faţă de divizorul* p, *este convergentă sau divergentă, după cum media geometrică a acestor* p *limite este sau nu inferioară unităţii, existând neprecizare în cazul egalităţii.*

3. Cele ce preced par a indica existenţa unei deosebiri între criteriile RAABE şi criteriul D'ALEMBERT pe de o parte cât şi între criteriul BERTRAND şi criteriul CAUCHY pe de altă parte, căci criteriile RAABE şi BERTRAND privesc media aritmetică a celor *p* limite, în timp ce criteriile D'ALEMBERT şi CAUCHY se referă la cea geometrică.

Această deosebire este numai aparentă, ea datorindu-se formei sub care se scriu obişnuit aceste criterii, căci pentru criteriul BERTRAND de rangul $\mu+2$ având

$$\lim_{n\to\infty} B_{\mu+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \frac{1}{\lambda_\mu(n)\, u_n}}{\log_{\mu+2} n} = k$$

rezultă imediat

$$e^{-\lim_{n\to\infty} B_{\mu+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\log_{\mu+2} n]{\lambda_\mu(n)\, u_n} = e^{-k}$$

în timp ce pentru criteriul RAABE de rangul μ, din

$$\lim_{n\to\infty} R_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \frac{u_n}{u_{n+1}}}{\log \frac{\log_\mu (n+1)}{\log_\mu n}} = k$$

deducem

$$e^{-\lim_{n\to\infty} R_\mu} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\log_\mu n]{\frac{u_{n+1}}{u_n}}^{\log (n+1)} = e^{-k}$$

datorită cărora se arată că, în cazul existenţei a p limite depinzând de forma rangului termenului general faţă de divizorul p, limita de precizare a naturii seriei, priveşte media geometrică a acestor p limite, învederându-se prin aceasta, cât şi mai ales prin forma sub care au fost scrise acum criteriile BERTRAND şi RAABE de un rang oarecare, că ele sunt, ceea ce am putea numi *prelungirea* criteriilor CAUCHY şi D'ALEMBERT.

G. G. CONSTANTINESCU.

21. *Asupra distribuţiei viteselor pe suprafaţa unui solid în mişcarea relativă.* Fie un solid dat (S) a cărui suprafaţă verifică ecuaţia

(1) $$f(x, y, z) = 0.$$

Voiu considera acest solid reportat la 2 sisteme de axe: T_1 fix şi T solidar legat de (S); mobil cu (S). Fie $\bar{r}_0$ (X_0, Y_0, Z_0) vectorul de poziţie a lui $Oxyz$ sau T faţă de O_1XYZ sau T_1.

Fie acum M de vector $\bar{r}(x, y, z)$ un punct curent pe (S) față de O. Poziția sa față de O_1 este dată prin

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 = \bar{r}. \tag{2}$$

Dacă $\bar{\omega}(p, q, r)$ este vitesa instantanee de rotație, vitesa lui M față de O_1 este

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{dX_0}{dt} + qz - ry \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{dY_0}{dt} + rx - pz \\ \frac{dZ}{dt} &= \frac{dZ_0}{dt} + py - qx. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Când punctul M descrie în întregime (1), atunci vectorii echipolenți vectorilor vitesă a lui M duși prin O_1 nasc prin extremitățile lor o suprafață din studiul cărei suprafețe vom deduce felul cum sunt distribuite vitesele pe suprafața lui (S).

Eliminând p, q, r din (3) găsim planul

$$p\left[\frac{dX}{dt} - \frac{dX_0}{dt}\right] + q\left[\frac{dY}{dt} - \frac{dY_0}{dt}\right] + r\left[\frac{dZ}{dt} - \frac{dZ_0}{dt}\right] = 0 \tag{4}$$

care pentru

$$\bar{v}_0\left[\frac{dX_0}{dt}, \frac{dY_0}{dt}, \frac{dZ_0}{dt}\right]$$

luat la timpul t_α reprezintă un plan normal vectorului $\bar{\omega}$ și trecând prin punctul N de coordonate

$$\frac{dX_0}{dt}, \frac{dY_0}{dt}, \frac{dZ_0}{dt}.$$

Acest plan rămâne necontenit normal la $\bar{\omega}$ când t variază și trece necontenit prin punctul N, extremitatea vectorului echipolent în $\bar{v}_0$ dus prin O_1, punct care nu e fix în spațiu.

Din expresia lui (4) constatăm că el nu depinde de suprafața solidului și că mulțimea vectorilor vitesă umplu complet spațiul dintre planul (4) și un plan paralel cu acesta dus prin O_1. Dacă considerăm vectorii vitesă a punctelor din (4), cari vectori sunt echipolenți cu acceleraţiile punctelor M de pe (1), vedem că aceștia toți formează prin mulțimea lor o multiplicitate plană.

Determinarea lui (4) se poate face şi direct vectorial, derivând (2) în raport cu t şi multiplicând pe urmă scalar cu $\bar{\omega}$:

$$\bar{r}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{5}$$

$$\bar{\omega}\,\dot{\bar{r}}_1 = \bar{\omega}\,.\,\dot{\bar{r}}_0, \tag{6}$$

sau scrisă scalar

$$p\frac{dX}{dt} + q\frac{dY}{dt} + r\frac{dZ}{dt} = p\frac{dX_0}{dt} + q\frac{dY_0}{dt} + r\frac{dZ_0}{dt} \tag{6'}$$

Se vede astfel că (6') este identică cu (4).

In concluzie vitesele pe o suprafaţă sunt astfel distribuite încât mulţimea lor umple întreg spaţiul dintre două plane paralele, dintre care unul trece mereu prin punctul fix O_1 şi care rămân în mod constant normale axei instantanee de rotaţie, adică direcţiei lui $\bar{\omega}$.

OCT. E. GHEORGHIU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Proba scrisă la examenul pentru trimis ofiţeri la studii în Germania Iulie 1943

Administraţie. I. Suma şi produsul a două numere sunt respectiv mai mari decât un număr dat. In ce caz fiecare din numere este mai mic decât numărul dat?

II. Să se rezolve una din ecuaţiile:

$$\sin x + \sin 2x - \sin 3x = 0$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 2x = 0.$$

III. Să se traseze în interiorul unui cerc un alt cerc concentric aşa încât suprafeţele rezultate să fie echivalente.

IV. Fie R rezultanta forţelor F_1 şi F_2, S rezultanta forţelor R şi F_1 şi T rezultanta forţelor R şi F_2, să se arate că avem:

$$S^2 + T^2 = F_1^2 + F_2^2 + 4R^2.$$

Artilerie, Geniu şi Transmisiuni. I. Este posibil ca suma termenilor unei progresii aritmetice să fie un multiplu al raţiei?

II. Să se determine două numere a căror sumă este $2m$, iar suma logaritmilor lor este 2. Pot fi acele numere întregi?

III. Cineva împrumută o sumă, pe care se obligă să o achite în trei rate anuale decâte un milion de lei, cu o dobândă de 5%. Care este valoarea împrumutului?

IV. Un aliaj de aur cu aramă are titlul 0,7 şi cântăreşte 3 kgr. Ce greutate trebue afinată pentru ca titlul să devie 0,9.

Infanterie şi Cavalerie. I. Se dă următoarea progresie aritmetică :

$$\div 4,\ 16,\ 28,\ 40.$$

Cât ar trebui să mai adăogăm ultimelor două numere, pentru a o transforma în geometrică?

II. Suma a două numere este 100, iar suma patratelor lor este $2m$. Care sunt acele numere şi în ce caz ele sunt întregi?

III. Să se verifice identitatea :

$$\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) = \sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{b}{2}.$$

IV. Să se arate că lungimea tangentei comună la două cercuri tangente exterior, este media proporţională între diametrele cercurilor.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Societăţii Politechnice din România. An. LVII. Nr. 9. I. LINTEŞ : Problema pătrunderii, perforării şi a blindajului. H. BARKHAUSEN : Eine allgemeine Zweipol-Theorie.

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. Tome XXVI. No. 3. Bucureşti 1943. A. MYLLER : Indicatrice de al treilea ordin a curburei suprafeţelor. I. CREANGĂ : Asupra corespondenţei prin raze paralele între două congruenţe drepte. AL. GHIKA : Asupra prelungirii unei funcţiuni analitice pe un domeniu riemanian dat.

Revista Matematică din Timişoara. An. XXIII. No. 10. Decembrie 1943. D. POMPEIU : Raţionamentul aritmetic. R. BOUVAIST : Sur certaines quadriques de révolutions inscrites dans un tédraèdre. M. GHERMĂNESCU : Ecuaţia $x^2 + y^2 = az^n$ în întregi. Note matematice, Bibliografie, Probleme rezolvate şi propuse.

Ştiinţă şi Progres. An. IX. Nr. 1. Noembrie 1943. Timişoara. Redacţia şi Administraţia, Lic. Mil. „Mihai Viteazul" Timişoara. Abonamentul 400 lei pe an. După câţiva ani de reapariţie, această rev stă îşi continuă apariţia sub preşedinţia D-lui Col. VIRGIL IGNAT, cu concursul profesorilor dela partea ştiinţifică dela toate liceele militare din ţară, având ca secretar de redacţie

pe colegul nostru din societate D-l I. I. STAMATE. Numărul de faţă are următorul sumar: Cuvântul Comandantului Liceului „Mihai Viteazul", la deschiderea anului şcolar în Oct. 1943. N. ABRAMESCU: Metoda pentru aflarea conicei osculatoare la o curbă plană. VICTOR MARIAN: Viaţa lui GALILEO GALILEI (1564—1642). AMILCAR VASILIU: Podosfera. T. VESCAN: Un nou sistem de unităţi ştiinţifice. Sistemul natural al lui PLANCK. N. V. GHIRCOIAŞU: O pagină de aur din istoria matematicelor. Probleme rezolvate. Probleme propuse. † Profesorul ION TUTUC.

Revista continuă pe calea pe care şi-a trasat-o acum nouă ani.

I. I.

M. GHERMĂNESCU. Asupra metodei părţilor proporţionale. (Extras din *Revista Matematică din Timişoara*).

M GHERMĂNESCU. Sur une équation fonctionnelle qui caractérise des polynomes. (Ext. din *Mathematica*).

TH. IONESCU. Cinquante ans de relations scientifiques entre les savants roumains et l'Académie des sciences de Paris.

D-l TH. IONESCU, în o broşură de 89 pagini, a publicat o dare de seamă a Notelor ştiinţifice pe care le-a publicat oamenii de ştiinţă români în *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*, în ultimii 50 de ani.

Pentru lucrările apărute mai înainte de 1890, în număr foarte restrâns, a publicat o dare de seamă Dr. C. ISTRATI în *Buletinul Societăţii române de ştiinţe*. Lucrarea D-lui TH. IONESCU are două părţi: Prima dă pe anii din 1890—1940 lucrările publicate în toate domeniile ştiinţifice, deci şi în ştiinţele matematice, şi apoi un tablou alfabetic al autorilor cu arătarea lucrărilor lor. Concluziile care se scot din acest studiu este că *principala cauză care a favorizat desvoltarea ştiinţifică română este libertatea naţională şi politică a poporului român* şi apoi concluzia mai generală că *numai libertatea, o libertate complectă poate favoriza desvoltarea naturală a unei naţiuni.*

I. I.

CERERI

326. Pentru pluralul cuvântului *număr* se întrebuinţează de unii *numere* şi de alţii *numeri*. Ce argumente se dau pentru unul sau altul din aceste cuvinte?

I. I.

Răspuns la cererea Nr. 83, An. XXVII, pag. 197. Recomandăm cartea *Coordonnées barycentriques* par C. COŞNIŢĂ.

GH. B.

DIVERSE

a) **Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică"**

In şedinţa lunară de la 9 Decembrie 1943 a Societăţii *« Gazeta Matematică »*, s'a citit şi s'a aprobat raportul comisiunii pentru bursa *« Gh. Em. Filipescu »*. Bursa s'a acordat D-lui C. A. ŞEIBULESCU, student la Politechnica din Bucureşti. Aceasta este prima bursă ce se acordă din bursa *« Gh. Em. Filipescu »*.

In chiar şedinţă, D-l Ing. D. STAN a înmânat studentului C. A. ŞEIBULESCU bursa pe prima lună.

Pentru lunile următoare D-l C. A. ŞEIBULESCU va trece să-şi încaseze bursa la sediul societăţii.

b) **Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"**

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 18 Band. 9/10 (Doppel—) Heft. Sept./Oct. 1909. Leipzig.

Donat de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2577. *Se consideră o conică cu focarul în* O *şi un triunghiu* ABC, *circumscris conicei. Perpendicularele în* O *pe* OA, OB, OC *taie o tangentă în* A_1, B_1, C_1. *Să se arate că dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *sunt concurente.* (Enunţ rectificat).

M. GHERMĂNESCU.

Să transformăm figura prin polare reciproce, în raport cu un cerc cu centrul în focarul O. Focarul unei conice C fiind, prin definiţie, punctul de unde se pot duce tangente izotrope conicei, acestea se vor transforma în cele două izotrope ale planului, iar conica într'o conică ce trece prin aceste puncte, adică într'un cerc *c*.

Acestea stabilite, laturilor triunghiului circumscris ABC îi corespund vârfurile *a*, *b*, *c*, situate pe cercul *c*, iar tangentei la conica C îi corespunde un punct *m* pe cercul *c*. Deoarece perechile de puncte (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1) sunt văzute sub un unghiu drept din O, rezultă că polarele lor vor fi perpendiculare. Punctului A îi corespunde latura *bc*, iar lui A_1 o dreaptă dusă prin *m*, perpendiculară pe *bc*, conform observaţiei anterioare. Rezultă deci că dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 le vor corespunde, în figura transformată, picioarele perpendicularelor duse din punctul *m*, situat

pe cercul circumscris triunghiului *abc*, pe laturile acestuia, care sunt colineare, în virtutea bine cunoscutei teoreme a lui SIMSON. Cu alte cuvinte, problema dată constitue o transformare prin polare reciproce a teoremei lui SIMSON: punctelor colineare (proiecţiile lui *m* pe laturile triunghiului *abc*) din teorema lui SIMSON le vor corespunde deci dreptele concurente AA_1, BB_1, CC_1 din problema 2577. Punctul lor de concurenţă R va fi deci polul dreptei lui SIMSON în raport cu cercul considerat O.

Să demonstrăm, prin calcul, că figura polar reciprocă a unei conice în raport cu un cerc cu centrul într'un focar este un cerc.

Fie

$$(1)\quad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ecuaţia unei conice, iar $F(\alpha, \beta)$ unul din focare. Se ştie că α şi β satisface ecuaţiile

$$f'^2_\alpha - f'^2_\beta = 4(A - C) f(\alpha, \beta) \quad , \quad f'_\alpha f'_\beta = 4Bf(\alpha, \beta),$$

care pentru $\alpha = \beta = 0$ devine

$$(2)\qquad D^2 - AF = E^2 - CF \quad , \quad DE = BF.$$

Fie

$$(3)\qquad F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2z^2 = 0$$

ecuaţia omogenă a unui cerc cu centrul în focarul O (0, 0). Pentru a lua polara reciprocă a conicei (1) în raport cu cercul (3), avem nevoie de *ecuaţia tangenţială* a conicei (1), care se obţine scriind că dreapta

$$ux + vy + w = 0$$

este tangentă conicei (1); găsim, ţinând seama de (2),

$$(4)\quad \varphi(u, v, w) = (D^2 - AF)(u^2 + v^2) + (B^2 - AC) w^2 + 2(AE - BD) vw + 2(CD - BE) wu = 0.$$

Polar reciproca conicei (1) sau (4) în raport cu cercul (3) va fi dată de ecuaţia

$$\varphi(F'_x, F'_y, F'_z) = 0,$$

adică va fi cercul

$$(5)\quad (D^2 - AF)(x^2 + y^2) - 2R^2(CD - BE) xz - 2R^2(AE - BD) yz + R^4(B^2 - AC) z^2 = 0.$$

Reciproc, se arată pe aceeaşi cale că polara cercului

(6) $\psi(x, y) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0,$

în raport cu cercul (3) este conica

$f(x, y) = (\alpha^2 - r^2)x^2 + 2\alpha\beta xy + (\beta^2 - r^2)y^2 - 2\alpha R^2 x - 2\beta R^2 y + R^4 = 0,$

având un focar în origine.

Notă. 1°. Printr'o inadvertenţă, inerentă stării de pe vremea propunerii acestei probleme, în 1917 (autorul era ofiţer pe front), iar *Gazeta Matematică* se tipărea la laşi în condiţiuni foarte grele, enunţul acesta a apărut inexact.

2°. D-l Sublocot. M. FOCŞENEANU (azi Maior, membru al Gazetei) a trimis mai târziu o Notă, în care arăta că enunţul este inexact, fără a încerca să-l rectifice.

3°. D-l C. H. NICOLAU pe când era student, a observat că enunţul constitue transformarea prîn polare reciproce a teoremei lui SIMSON, dar nu a observat că trebuie rectificat.

4°. D-l G. G. CONSTANTINESCU a încercat o soluţie analitică, pe când era student, dar iarăşi fără să observe că enunţul trebuia rectificat.

5°. Am propus problema 2577 ca o aplicaţie a articolului D-lui A. PANTAZI, astăzi membru al Gazetei, *O aplicaţie a metodei polar-reciproce faţă de cerc,* din G. M., Vol. XXIII, 1917, p. 122—125. Nu am dat, până acum, soluţia acestei probleme, în aşteptarea unei soluţii bune, dar cum au trecut 26 ani dela propunerea sa, îi dau soluţia cu atât mai mult că nu s'a dat o rectificare a enunţului.

M. G.

PROBLEMA 2587. *Se cere locul geometric al punctului de întâlnire al dreptelor* AA_1, BB_1, CC_1, *din problema 2577, când dreapta* $A_1B_1C_1$ *variază, rămânând tangentă conicei.*

SUBLT. M. GHERMĂNESCU.

S'a văzut, în soluţia dată la pag. 300 problemei 2577, că punctul R este polul dreptei lui SIMSON Δ a punctului *m* faţă de triunghiul *abc*, în raport cu cercul cu centrul în O. Când R descrie o curbă, dreapta lui SIMSON Δ de mai sus va înfăşura o curbă. Ori, în condiţiile enunţului, triunghiul *abc* rămâne fix, iar *m* variază pe cercul circumscris acestuia. Se ştie, în acest caz, că dreapta lui SIMSON a punctului *m* înfăşoară o ipocicloidă cu trei puncte de întoarcere. Locul punctului R va fi deci curba polar reciprocă, faţă de cercul cu centrul în O considerat, a acestei ipocicloide.

Notă. D-l C. H. NICOLAU, pe când era student, a trimis o soluţie în care a arătat că locul lui R este polara înfăşurătoarei dreptei lui SIMSON, nsă a găsit o conică ca loc.

In ultimul moment observ că problema a mai fost propusă de curând, în forma ei esențială și într'un caz particular, sub Nr. 5179 de D-l I. C. VASILIU, care de sigur că nu a avut cunoștință de enunțul problemelor 2577 și 2587.

Problema generală la care se reduce problema 2587 a fost rezolvată de D-l ȘT. S. MIHĂIESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIII, pag. 374.

M. G.

PROBLEMA 3610. *Câte montaje distincte putem forma cu cinci lămpi, având fiecare o rezistență de 200 ohmi?*

Care sunt rezistențele realizate cu fiecare din aceste montaje?

E. A.

Problema aceasta nu prezintă niciun interes din punct de vedere matematic deoarece nu se poate stabili nicio relație simplă care să dea numărul de montaje ce se pot realiza cu un număr oarecare de rezistențe. In adevăr, mai multe rezistențe se pot lega în *serie*, adică una după alta, în *paralel*, adică una lângă alta, sau în o combinație de rezistențe legate în serie cu rezistențe legate în paralel. Este evident că modul de legare a acestor rezistențe nu urmează vreo lege oarecare și această legare se face numai în raport cu rezultatul ce urmărim în rezolvirea vreunei probleme tehnice.

Calculul unei rezistențe totale, formată din mai multe rezistențe se face ținând seamă de următoarele reguli stabilite în electrotehnică :

1. *Rezistența totală a unui circuit formată din mai multe rezistențe legate în ser.e este egală cu suma acestor rezistențe*, adică

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots \qquad (1)$$

2. *Inversul rezistenței totale a mai multor rezistențe legate în paralel este egal cu suma inverselor acestor rezistențe*, adică

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \qquad (2)$$

Cu ajutorul acestor relații se pot calcula ușor orice combinație de rezistențe.

In cazul problemei de față vom considera, în general că cele 5 rezistențe sunt diferite și au valorile R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Combinațiile posibile, valoarea rezistenței rezultante în cazul general

și valoarea rezistenței rezultante în cazul particular al problemei sunt date în tabloul următor:

Nr. combinației	Combinația de rezistențe	Valoarea rezistenței rezultante	Valoarea rezist. rezult. în cazul particular ohm
1	5 rezistențe în serie	$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$	1000
2	4 rezistențe în serie legate în paralel cu o rezistență	$\frac{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) R_5}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}$	160
3	3 rezistențe în serie legate în paralel cu o rezistență formată din 2 rezistențe în serie	$\frac{(R_1 + R_2 + R_3) (R_4 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}$	240
4	2 rezistențe în paralel legate în paralel cu o rezistență formată din 3 rezistențe în serie	$\frac{(R_1 + R_2 + R_3) R_4 R_5}{(R_1 + R_2 + R_3) R_4 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) R_5}$	$\frac{600}{7} = 85{,}7...$
5	2 rezistențe, formate din 2 rezistențe legate în serie, legate în paralel și în paralel cu o rezistență.	$\frac{(R_1 + R_2) (R_3 + R_4) R_5}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) R_5 + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)}$	100
6	3 rezistențe în paralel, în paralel cu o rezistență formată din 2 rezistențe în serie	$\frac{R_1 R_2 R_3 (R_4 + R_5)}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) (R_4 + R_5) + R_1 R_2 R_3}$	$\frac{400}{7} = 57{,}1...$
7	5 rezistențe în paralel	$\frac{R_1 R_2 R_3 R_4 R_5}{R_1R_2R_3R_4 + R_2R_3R_4R_5 \cdot R_3R_4R_5R_1 + R_4R_5R_1R_2 + R_5R_1R_2R_3}$	40
8	2 rezistențe în paralel, legate în serie cu 3 rezistențe	$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 + R_5$	700
9	2 rezistențe în paralel, legate în serie cu 2 rezistențe, totul în paralel cu o rezistență	$\frac{R_1 R_2 R_5 + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4) R_5}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_5 + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)}$	$\frac{1000}{7} = 142{,}8...$

Nr. combinației	Combinația de rezistențe	Valoarea rezistenței rezultante	Valoarea rezist. rezult. în cazul particular ohm
10	2 rezistențe în paralel, legate în serie cu o rezistență, totul în paralel cu 2 rezistențe legate în paralel	$\frac{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) R_4 R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 R_4 + R_4 R_5 + R_5 R_3) + (R_4 + R_5) R_1 R_2}$	75
11	3 rezistențe în paralel, legate în serie cu 2 rezistențe	$\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} + R_4 + R_5$	466,6 ...
12	3 rezistențe în paralel, legate în serie cu o rezistență, totul în paralel cu o rezistență	$\frac{(R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_3 R_4 R_1 + R_4 R_1 R_2) R_5}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)(R_4 + R_5) + R_1 R_2 R_3}$	$\frac{800}{7} = 114{,}2...$
13	4 rezistențe în paralel, legate în serie cu o rezistență	$\frac{R_1 R_2 R_3 R_4}{R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_3 R_4 R_1 + R_4 R_1 R_2} + R_5$	250
14	2 rezistențe în paralel, legate în serie cu 2 rezistențe în paralel și legate în serie cu o rezistență	$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_5$	400
15	2 rezistențe în paralel, legate în serie cu 2 rezistențe în paralel, totul în paralel cu o rezistență.	$\frac{(R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_3 R_4 R_1 + R_4 R_1 R_2) R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) R_5 + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + (R_1 + R_2) R_3 R_4}$	100
16	2 rezistențe în paralel în serie cu 3 rezistențe în paralel	$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4 R_5}{R_3 R_4 + R_4 R_5 + R_5 R_3}$	166,6 ...
17	2 rezistențe în serie, în paralel cu o rezistență, totul în serie cu 2 rezistențe	$\frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2) + R_3} + R_4 + R_5$	133,3

Nr. combinației	Combinația de rezistențe	Valoarea rezistenței rezultante	Valoarea rezist. rezult. în cazul particular ohm
18	2 rezistențe în serie, în paralel cu o rezistență, totul în serie cu o rezistență și totul apoi în paralel cu o rezistență	$\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)R_5+R_3R_4R_5}{(R_1+R_2+R_3)(R_4+R_5)+(R_1+R_2)R_3}$	125
19	2 rezistențe în serie, în paralel cu o rezistență, totul în serie cu 2 rezistențe în paralel	$\frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3}+\frac{R_4R_5}{R_4+R_5}$	333,3...
20	2 rezistențe în serie, în paralel cu 2 rezistențe în serie, totul în serie cu o rezistență	$\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}+R_5$	400
21	3 rezistențe în serie, în paralel cu o rezistență, totul în serie cu o rezistență.	$\frac{(R_1+R_2+R_3)R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}+R_5$	350

Rezultă dar că, cu 5 rezistențe diferite putem forma 21 montaje distincte. In cazul particular al problemei, 4 montaje au 2 câte 2 rezistențe egale astfel că deși avem 21 montaje distincte, avem numai 19 rezistențe diferite.

Pentru a vedea cum se aplică formulele generale (1) și (2) în cazul unui circuit complex, vom scrie relația care ne dă rezistența în cazul montajului 18. Avem:

$$R=\frac{1}{\frac{1}{\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}+R_4\right]}+\frac{1}{R_5}}=\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)R_5+R_3R_4R_5}{(R_1+R_2+R_3)(R_4+R_5)+(R_1+R_2)R_3}$$

Este de observat cum cu ajutorul unui număr mic de rezistențe identice se pot forma un număr destul de mare de rezistențe diferite. Această proprietate este folosită în electrotehnică pentru construirea de rezistențe în diferite scopuri.

I. S. A.

PROBLEMA 4192. *Să se determine cel mai mic număr întreg* N *şi numărul întreg corespunzător* n, *astfel ca:*

a) *Intregii conţinuţi în fracţiile*

$$\frac{N}{n}, \frac{N+1}{n+1}, \frac{N+2}{n+2}, \frac{N+3}{n+3}, \frac{N+4}{n+4}, \frac{N+5}{n+5}$$

să fie numere consecutive.

b) *Aceeaşi chestiune pentru fracţiile dela* (N/n) *până la* $(N+10/n+10)$.

c) *Generalizare.*

I. B. FLORESCU.

Soluţia propunătorului. a) Pentru ca problema să fie satisfăcută, trebue ca

$$4 < \frac{N}{n} - \frac{N+5}{n+5} < 6$$

$$\therefore \quad \frac{4}{5} n(n+5) + n < N < \frac{6}{5} n(n+6) + n. \qquad (1)$$

Prin urmare valorile probabile ale lui N se găsesc în jurul lui $n(n+5)$. Fie deci

$$N = n(n+5) + \alpha \qquad (2)$$

unde α este un întreg, pozitiv sau negativ, astfel încât condiţiile (1) să fie satisfăcute.

Din (1) se vede că cea mai mică valoare a lui N, în condiţiile enunţului, se găseşte pentru cele mai mici valori ale lui n.

Ţinând seamă de (2), avem

$$E\left(\frac{N}{n}\right) = E\left[\frac{n(n+5)+\alpha}{n}\right] = E\left[n+5+\frac{\alpha}{n}\right]$$

$E\left(\frac{N}{n}\right)$ însemnând întregii cuprinşi în $\frac{N}{n}$. Apoi

$$E\left(\frac{N+1}{n+1}\right) = E\left[n+4+\frac{\alpha-3}{n+1}\right]; \quad E\left(\frac{N+2}{n+2}\right) = E\left[n+3+\frac{\alpha-4}{n+2}\right];$$

$$E\left(\frac{N+3}{n+3}\right) = E\left[n+2+\frac{\alpha-3}{n+3}\right]; \quad E\left(\frac{N+4}{n+4}\right) = E\left[n+1+\frac{\alpha}{n+4}\right];$$

$$E\left(\frac{N+5}{n+5}\right) = E\left[n+\frac{\alpha+5}{n+5}\right].$$

Pentru ca N să existe trebue, mai întâi, ca fracţiile

$$\frac{\alpha}{n} \; ; \; \frac{\alpha-3}{n+1} \; ; \; \frac{\alpha-4}{n+2} \; ; \; \frac{\alpha-3}{n+3} \; ; \; \frac{\alpha}{n+4} \; ; \; \frac{\alpha+5}{n+5} \qquad (3)$$

să fie de acelaşi semn. Să le considerăm pozitive.

In acest caz fiecare trebue să fie mai mare sau egală cu un întreg s şi mai mică decât $(s+1)$, adică

$$sn \leqslant \alpha < (s+1)\,n \; ; \; sn+s \leqslant \alpha-3 < (s+1)\,(n+1);$$

$$sn+2s \leqslant \alpha-4 < (s+1)\,(n+2)$$

$$sn+3s \leqslant \alpha-3 < (s+1)\,(n+3); \; sn+4s \leqslant \alpha < (s+1)\,(n+4);$$

$$sn+5s \leqslant \alpha+5 < (s+1)\,(n+5).$$

Aceste neegalităţi sunt satisfăcute simultan de următoarele valori ale lui s şi α

$$s=0 \; , \; 4 \leqslant \alpha < n \; ; \; s=1 \; , \; n+6 \leqslant \alpha < 2n;$$

$$s=2 \; , \; 2n+9 \leqslant \alpha < 3n;$$

$$s=3 \; , \; 3n+12 \leqslant \alpha < 4n \; ; \; s=4 \; , \; 4n+16 \leqslant \alpha < 5n;$$

$$s \geqslant 5 \; , \; sn+5\,(s-1) \leqslant \alpha < (s+1)\,n.$$

Din acest şir de neegalităţi se vede că cu cât s este mai mare cu atât trebue să luăm pentru α şi n valori mai mari care vor conduce la valori din ce în ce mai mari pentru N. Deci N cel mai mic corespunde la cele mai mici valori ale lui α şi n care în cazul *a)* sunt

$$\alpha = 4 \; ; \; n = 5 \quad \text{şi deci} \quad N = 5 \times 10 + 4 = 54.$$

Avem în adevăr

$$E\left(\frac{54}{5}\right) = 10 \; ; \; E\left(\frac{55}{6}\right) = 9 \; ; \; E\left(\frac{56}{7}\right) = 8 \; ; \; E\left(\frac{57}{8}\right) = 7 \; ; \; E\left(\frac{58}{9}\right) = 6;$$

$$E\left(\frac{59}{10}\right) = 5.$$

Dacă fracţiile şirului (2) sunt toate negative, atunci ele trebue să fie mai mari sau egale cu $-(s+1)$ şi mai mici decât $-s$. Procedând ca în cazul precedent găsim:

$$s=0\ ,\ -n+2\leqslant\alpha<-5\ ;\ s=1\ ,\ -2n+1\leqslant\alpha<-n-10;$$

$$s=2\ ,\ -3n\leqslant\alpha<-2n-15$$

$$s\geqslant 3\ ,\ -(s+1)n\leqslant\alpha<-sn-5(s+1)$$

care conduce, pentru valorile minime, la

$$\alpha=-6\ ,\ n=8\ ,\ N=8\times 13-6=98$$

mai mare decât în cazul precedent. Deci soluţiile cerute la *a)* sunt

$$n=5\quad\text{şi}\quad N=54.$$

b) Urmând cuvânt cu cuvânt raţionamentul dela *a)* găsim:

$$\alpha=20\ ,\ n=21\ ,\ N=21\times 31+20=671$$

$$E\left(\frac{671}{21}\right)=31\ ;\ E\left(\frac{672}{22}\right)=30\ ;\ E\left(\frac{673}{23}\right)=29\ ;\ E\left(\frac{674}{24}\right)=28;$$

$$E\left(\frac{675}{25}\right)=27\ ;\ E\left(\frac{676}{26}\right)=26\ ;\ E\left(\frac{677}{27}\right)=25\ ;\ E\left(\frac{678}{28}\right)=24;$$

$$E\left(\frac{679}{29}\right)=23\ ;\ E\left(\frac{680}{30}\right)=22\ ;\ E\left(\frac{681}{31}\right)=21.$$

c) In cazul general se urmează acelaşi raţionament şi se găseşte că pentru ca numerele

$$E\left(\frac{N}{n}\right);\ E\left(\frac{N+1}{n+1}\right);\ \ldots\ E\left(\frac{N+p-1}{n+p-1}\right);\ E\left(\frac{N+p}{n+p}\right)$$

să fie consecutive, cele mai mici valori ale lui N şi valorile corespunzătoare ale lui n sunt date de

$n=m^2+1$, $N=m^4+2m^3+4m^2+2m+2$ pentru $p=2m+1$

$n=m^2-m+1$, $N=m^4+2m^2-m+1$ pentru $p=2m$.

I. B. FLORESCU.

Problema a fost rezolvată parţial de D-l Prof. GH. CONSTANTINESCU.

PROBLEMA 5055. *Să se rezolve sistemul de ecuații:*

$$\sin^2 x \cos^2 y = \sin^2 y \cos^2 z = \sin^2 z \cos^2 x = a.$$

Discuție.

LT. C. D. IONESCU-ȚIU.

Soluție. Notăm $\sin^2 x = u$, $\sin^2 y = v$, $\sin^2 z = w$.

Avem

$$u - uv = a \quad ; \quad \text{de unde} \quad v = \frac{u-a}{u} = 1 - \frac{a}{u}$$

$$v - vw = a; \quad \text{de unde} \quad w = \frac{v-a}{v} = \frac{u-a-au}{u-a} = 1 - \frac{au}{u-a}.$$

Introducem valorile lui u și w în ecuația

$$w - wu = a$$

și avem

$$\frac{(a-1)(u^2-u+a)}{u-a} = 0.$$

Se observă din enunț că u, v, w și a trebue să aibă valori cuprinse între zero și unu.

Pentru $u = \alpha$, avem $v = \frac{1}{\alpha}$ și $w = \frac{1}{1-\alpha}$.

Inegalitățile

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad ; \quad 0 \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha} \leqslant 1 \quad ; \quad 0 \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \leqslant 1$$

nu pot avea loc simultan, deci sistemul este imposibil.

Pentru $u = a \neq 0$, avem $v = 0$, $w = -\infty$ dacă $u = a = 0$, avem

$$u = v = w = 0.$$

Pentru $u^2 - u + a = 0$, avem

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2},$$

a și u fiind pozitive subunitare.

Este necesar ca să avem $1 - 4a \geqslant 0$ adică

$$0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}.$$

Pentru aceste valori ale lui a, sistemul are soluţiunile:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \quad ; \quad v = 1 - \frac{a}{u} = 1 - \frac{2a}{1 \pm \sqrt{1-4a}}$$

$$w = 1 - \frac{a(1 \pm \sqrt{1-4a})}{1 \pm \sqrt{1-4a} - 2a}.$$

Pentru $a = 0$, avem

$$u = v = w = 0 \quad \text{şi} \quad u = v = w = 1$$

pentru $a = \frac{1}{4}$, avem $u = v = w = \frac{1}{2}$

pentru $a = \frac{1}{8}$, avem

$$u = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad v = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} \pm 1)},$$

$$w = 1 - \frac{\sqrt{2} \pm 1}{6\sqrt{2} \pm 8},$$

u, v şi w pot avea pe rând una din valorile aflate.

Soluţii bune s'au primit dela D-nii: C. MIHU (Chişinău), EM. S. MODÂLCĂ (Tr.-Severin); M. C. NICULESCU (Liceul T. Maiorescu, Bucureşti), N. D. ŞTEFĂNESCU (Bucureşti), I. I. STAMATE (Student, Cluj), SUBLT. M. GRUMĂZESCU, SUBLT. GR. MARTEŞ, AD. O. ŞAICHIN (elev-inginer, Bucureşti), D. D. BOIANGIU (Tr.-Severin), OCT. E. GHEORGHIU (Bucureşti), MIHAI PETRESCU (Cernăuţi) şi I. IANCU (elev-inginer, Iaşi).

Soluţii parţiale s'au primit dela D-nii: PANTELIMON CONSTANTIN, AL. I. ROHR, M. VASILESCU-STABU, GH. V. DOVGAN, C. I. COTULBEA, CONST. SULIŢEANU, I. V. JAREGHIE şi H. REISCHER.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 5137. *Fie* I *centrul cercului înscris triunghiului* ABC, α, β, γ *picioarele bisectoarelor şi* M *un punct arbitrar pe dreapta* $\beta\gamma$; *perpendiculara în* I *pe* MI *taie pe* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ *în* γ', β'; $M\beta'$, $M\gamma'$ *taie pe* AB, AC *în* β'', γ''.

Să se arate că $\beta''\gamma''$ *este tangentă cercului* I.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de tangență ale cercului I cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC.

Polarele punctelor α, β, γ față de cercul I sunt perpendicularele din A_1, B_1, C_1 respectiv pe $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ deci sunt paralele respectiv cu B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.

Deci, transformând figura prin polare reciproce față de cercul I: triunghiul ABC se transformă în triunghiul $A_1B_1C_1$; transformatul triunghiului $\alpha\beta\gamma$ este anticomplementarul $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ al triunghiului $A_1B_1C_1$; polara punctului M este o dreaptă oarecare Δ ce trece prin α, polul dreptei $\beta\gamma$; polara punctului β' este perpendiculara $\beta_1\beta_1'$ pe Δ, iar polara punctului γ' este perpendiculara $\gamma_1\gamma_1'$ pe Δ; polara lui β'' este $C_1\beta_1'$, iar a lui γ'' este $B_1\gamma_1'$; în sfârșit polul dreptei $\beta''\gamma''$ este punctul D, intersecția dreptelor $B_1\gamma_1'$, $C_1\beta_1'$.

Avem deci de demonstrat următoarea propoziție:

(T). *Fie* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *anticomplementarul triunghiului* $A_1B_1C_1$ *înscris în cercul* I, *iar* β_1', γ_1' *proiecțiile vârfurilor* β_1, γ_1 *pe o dreaptă* Δ *ce trece prin* α_1. *Dreptele* $B_1\gamma_1'$, $C_1\beta_1'$ *se taie pe cercul* I.

Intr'adevăr, în triunghiurile dreptunghice $\alpha_1\gamma_1\gamma_1'$, $\alpha_1\beta_1\beta_1'$ avem

$$\sphericalangle\, \gamma_1\alpha_1\gamma_1' = \sphericalangle\, B_1\gamma_1'\alpha_1 = \sphericalangle\, \beta_1'\gamma_1'D \quad \text{și} \quad \sphericalangle\, \beta_1\alpha_1\beta_1' = \sphericalangle\, C_1\beta_1'\alpha_1,$$

iar $\sphericalangle\, B_1DC_1 =$ sau suplimentar cu $\alpha_1 = A_1$ adică punctul D se găsește pe cercul I.

P. P. DRĂGHICESCU
(Liceul Militar, Iași).

Notă. 1°. Propoziția transformată (T) este cunoscută [1]).

2°. Dacă alegem pe M în punctul unde perpendiculara în I pe Al taie pe $\beta\gamma$ obținem propoziția:

In triunghiul ABC, *circumscris cercului de centru* I *fie* α, β, γ *picioarele bisectoarelor; perpendiculara în* I *pe* Al *taie pe* $\beta\gamma$ *în* M; αM *este tangentă cercului* I.

PROBLEMA 5394. *Să se arate că suma primelor* n *numere poligonale de* m *laturi, din prima speță, nu poate fi egală niciodată cu suma primelor* n *numere poligonale, de* m *laturi, din a doua speță.*

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

---

1) De ex. *Culegere de Probleme de Geometrie.* V, 11.

Soluție dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Numerele poligonale de m laturi, de ordinul i, din prima speță, sunt:

$$P_i^m = i + (m-2) \cdot \frac{i(i-1)}{2}.$$

Iar numerele poligonale de m laturi, de ordinul i, din a doua speță, sunt:

$$Q_i^m = 1 + m \cdot \frac{i(i-1)}{2}.$$

Observăm că:

$$P_i^m + (i-1)^2 = Q_i^m.$$

Deci $Q_i^m > P_i^m$ pentru $i > 1$, deci și suma primelor n numere va fi mai mare.

Notă. D-l STAICU a arătat că numai $Q_i^m > P_i^m$ fără a trage concluziuni pentru sume.

PROBLEMA 5565. *Se dă un cerc de centru* O *și rază* r. *O tangentă variabilă la cerc taie axele perpendiculare* Ox *și* Oy *în* A *și* B. *Să se scrie ecuația parabolelor tangente la* Ox *în* A *și la* Oy *în* B. *Să se afle:* 1° *locul vârfurilor parabolelor;* 2° *locul intersecției directoarei cu axa parabolei;* 3° *înfășurătoarea axei parabolei.*

N. ABRAMESCU.

Vom reaminti mai întâi unele proprietăți ale parabolei.

I. Directoarea parabolei este locul punctelor de unde se duc tangente perpendiculare la parabolă. Parabola considerată fiind tangentă în A la Ox și B la Oy, O aparține directoarei.

II. Pentru parabola $y^2 - 2px = 0$ cu focarul $M\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ și directoarea $x + \frac{p}{2} = 0$, $P\left(-\frac{p}{2}, \lambda\right)$ fiind un punct al directoarei, dreapta MP este perpendiculară pe polara lui P care trece prin focarul M. In cazul considerat, M fiind un punct variabil al cercului

cu raza r, tangenta AB în M la cerc este perpendiculară în M pe OM. AB fiind polara lui O în raport cu parabola considerată, rezultă că M este focarul acestei parabole și deci locul focarelor parabolelor este cercul de centru O și rază r.

III. Se știe că proiecțiile focarului pe tangentele la parabolă (podară focarului în raport cu parabola) este tangenta în vârful parabolei. Deci dreapta CD care unește proiecțiile lui M pe Ox și Oy este tangentă în vârful parabolei considerate, iar vârful S este intersecția dreptei CD cu perpendiculara din M pe CD. Axa parabolei este dreapta SM.

M $(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ fiind un punct variabil al cercului $x^2+y^2=r^2$ cu centrul O și raza r, tangentă în M la cerc are ecuația $x\cos\alpha+y\sin\alpha=r$. Ecuația conicelor tangente în A la Ox și B la Oy este

$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha-r)^2+2\lambda xy=0.$$

Ca să fie parabole trebuie

$$\cos^2\alpha\sin^2\alpha-(\lambda+\sin\alpha\cos\alpha)^2=0 \quad \therefore \quad \lambda(\lambda+\sin 2\alpha)=0.$$

Pentru $\lambda=0$ avem două drepte confundate, care nu corespund problemei. Deci $\lambda=-\sin 2\alpha$ și ecuația parabolelor este

$$(1)\quad \begin{cases} F(x,\ y)=(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2-r(2x\cos\alpha+2y\sin\alpha-r)=0, \\ F(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2+\ldots=0. \end{cases}$$

1°. Locul vârfurilor se obține eliminând α între (1) și ecuația axei $aF'_x+bF'_y=0$, $a=\cos^2\alpha$, $b=-\sin\alpha\cos\alpha$,

$$(2)\qquad x\cos\alpha-y\sin\alpha=r\cos 2\alpha.$$

Ecuația (1) devine

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=\frac{r}{2}(1+\cos^2 2\alpha).$$

Din această ecuație și (2) avem $x=r\cos^3\alpha$, $y=r\sin^3\alpha$. Inlocuind în $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, obținem ca loc al vârfurilor, astroida

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}.$$

Locul se mai obţine şi astfel. Proiecţiile pe axe ale focarului $M(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ fiind $C(r\cos\alpha, 0)$, $D(0, r\sin\alpha)$, ecuaţia dreptei CD este

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha - r\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

şi reprezintă tangenta în vârful parabolei. Perpendiculara din focarul M pe CD,

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha = r\cos 2\alpha,$$

este axa. Eliminând pe α între aceste ecuaţii, obţinem aceeaşi curbă, ca loc al vârfurilor.

In fine, se vede că $CD = r$, fie analitic, fie din dreptunghiul OCMD, unde $CD = OM = r$. Deci segmentul CD de mărime constantă variază cu extremităţile C şi D pe axele Ox şi Oy. Perpendicularele în C pe Ox şi D pe Oy se taie în M, centrul instantaneu de mişcare al figurii de formă invariabilă CD. Se ştie că punctul de contact al lui CD cu înfăşurătoarea sa este piciorul perpendicularei din centrul instantaneu M pe CD, adică vârful. Dar se ştie că înfăşurătoarea dreptei CD = const., cu capetele pe axe este o astroidă, o ipocicloidă cu patru puncte de întoarcere, formată din patru ramuri simetrice în raport cu axele, una fiind tangentă la axe în $(r, 0)$, $(0, r)$, cu convexitatea către O.

2^0. Directoarea parabolei trecând prin O şi fiind perpendiculară pe axa (2), este $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{x}$. Din aceasta obţinem $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$ şi înlocuind în (2), avem

$$(x^2 + y^2)^3 = r^2 (x^2 - y^2)^2.$$

Este o curbă cu patru bucle simetrice în raport cu axele, bisectoarele axelor, cu originea, având în origine un punct cuadruplu, unde tangentele sunt bisectoarele axelor. (Rozacee, sau trifoi cu patru foi).

3^0. Infăşurătoare axei se obţine eliminând α între ecuaţia (2) a axei şi derivata în raport cu α,

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = 2r\cos 2\alpha.$$

De unde

$$x = r(\cos\alpha + \sin\alpha \sin 2\alpha) \quad , \quad y = r(\sin\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha),$$

$$x + y = r(\cos\alpha + \sin\alpha)(1 + \sin 2\alpha),$$

$$x + y = r(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha) =$$

$$= r(\cos\alpha + \sin\alpha)^3,$$

$$x - y = r(\cos\alpha - \sin\alpha)^3,$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{x+y}{r}} \quad , \quad \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{x-y}{r}}.$$

Rezolvând în raport cu $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$ şi înlocuind în $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obţinem

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2r^{\frac{2}{3}}.$$

Rotind axele de 45^0, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$, ecuaţia devine $X^{\frac{2}{3}} + X^{\frac{2}{3}} = (2r)^{\frac{2}{3}}$, o astroidă de mărime dublă celei dela 1^0.

Au rezolvat problema D-nii: P. DRĂGHICESCU, A. N. POPA, MIREL D STOENESCU, E. WEGENER.

N. A.

PROBLEMA 5652. *Să se demonstreze că dacă*

$$B'C - BC' = AC^2,$$

ecuaţia lui RICATTI $y' = Ay^2 + By + C$ *este integrabilă şi să i se găsească integrala generală.*

Accentul înseamnă derivare.

M. GHERMĂNESCU.

Relaţia dată se mai poate scrie

$$A = \left(\frac{B}{C}\right)',$$

iar ecuaţia devine

$$\left[\left(\frac{1}{y}\right)' + \left(\frac{B}{C}\right)'\right] + \frac{B}{y^2}\left[\frac{1}{y} + \frac{B}{C}\right] = 0.$$

Sub această formă, se vede uşor că admite integrala particulară $\frac{1}{y}+\frac{B}{C}=0$ sau $y=-\frac{C}{B}$, aşa că făcând schimbarea de funcţie $y=\frac{1}{z}-\frac{C}{B}$, ecuaţia dată devine

$$z'-2C\left(\frac{B}{C}\right)' z+\left(\frac{B}{C}\right)'=0,$$

ecuaţie lineară de primul ordin, a cărei integrală generală se obţine cu ajutorul unei formule cunoscute, avem

$$z=e^{2\int C\left(\frac{B}{C}\right)' dx}\left[C_1-\int\left(\frac{B}{C}\right)' e^{-2\int C\left(\frac{B}{C}\right)' dx}dx\right],\quad y=\frac{1}{z}-\frac{C}{B},$$

C_1 fiind o constantă arbitrară.

Notă. Soluţie analoagă a dat D-l RADU P. VOINEA.

PROBLEMA 5755. *Să se demonstreze că cu distanţele unui punct la muchiile unui tetraedru echilateral se poate construi întotdeauna un tetraedru.*

I. C. VASILIU.

Soluţia acestei probleme este cuprinsă în articolul „*Extinderea în spaţiu a unei teoreme a D-lui Profesor* POMPEIU“ publicat la pag. 122 din acest an.

Vom publica soluţiile ce ni se vor trimite şi care vor fi diferite de aceea din articolul citat.

PROBLEMA 5825. *Care este cel mai mic patrat care se poate forma scriind alături două patrate?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: SLT. M. AL. VASILESCU-STABU, A. H. CUBAT, MIRCEA C. MANOLACHE (Politechnica din Bucureşti), CĂP. EUG. D. IACOB, E. N. WEGENER (Bucureşti), I. A. BARBU (Liceul „Ioniţă Asan“, Caracal), M. D. CÂRSTEA, V. D. PĂLĂCEANU, BARBU I. POPESCU, GH. G. VRÂNCEANU, I. V. ROGOZ

(Liceul militar „Mihai-Viteazul", Timişoara), GHEORGHE A. GRIGORE (clasa a VII-a particulară), ILIE D. CONSTANTINESCU, D. D. NACHE (Liceul militar, Iaşi), M. SP. MANOLIU (Liceul „Codreanu", Bârlad), GEORGE M. NICOLAE (Colegiul Naţional „Carol I", Craiova).

Să vedem dacă există patrate de două cifre care să se scrie cu două patrate alături din câte o cifră, adică cu patratele 1, 4 sau 9. Patratele de două cifre în aceste condiţii ar putea fi 14, 19, 41, 49, 91, 94. Dintre acestea numai 49 este patratul lui 7 şi prin urmare este soluţie a problemei.

Cu două cifre identice nu există patrat de două cifre căci el se divide prin 11 dar nu se divide cu $11^2 = 121 > 100$.

Notă. D-l E. WEGENER a dat şi soluţia formală $0^2 . i^2 = (01)^2$. D-sa şi D-l CĂP. E. ST. IACOB au mai dat numărul de trei cifre $169 = 13^2$. D-l CĂP. ST. IACOB a mai dat numărul de trei cifre $361 = 19^2$ şi numărul de patru cifre $1681 = 41^2$.

D-l M. SP. MANOLIU a dat şi soluţiile de forma 01, 04, 09, iar D-l SLT. M. AL. VASILESCU-STABU a dat soluţiile 169, 1444, 1681 şi a arătat că toate numerele de forma $(N^2)\,(00\ldots0_{2p}) = (N \times 10r)^2$ răspund problemei.

Observare. Problema este cunoscută: a se vedea *Culegere de Probleme de Aritmetică*, Partea I, Capitolul XLVIII, pag. 269, unde se tratează în general problema patratelor *sudate*. Am propus problema 5825 ca o aplicare a numărului 49 care arată numărul anilor de apariţie al actualului Volum al *Gazetei Matematice*. Sunt soluţii mai mici ca 49 dacă le căutăm în alte sisteme de numeraţie decât cel zecimal. Astfel, fie numărul ab scris în sistemul cu baza B. Numărul este $(a\mathrm{B} + b)$ în care B este superior lui a şi b. Valoarea acestui număr în sistemul zecimal este $(a \times \mathrm{B} + b)$. Ca să fie cât mai mic trebue ca a şi b să fie patrate cât mai mici şi anume $a = 1$ şi $b = 4$. B trebue luat aşa ca $(\mathrm{B} + 4)$ să fie un patrat cât mai mic. Baza $\mathrm{B} = 5$, dă patratul $9 = 3^2$ şi deci *soluţia este 14 în sistemul cu baza 5.* Dacă cifrele pot fi identice, găsim ca *soluţie un patrat mai mic şi anume pe 11 în sistemul cu* $\mathrm{B} = 3$ care ne dă patratul $4 = 2^2$.

I. I.

PROBLEMA 5831. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\mathrm{A}\sin^2 x + \mathrm{B}\sin^2(x + a) + \mathrm{C} = 0.$$

Caz particular:

$$\mathrm{A} = 10 \;;\; \mathrm{B} = 10\,(\sqrt{3} + 1) \;;\; \mathrm{C} = -5 \;;\; a = \frac{\pi}{6}.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

Soluția 1-a dată de D-nii: MARCEL COTARIU, AUREL CUBAT, GEORGE NICOLAE și SLT. PANTELIMON CONSTANTIN.

Ecuația se scrie succesiv:

$$A\sin^2x + B(\sin^2x\cos^2a + \sin^2a\cos^2x + 2\sin a\cos a\sin x\cos x) + C = 0$$

$$B\sin a\cos a\sin 2x + (A + B\cos^2a - B\sin^2a)\sin^2x + (B\sin^2a + C) = 0$$

$$B\sin a\cos a\sin 2x + (A + B\cos 2a)\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + (B\sin^2a + C) = 0$$

$$2B\sin a\cos a\sin 2x - (A + B\cos 2a)\cos 2x + (2B\sin^2a + 2C + A + B\cos 2a) = 0$$

$$(A + B\cos 2a)\cos 2x - B\sin 2a\sin 2x = B + B + 2C.$$

Punând

$$\frac{A + B\cos 2a}{B\sin 2a} = \operatorname{ctg}\varphi$$

se obține $$\cos(2x + \varphi) = \frac{A + B + 2C}{B\sin 2a}\cdot\sin\varphi$$

In cazul particular avem

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{10 + 10(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{2}}{10(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{15 + 5\sqrt{3}} = 1 \quad \varphi = 45^0$$

$$2x + \varphi = k\,.\,360^0 \pm 35^0\,15'53''$$

$$x = \frac{1}{2}[(8k-1)\,45^0 \pm 35^0 15'53''] \text{ în grade sexagesimale,}$$

sau $$x = \frac{1}{2}[(8k-1)\,50^G \pm 39^G,1830] \text{ în grade centezimale,}$$

sau $$x = \frac{1}{2}[(8k-1)\,0{,}785398 \pm 0{,}615485] \text{ în radiani,}$$

k un întreg oarecare pozitiv sau negativ.

Soluţia 2-a dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, N. V. IONESCU, MIRCEA MANOLACHE, V. PĂLĂCEANU, G. VRÂNCEANU şi EUG. WEGENER:

Ecuaţia din enunţ se poate scrie

$$\sin^2 x\,(A + B\cos 2a) + B\sin x\cos x\sin 2a + B\sin^2 a + C = 0$$

Notând

$$\operatorname{tg} x = y.$$

Reţinem

$$\frac{y^2}{1+y^2}(A + B\cos 2a) \pm \frac{y}{1+y^2} B\sin 2a + B\sin^2 a + C = 0$$

$$y^2 (A + B\cos^2 a + C) \pm y\, B\sin 2a + B\sin^2 a + C = 0$$

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{+ B\sin a\cos a \pm \sqrt{-C(A + B + C) - AB\sin^2 a}}{A + B\cos^2 a + C}.$$

Pentru aplicaţia numerică, introducând în formula precedentă datele din enunţ, obţinem pentru x aceleaşi valori ca şi în prima soluţie.

V. GH.

EXERCIŢII

14. Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x^n & 0 & c^n & b^n \\ a^n & x^n + a^n & a^n & a^n \\ b^n & b^n & x^n + b^n & 0 \\ c^n & c^n & 0 & x^n + c^n \end{vmatrix} = 0$$

CPT. EUG. ŞT. IACOB.

R. Partea I-a a ecuaţiei propuse se transformă astfel:

$$(x^n + a^n + b^n + c^n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^n & x^n + a^n & a^n & a^n \\ b^n & b^n & x^n + b^n & 0 \\ c^n & c^n & 0 & x^n + c^n \end{vmatrix} =$$

$$= (x^n + a^n + b^n + c^n) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^n & x^n & 0 & 0 \\ b^n & 0 & x^n & -b^n \\ c^n & 0 & -c^n & x^n \end{vmatrix} =$$

$$= (x^n + a^n + b^n + c^n)\, x^n (x^{2n} - b^n c^n) = 0.$$

Deci:

$$x^n = -(a^n + b^n + c^n) \quad , \quad x^n = 0 \quad , \quad x^{2n} = b^n c^n$$

cari dau respectiv:

$$x = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

$$x = 0 \quad , \quad x = \pm\sqrt{bc}.$$

15 In orice triunghiu avem relaţiunile

$$(p-a)(b-c)^2 + (p-b)(c-a)^2 + (p-c)(a-b)^2 = 4S(R-22)$$

$$-p(b-c)^2 + (p-c)(c+a)^2 + (p-b)(a+b)^2 = 4S(R+2r_a).$$

P, P. DRĂGHICESCU.

R. 1°. Avem

$$\Sigma(p+a)(b-c)^2 = p\,\Sigma(b-c)^2 - \Sigma a(b-c)^2 = 2p(\Sigma a^2 - \Sigma bc) - \Sigma a^2(b+c) + 6abc$$

Insă

$$\Sigma a^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2$$

$$\Sigma bc = p^2 + 4Rr + r^2 \text{ şi } abc = 4RS.$$

$$\Sigma a^2(b+c) = 2p\,\Sigma a^2 - \Sigma a^3 = 2p\,\Sigma a^2 - (a+b+c)^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$= 2p\,\Sigma a^2 - 8p^3 + 3(2p-a)(2p-b)(2p-c) = 2p(p^2 - 2Rr + r^2)$$

$$\therefore \Sigma(p-a)(b-c)^2 = 4pr(R-2r) = 4S(R-2r).$$

2°. Dezvoltări analoage ca la 1° ţinând seamă că

$$p(p-b)(p-c) = Sr_a.$$

PROBLEME PROPUSE

5890. Când $(a^3 + b^2)$ se divide cu $(a^2 + b^3)$? Să se dea exemple numerice.

I. IONESCU.

5891. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$E\left(\frac{x}{5}\right) = \Sigma\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2,$$

unde $E(i)$ înseamnă întregii lui i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5892. Fie $E(x)$ întregii lui x, a şi q două numere întregi oarecare, iar p un întreg pozitiv. Să se arate că avem:

$$\sum_{1}^{p} E\left(\frac{a+iq}{p}\right) = d \cdot E\left(\frac{a}{d}\right) + \frac{(p+1)(q-1)+d+1}{2},$$

unde d este codivizorul maxim al lui p, q.

ION B. FLORESCU.

5893. Să se pună expresia

$$a^4 - a^2b^2 + b^4$$

sub forma unei sume de două patrate.

M. GERMĂNESCU.

5894. Să se studieze natura seriei

$$u_n = \frac{(c+a)(2c+a)\ldots(\overline{n-1}\,c+a)}{(c+b)(2c+b)\ldots(\overline{n-1}\,c+b)}$$

a, b, c fiind pozitive.

N. N. MIHĂILEANU.

5895. Să se rezolve neegalităţile

$$L(1+x) > \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^{2n}}{2n}$$

$$L(1+x) < \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Să se deducă apoi valorile lui x, care satisfac deodată ambele neegalităţi. L înseamnă logaritmul în baza e.

TH. ANGHELUŢĂ.

5896. Să se construiască triunghiul căruia i se cunoaşte perimetrul, diferenţa între latura cea mai mare şi latura mijlocie şi diferenţa între latura mijlocie şi latura cea mai mică.

G-L GH. BUICLIU.

5897. Fie ABCD un patrulater convex de arie S şi A′, B′, C′, D′ mijloacele laturilor BC, CD, DA, AB. Dreptele AA′, BB′, CC′, DD′, prin intersecţiile lor mutuale, formează un alt patrulater convex, interior patrulaterului ABCD şi de arie S′. Să se demonstreze, că avem

$$5S' \leqq S \leqq 6S'$$

şi să se determine cazurile în care una din aceste inegalităţi devine o egalitate.

TIB. POPOVICIU.

5898. Fie D piciorul bisectoarei interioare a unghiului C din triunghiul ABC. Să se demonstreze, că, dacă avem una din relaţiile

$$a) \qquad \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2} + 2 \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - 1 = 0$$

$$b) \qquad \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 2 \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}},$$

triunghiul ABC este dreptunghic.

GH. D. SIMIONESCU.

5899. Să se demonstreze că într'un triunghiu automedian, dreptele care unesc punctul lui LEMOINE cu centrele cercurilor înscrise şi exînscrise, formează un fascicol armonic.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

5900. Fie I_0, I_1, I_2, I_3 cele patru cercuri tritangente laturilor unui triunghiu şi $C_{\alpha\beta}$ cercul de asemănare al cercurilor I_α şi I_β ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$). Să se arate, că:

1°. Grupele decâte trei cercuri

(C_{12}, C_{23}, C_{31}); $C_{23}, C_{30}, C_{02})$; (C_{30}, C_{01}, C_{13}); $C_{01}, C_{12}, C_{20})$

au acelaşi ax radical. Axele radicale astfel definite trec — fiecare — prin câte unul din centrele cercurilor tritangente laturile triunghiului median.

2°. Cercurile de asemănare $C_{\alpha\beta}$ sunt ortogonale cercului conjugat.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5901. Dacă o dreaptă este tangentă unui cerc cu centrul în ortocentrul H al triunghiului ABC, simetricele acestei drepte faţă de laturile BC, CA, AB formează un triunghiu de suprafaţă constantă.

ION C. VASILIU.

5902. Triunghiurile omologice în ordinea ABC, $A_1B_1C_1$ au vârfurile A şi A_1 respectiv pe B_1C_1 şi BC. Să se arate, că:

1°. Laturile neomologice, adiacente unghiurilor A şi A_1, se taie în E şi F, colineare cu centrul I de omologie, dat.

2°. Când cele două triunghiuri sunt omologice şi în ordinea ABC, $A_1B_1C_1$, dreapta EF formează, cu razele vectoare ale primei omologii, un fascicol armonic.

3°. Intersecţiile diagonalelor patrulaterelor EFBC şi EFB_1C_1 concură cu EF în centrul I de omologie.

4°. Patrulaterul EFBC este împărţit de AA_1 în alte două patrulatere. Aceste trei patrulatere au intersecţiile diagonalelor pe aceeaşi dreaptă, care se taie cu EF pe BC.

5°. Dreapta analoagă corespunzătoare patrulaterului EFB_1C_1 se taie cu EF pe B_1C_1.

6°. Dacă B', C' şi B_1', C_1' sunt picioarele razelor vectoare ce trec prin I, dreptele $B'C_1'$ şi $B_1'C'$ concură pe AA_1, iar (A_1C', AB_1') şi (A_1B', AC_1') trec prin I.

CPT. ING. I. GH. ZAMFIRESCU.

5903. Fie P şi M două puncte în planul triunghiului ABC. Paralelele din M la AP, BP, CP întâlnesc laturile BC, CA, AB în A', B', C'.

1°. Să se găsească poziţia de echilibru a punctului M, ştiind că asupra lui lucrează forţele reprezentate prin vectorii $\overline{MA'}$, $\overline{MB'}$, $\overline{MC'}$.

2°. Să se găsească poziţia de echilibru a aceluiaşi punct, ştiind că el mai este respins de punctul P cu o forţă reprezentată prin vectorul $\overline{PM}$.

P. P. DRĂGHICESCU.

5904. Umoristului MARK TWAIN i s'a pus întrebarea: „Dacă „unei ghiulele de tun îi trebue $3\frac{1}{8}$ secunde pentru a străbate „primele *patru* mile, $3\frac{5}{8}$ pentru celelalte *patru* mile şi aşa mai „departe, cât timp îi va trebui pentru a străbate 1500 milioane „de mile?".

MARK TWAIN a răspuns: „Habar n'am!".

Să se studieze mişcarea ghiulelei.

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (E, P); *Barbu A. I.* (3523, 4879, 94, 5831, 33, 38, 69, 75, 76, 79); *Cantuniar I. Cr.* (5865, 70, 71, 86); *Cioc D.* (5700); *Columbeanu D. P.* (5773); *Constantinescu N. Ilie* (5791, 801, 70); *Cruceru Gh. C.* (5846, 71); *Diaconescu D. I.* (5865, 71); *Dumitrescu Gh. Tr.* (5840); *George M. Nicolae* (5656, 851, 65); *Grigore A. Gh.* (4898, 5861, 69, N); *Manoliu Sp. M.* (5838, 70, 71, 72); *Munteanu Gh. L.* (5740, 54, 801), *Mustăcescu Tr.* (5865, 70, 71); *Niculescu V. Gh.* (E); *Pantelimon C.* (4734, 5652, 879, 82); *Pătrăscioiu P. M.* (5724, 47, 67, 73, 91, 861, 65, 71); *Popescu I. Gh.* G-l (P); *Teodorescu St. I.* (5461); *Thébault V.* (N, P); *Ţigănoiu I. Al.* (P); *Ţincu C. C.* (5727, 871); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4568, 607, 36, 80, 5870, 71, 79, E, P); *Vrânceanu Gh. Gh.* (5865).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe o singură parte a foii şi au se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 21.989

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1944

SUMARUL

1. Indicatori, puteri de numere întregi. . *M. Ghermănescu.*
2. Asupra cercurilor de asemănare. . . . *Şerban Gheorghiu.*
3. Probleme de geometrie. . . . . *Adrian Gheorghiu.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" . . . *Delegaţia Societăţii.*
5. Note matematice: 22 — 25.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 327.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1958, 4297, 4315, 4405, 4636, 5454, 5583, 5606, 5618, 5653, 5666, 5685, 5691.
11. Exerciţii: 16—18.
12. Probleme propuse: 5893, 5905 — 5919.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **9**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Calcul diferenţial şi analitic* . . . . . „ 250

Avem plăcerea a anunţa că dela 9 Februarie a. c. mai fac parte din Societatea noastră şi D-nii: *Bazacov Gh.*, licenţiat în matematici; *Caranfil G. N.* inginer; *Negoescu N.*, licenţiat în matematici; *Neicu M.*, inginer; *Popovici Const.*, inginer; *Profiri N.*, inginer; *Tudoran M.*, inginer; *Vasilescu-Ştabu Al. M.*, sublocotenent de artilerie şi *Vişa Eug.*, licenţiat în matematici.

INDICATORI, PUTERI DE NUMERE ÎNTREGI

In interesanta broşură, intitulată „*Teoria indicatorilor*", D-l Comandor I. LINTEŞ, neobositul cercetător în această direcţie, pune următoarea problemă

Indicatorul unui număr poate fi puterea altui număr?

In cele ce urmează, voiu expune câteva observaţii în legătură cu această problemă.

Fie

$$(1) \quad N = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \quad , \quad a_1 < a_2 < \dots < a_n \, , \; \alpha_i \neq 0,$$

un număr, descompus în factorii săi primi.

Deoarece $\varphi(N^m) = N^{m-1}\varphi(N)$, problema duce la egalitatea mai generală

$$(2) \quad a_1^{\alpha_1 m-1} a_2^{\alpha_2 m-1} \dots a_n^{\alpha_n m-1} (a_1-1)(a_2-1)\dots(a_n-1) = A^p.$$

unde A şi p sunt de asemeni întregi.

O observaţie se degajează imediat din examinarea egalităţii precedente:

Exponentul $\alpha_n m - 1$ *este divizibil prin* p, căci factorul prim a_n fiind cel mai mare nu figurează decât sub forma $a_n^{\alpha_n m-1}$.

Numerele $a_i - 1$ nu sunt prime, afară de cazul $a_i = 3$, deci se descompun în factori primi mai mici; aceştia sunt factorii $a_j < a_i$ şi alţi factori $b_i < a_i$. Punând

$$(3) \quad a_i - 1 = a_1^{\beta i1} a_2^{\beta i2} \dots a_{i-1}^{\beta i,\, i-1} b_1^{\gamma i1} b_2^{\gamma i2} \dots, b_r^{\gamma ir},$$

unde $b_1, b_2, \dots b_r$ sunt toţi factori primi mai mici ca a_n, diferiţi de a_i; egalitatea (2) devine

$$(2') \quad a_1^{m\alpha_1+\beta_{21}+\beta_{31}+\dots+\beta_{n1}-1} a_2^{m\alpha_2+\beta_{32}+\beta_{42}+\dots+\beta_{n2}-1} \dots a_{n-1}^{m\alpha_{n-1}+\beta_{n,n-1}-1} \cdot a_n^{m\alpha_n-1} \times$$
$$b_1^{\gamma_{11}+\gamma_{21}+\dots+\gamma_{41}} b_2^{\gamma_{12}+\gamma_{22}+\dots+\gamma_{n2}} \dots b_r^{\gamma_{1r}+\gamma_{2r}+\dots+\gamma_{nr}} = A^p.$$

Cum factorii a_i , b_j sunt primi şi diferiţi, trebue ca exponentul fiecăruia să se dividă prin p, deci vom avea egalităţile

$$(4)\quad \begin{cases} m\alpha_1 + \beta_{21} + \beta_{31} + \ldots + \beta_{n1} - 1 = \lambda_1 p, \\ m\alpha_2 + \beta_{22} + \beta_{42} + \ldots + \beta_{n2} - 1 = \lambda_2 p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m\alpha_{n-1} + \beta_{n.\,n-1} \qquad\qquad - 1 = \lambda_{n-1} p, \\ m\alpha_n \qquad\qquad - 1 = {}_n p, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \gamma_{11} + \gamma_{21} + \ldots + \gamma_{n1} = \mu_1 p, \\ \gamma_{12} + \gamma_{22} + \ldots + \gamma_{2n} = \mu_2 p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{1r} + \gamma_{2r} + \ldots + \gamma_{nr} = \mu_r p. \end{cases}$$

Dacă N este dat, a_i , b_j , deci şi exponenţii respectivi, α, β, γ sunt cunoscuţi, în acest caz, sistemul (4) este incompatibil în m şi p, în general, deci

In general, nu se poate găsi o putere a unui număr dat, al cărei indicator să fie o putere perfectă.

Exemplu, $N = 5^{\alpha} . 7^{\beta} . 11^{\gamma} . 13^{\delta}$; avem

$$\varphi(N^m) = 2^6 . 3^2 . 5^{m\alpha-1} . 7^{m\beta-1} 11^{m\gamma-1} 13^{m\delta-1} = A^p .$$

Se vede că singura posibilitate este $p = 2$. Dacă α este par, iar β, γ, δ impari, exponenţii factorilor 5, 7, 11, 13 sunt pari cu m impar, deci problema este posibilă pentru $p = 2$. In toate celelalte cazuri de paritate ale numerelor α, β, γ, δ, problema este imposibilă.

2. Exemplul precedent pune în lumină un caz mai general în care să încercăm rezolvarea problemei propuse: să se dea factorii lui N, urmând a li se determina exponenţii pentru care (2′) este posibilă în întregi. Din exemplul considerat se vede că nici sub această formă problema nu este solubilă în general.

In adevăr, factorii primi a_i fiind daţi, urmează că şi factorii b_i , ca şi exponenţii β_{ji} , γ_{ki} sunt cunoscuţi, necunoscuţi fiind m, p, α_i, λ_i, μ_i. Rezultă că primii membri ai egalităţilor (5), care sunt cunoscuţi, trebue să aibă un divizor comun p, ceea ce nu se întâmplă în general.

Dacă a_i sunt toate numerele prime consecutive până la a_n, avem $b_i \equiv 1$, exponenţii $\gamma_{ij} = 0$, iar egalităţile (5) se reduc la

identităţi. In acest caz, trebuesc satisfăcute egalităţile (4), unde m, p, α_i, λ_i sunt necunoscuţi. Ultima arată că m *şi* p *sunt primi între ei.*

Dacă punem

(6) $$\beta_{i+1,\,i} + \beta_{i+2.\,i} + \ldots + \beta_{n,\,i} - 1 = u_i\,,$$

egalităţile (4) devin

(7) $$p\lambda_i - m\alpha_i = u_i \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Zic că acestea sunt totdeauna posibile în infinităţi de moduri.

In adevăr, să considerăm două oarecare din ecuaţiile (7), de exemplu, primele două

$$p\lambda_1 - m\alpha_1 = u_1 \quad , \quad p\lambda_2 - m\alpha_2 = u_2\,;$$

putem alege în infinităţi de moduri patru întregi α_1, α_2, λ_1, λ_2, astfel ca să avem $\lambda_1\alpha_2 - \lambda_2\alpha_1 = 1$ [1]). Vom deduce deci

(8) $$m = u_1\lambda_2 - u_2\lambda_1\,, \quad p = u_1\alpha_2 - u_2\alpha_1\,, \quad \lambda_1\alpha_2 - \lambda_2\alpha_1 = 1.$$

Odată m şi p determinaţi prin relaţiile (8), găsim câte o infinitate de valori pentru perechile (λ_i, α_i), căci ecuaţia (7) are o infinitate de soluţii când m, p, u_i sunt cunoscuţi.

In cazul când a_i sunt toate numerele prime până la a_n, deci $b_i \neq 1$, $\gamma_{ij} \neq 0$, presupunând că primii membri ai egalităţilor (5) au un divizor comun p, ceea ce determină numerele μ_i, egalităţile (4) devin (7), în care p, u_i sunt cunoscuţi; a doua egalitate (8) ne dă α_1 şi α_2, cu care a treia ne dă pe λ_1 şi λ_2, apoi prima pe m. Restul ca mai înainte.

Putem deci spune

a) *Există infinităţi de numere întregi* N, *având ca factori primi primele* n *numere prime, astfel ca indicatorii unor anumite puteri, date sau nu, ale acestora să fie puteri perfecte, date sau nu.*

b) *Dacă factorii primi ai numărului* N *nu sunt toate primele* n *numere prime, problema este în general imposibilă.*

Să luăm ca exemplu $N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot 7^{\delta}$; egalitatea (2) devine

$$2^{m\alpha+3} \cdot 3^{m\beta} \cdot 5^{m\gamma-1} \cdot 7^{m\delta-1} = A^p\,,$$

care cere

(α) $$m\alpha + 3 = \lambda_1 p \;,\; m\beta = \lambda_2 p \;,\; m\gamma - 1 = \lambda_3 p \;,\; m\delta - 1 = \lambda_4 p.$$

1) A se vedea, M. GHERMĂNESCU „Ecuaţia AD — BC = 1 în întregi", R. M. T. Anul XXII, 1942, p. 115.

Dacă determinăm γ, δ, λ_3 λ_4, astfel ca $\gamma\lambda_4 - \delta\gamma_3 = 1$, găsim apoi $m = \lambda_4 - \lambda_3$, $p = \delta - \gamma$. Cum m și p sunt prime între ele, a doua egalitate (α) cere $\beta = kp = k(\delta - \gamma)$, iar prima devine

(β) $\qquad (\delta - \beta)\,\lambda_1 - (\lambda_4 - \lambda_3)\,\alpha = 3.$

Se vede de aci că nu se pot da și toți exponenții α, β, γ, δ, deoarece β trebue să se dividă prin diferența $p = \delta - \gamma$. Ne putem da însă *doi* din acești exponenți, cari pot fi γ și δ, în care caz, p rezultă, apoi $\gamma\lambda_4 - \delta\lambda_3 = 1$ ne dă o infinitate de valori pentru λ_3 și λ_4, deci o infinitate de valori pentru m; (β) ne dă, în fine, o dublă infinitate de valori pentru α și λ_1.

Dacă ne dăm m și p, egalitatea $m\gamma - p\lambda_3 = 1$, dă o infinitate de valori pentru γ și λ_3, din care deducem la fel pentru $\lambda_4 = m + \lambda_3$ și pentru $\delta = p + \gamma$; în fine, (β) ne dă infinități de valori pentru α și λ_1; iar β este un multiplu arbitrar de p.

3. Să examinăm acum problema sub forma următoare:

Să se găsească un număr întreg N, *astfel ca indicatorul puterii a* m^a *a sa să fie puterea a* p^a *a unui întreg* (m *și* p *dați*).

Din cele precedente, am văzut că problema are infinități de soluții când N conține ca factori numai primele n numere prime, n fiind oarecare.

In cazul general, vom presupune că N este de forma (1), în care însă a_i sunt *toate* primele n numere prime, dar exponenții α_i ai celor ce nu figurează efectiv printre factori vor fi nuli. In acest caz, $b_i \equiv 1$ și avem de considerat numai egalitățile (4), în care numerele m, p sunt cunoscute, α_i, β_{ij} λ_i necunoscute, unele din numerele α_i fiind însă nule.

Este evident că $\alpha_n \neq 0$, căci a_n este cel mai mare număr prim cuprins printre factorii lui N, ultima egalitate (4) ne dă atunci o infinitate de valori pentru α_n și λ_n.

Primele $n - 1$ egalități (4) formează un sistem de $(n - 1)$ ecuații cu mult prea multe necunoscute, care astfel rămân arbitrare. Presupunând că am determinat pe o cale oarecare un sistem de valori pentru β_{ij}, găsim ușor câte o infinitate de valori pentru perechile (α_i, λ_i), pentru care $\alpha_i \neq 0$. Dacă există și $\alpha_i = 0$, trebue ca β_{ij} să fie astfel determinate încât u_i dat de (7) să se dividă prin p. Presupunând că toate aceste condiții s'au realizat, trebuesc determinați factorii primi a_i, astfel ca, după (3),

(3') $\qquad a_1^{\beta i1}\, a_2^{\beta i2} \ldots a_i^{\beta ii} + 1 = a_{i+1},$

a_{i+1} fiind numărul prim imediat superior lui a_i. Sub această formă, se vede uşor că este mai natural să începem prin a determina numerele β_{ij} pentru care primul membru din (3') este un număr prim, după care restul adică determinarea numerelor α_i, λ_i este uşoară, dacă este posibilă. Problema însă, astfel pusă, este greu de rezolvat, nu numai în general, dar chiar când se dau valorile precise ale numerelor prime a_i.

Astfel, o problemă simplă este: care sunt numerele prime de forma $P = 2^r \cdot 5^s + 1$?

Probleme ca aceasta se întâlnesc mai ales când se dă şi numărul A din (2).

M. GHERMĂNESCU.

ASUPRA CERCURILOR DE ASEMĂNARE

NEUBERG a numit cerc de asemănare relativ la două cercuri, cercul ce are ca diametru segmentul determinat de cele două centre de similitudine ale cercurilor considerate. Cercul acesta are proprietatea de a fi locul geometric al punctelor de unde cele două cercuri sunt văzute sub unghiuri egale.

In cele ce urmează îmi propun a deduce câteva aplicaţiuni ale acestei proprietăţi şi în special, a reveni asupra unei propoziţiuni remarcabile, enunţată de D-l Prof. D. BARBILIAN, ce formează obiectul problemei 3944, rezolvată în G. M. XLVII, pag. 467.

1. Se consideră două cercuri (C_1) şi (C_2) în acelaşi plan (fig. 1) şi fie O_1 şi O_2 centrele, iar R_1 şi R_2 razele lor. Fie de asemeni, M un punct de unde cele două cercuri sunt văzute sub acelaşi unghiu. Avem evident:

$$\frac{MO_1}{R_1} = \frac{MO_2}{R_2} \qquad (1)$$

Locul punctului M este deci cercul (Γ_{12}) de diametru $S'S''$, unde S' şi S'' sunt centrele de asemănare ale cercurilor date. Cercul (Γ_{12}) aparţine fascicolului determinat de cercurile (C_1) şi (C_2) fiindcă trece prin punctele A şi B comune celor două cercuri, după cum rezultă imediat din (1), înlocuind pe M prin A sau B.

Dreptele AS′ şi AS″ sunt bisectoarele unghiului determinat de axa radicală AB şi de tangenta în A la cercul (Γ_{12}). Aceleaşi

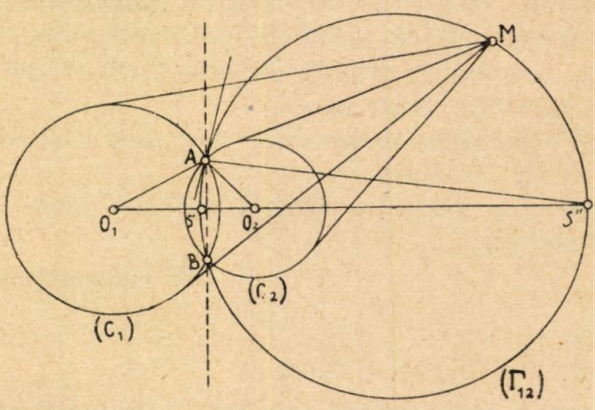


Fig. 1.

drepte sunt bisectoarele unghiului determinat de razele AO_1 şi AO_2 şi deci şi ale unghiului format de tangentele în A la cercurile (C_1) şi (C_2). Enunţăm aceasta spunând:

Cercul de asemănare şi axul radical sunt isogonale în raport cu cercurile considerate.

2. Considerăm acum pe lângă cercurile (C_1), (C_2) un al treilea cerc (C_3) în acelaşi plan şi fie (Γ_{12}), (Γ_{23}), (Γ_{31}) cele trei cercuri de asemănare corespunzătoare respectiv perechilor de cercuri (C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1). Notăm cu (O) cercul ce trece prin centrele celor trei cercuri (C_1), (C_2), (C_3) şi cu (Ω) cercul lor ortogonal comun.

Cercul (Γ_{12}) — de ex. — având diametrul S′S″ este ortogonal oricărui cerc care trece prin centrele O_1 şi O_2. In particular, este ortogonal cercului (O). Pe de altă parte cercul (Γ_{12}) aparţinând fascicolului definit de cercurile (C_1) şi (C_2) este ortogonal tuturor cercurilor ortogonale acestora, deci şi cercului (Ω). Rezultă de aici că cercurile (Γ_{12}), (Γ_{23}), (Γ_{31}) sunt ortogonale cercurilor (O) şi (Ω). Sau:

Cele trei cercuri de asemănare relative la trei cercuri, luate câte două, au două puncte comune: punctele lui PONCELET

(cercurile de rază nulă) ale fascicolului definit de cercul ce trece prin centrele cercurilor considerate și de cercul lor ortogonal, comun.

3. In sfârșit, considerăm patru cercuri (C_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ în același plan. Aceste patru cercuri considerate câte două admit $C_4^2 = 6$ cercuri (Γ_{ik}) $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ de asemănare.

Cele șase cercuri de asemănare (Γ_{ik}) *admit un cerc ortogonal comun.*

Notăm cu P_i', P_i'' punctele comune, la distanță finită, cercurilor (Γ_{jk}), (Γ_{kl}), (Γ_{lj}), unde indicii i, j, k, l sunt diferiți între ei și sunt egali cu 1, 2, 3, 4. (Astfel punctele P_1' și P_1'') sunt comune cercurilor (Γ_{23}), (Γ_{34}), (Γ_{42}). Este evident că perechile de puncte $P_i' P_i''$ și $P_j' P_j''$ sunt pe același cerc (Γ_{kl}). Rezultă că dreptele $P_1' P_2''$, $P_2' P_2''$, P_3', P_3'', P_4', P_4'' concură în același punct ω. Cercul ortogonal celor șase cercuri (Γ_{ik}) are deci centrul în ω și raza sa este definită prin:

$$R^2 = \omega P_1' \cdot \omega P_1'' = \ldots = \omega P_4' \cdot \omega P_4''.$$

4. Inainte de a a examina cazul special, ce formează obiectul problemei 3944, este necesar a demonstra următoarea lemă:

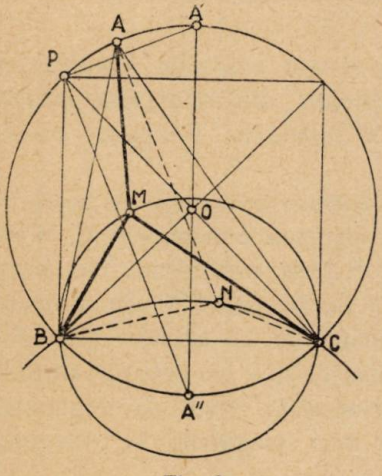


Fig. 2.

Se consideră un triunghiu ABC *și două puncte* M *și* N *invers isogonale. Unghiul tangentelor în* B (*sau* C) *la cercurile* (MBC) *și* (NBC) *are aceleași bisectoare ca unghiul format de latura* BC *și de tangenta la cercul* (ABC) *în* B (*sau* C).

Această lemă poate fi demonstrată prin simple relațiuni între unghiuri. Prefer însă a o demonstra prin considerațiuni de geometrie proiectivă.

Este clar că, dacă punctul M variază pe cercul (MBC) punctul N variază pe cercul (NBC) și reciproc. Tangentele în B (sau C) la cercurile (MBC) și (NBC) se corespund în involuție. Razele duble ale acestei involuții sunt BA' și BA'' (sau CA' și CA''), A' și A'' fiind extremitățile diametrului cercului (ABC) perpendicular pe BC (fig. 2). Cercul cu centrul în

A″ şi trecând prin B şi C este tangent dreptelor A′B şi A′C şi trece prin centrul înscris în triunghiul ABC şi prin centrul cercului exînscris în unghiul A. Dacă punctul M variază pe acest cerc isogonalul său variază pe acelaşi cerc. De asemeni şi pentru cercul cu centrul în A′ şi trecând prin B şi C, ce conţine centrele cercurilor exînscrise în unghiurile B şi C. Latura BC şi tangenta în B (sau C) la cercul (ABC) fiind egal înclinate pe dreptele BA′ şi BA″ (sau CA′ şi CA″) rezultă lema anunţată.

Se obţine aceeaşi concluzie şi în modul următor:

Fie I şi J cele două puncte ciclice ale planului. Printre cercurile trecând prin B şi C există unul redus la dreptele BI şi CJ. Dacă punctul M este mobil pe acest cerc isogonalul său N descrie cercul format din isotropele BJ şi CI, isotropele BI şi BJ (sau CI şi CJ) fiind simetrice în raport cu bisectoarele unghiului B (sau C). Unghiul tangentelor în B (sau C) la cercurile (MBC) şi (NBC) are deci aceleaşi bisectoare. Aceste bisectoare sunt aceleaşi cu ale unghiului făcut de BC cu tangenta în B (sau C) la cercul (ABC) fiindcă, în particular, când M este pe cercul (ABC), isogonalul său este pe BC sau pe dreapta dela infinit IJ.

Se deduce imediat că:

O inversiune având ca pol unul din vârfurile triunghiului transformă două puncte invers isogonale din triunghiul iniţial, în două puncte invers isogonale în raport cu triunghiul transformat.

Intr'adevăr, presupunem că efectuăm o inversiune cu polul în vârful B. Fie A′, C′, M′, N′ respectiv inversele punctelor A, C, M, N. Prin această inversiune cercul (ABC) se transformă în latura A′C′ iar latura AC se transformă în cercul (BA′C″). De asemeni dreptele BM şi BN rămân isogonale faţă cu laturile unghiului A′BC′ iar după cum rezultă din lema de mai sus cercurile (MBC) şi (NBC) se transformă în două isogonale relativ la unghiurile BC′A′. Punctele M′ şi N′ sunt deci isogonale în triunghiul BA′C′.

5. Fie (C_a), (C_b), (C_c) cercurile trecând prin M şi având centrele respectiv în vârfurile A, B, C ale triunghiului ABC iar ω inversul (simetricul) lui M în raport cu cercul (ABC) (fig. 3).

Rezultă din cele arătate la § 2 *că cercurile* (C_a), (C_b), (C_c) *sunt văzute din* ω *sub acelaşi unghiu.*

Punctele M și ω fiind inverse în raport cu cercul (ABC) avem relațiunile:

$$\frac{A\omega}{AM} = \frac{B\omega}{BM} = \frac{C\omega}{CM} = \frac{\omega O}{R}$$

R fiind raza cercului (ABC). Deci și *cercul* (ABC) *este văzut din* ω *sub același unghiu ca și cercurile* (C_a), (C_b), (C_c).

Imi propun acum să arăt că:

Cercurile (NBC), (NCA), (NAB) *sunt văzute din punctul* ω *sub același unghiu ca cercul* (ABC).

Pentru aceasta e suficient a arăta că cercul de asemănare al unuia din aceste cercuri (NBC) — de ex. cu cercul (ABC) — trece prin ω.

Transform figura prin inversiune luând vârful B ca pol și păstrând notațiile de mai sus (§ 4). După cum rezultă din § 1, cercul de asemănare al cercurilor (ABC) și (NBC) se transformă în isogonala lui BC în raport cu unghiul N'C'A'. Această dreaptă trece prin simetricul lui M' în raport cu A'C' deci prin inversul lui ω ceea ce demonstrează propoziţiunea enunţată. Aceasta este chiar propoziţiunea D-lui Prof. D. BARBILIAN pentru patrulaterul NABC.

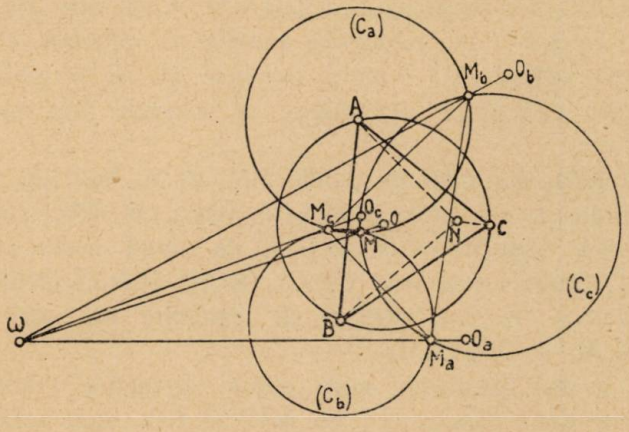


Fig. 3.

Fie M_a, M_b, M_c, simetricele punctului M în raport cu laturile BC, CA și AB (Fig. 3). Punctele M și N fiind presupuse isogonale

în triunghiul ABC este uşor de văzut că punctul N este centrul cercului circumscris triunghiului $M_a M_b M_c$. Din cele ce preced rezultă imediat că cercul $(M_a M_b M_c)$ este văzut din ω sub acelaşi unghiu ca şi celelalte cercuri considerate.

Obţinem în definitiv opt cercuri (C_a), (C_b), (C_c), (ABC), (NBC), (NCA), (NAB), $(M_a M_b M_c)$ ce sunt văzute din ω sub acelaşi unghiu. Cercurile (C_a), (C_b), (C_c) şi $(M_a M_b M_c)$ sunt pentru patrulaterul $MM_a M_b M_c$ cercurile considerate de D-l Prof. D. BARBILIAN. Iar cercurile (ABC), (NBC), (NCA) şi (NAB) sunt cercurile similare relative la patrulaterul ce are ca vârfuri centrele cercurilor circumscrise celor patru triunghiuri formate din câte trei din punctele M, M_a, M_b, M_c.

6. Pentru cercurile (C_a), (C_b), (C_c) şi $(M_a M_b M_c)$ de o parte şi cercurile (NBC), (NCA), (NAB) şi (ABC) — de alta — cercurile ortogonale comune cercurilor de asemănare se reduc la punctul ω.

Acest punct posedă — înafară de aceea demonstrată la § 5 — două alte proprietăţi remarcabile, ce au fost de asemenea demonstrate de D-l Prof. D. BARBILIAN [1]).

I. *Vârfurile* M, M_a, M_b, M_c, *au în raport cu cercurile* (ABC), (NBC), (NCA) *şi* (NAB) *acelaşi invers (simetric)* ω.

Rezultă din propoziţiunea dela § 2. Astfel cele două puncte comune cercurilor de asemănare relative la cercurile $(M_a MM_b)$, $(M_a MM_c)$, $(M_a M_b M_c)$ — adică punctele M_a şi ω sunt inverse în raport cu cercul determinat de centrele lor, sau cercul (NBC), etc.

II. Reiau mai întâi notaţiunile $MM_a M_b M_c$ fiind un patrulater dat, centrele cercurilor $(M_a M_b M_c)$, $(M_b MM_c)$, $(M_c MM_a)$ şi $(MM_a M_b)$ sunt notate respectiv cu N, A, B, C. In sfârşit notăm cu O, O_a, O_b, O_c, centrele cercurilor (ABC), (BCN), (CNA), (NAB).

Punctul ω *este centrul de omotetie ale patrulaterelor* $MM_a M_b M_c$ *şi* $OO_a O_b O_c$.

Cele două patrulatere sunt evident omotetice având laturile două câte două paralele. De ex. MM_a şi OO_a sunt paralele fiind ambele perpendiculare pe BC.

---

1) A se vedea D. BARBILIAN, Articol de Geometrie (G. M. XXXVII, pag. 18—89 şi pag. 166—182). In special, pag. 87.

Pe de altă parte dreptele MO, $M_a O_a$, $M_b O_b$, şi $M_c O_c$ sunt similarele dreptelor $P_1' P_1''$, $P_2' P_2''$, $P_3' P_3$, $P_4' O_4''$ considerate la § 3. Aceste drepte concură în ω.

Calculând raportul de omotetie al celor două patrulatere şi utilizând proprietatea I de mai sus, obţinem:

$$\frac{\omega M}{\omega O} = \frac{\dfrac{R^2}{OM} - OM}{\dfrac{R^2}{OM}} = \frac{R^2 - OM^2}{R^2}$$

$$\therefore \quad \frac{MO}{R} = \frac{M_a O_a}{R_a} = \frac{M_b O_b}{R_b} = \frac{M_c O_c}{R_c}$$

R, R_a, R_b, R_c fiind razele cercurilor (ABC), (NBC), (NCA), şi (NAB).

7. Consider un patrulater oarecare P_0 şi fie P_1 patrulaterul ce are ca vârfuri centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor formate cu câte trei din vârfurile lui P_0. Patrulaterele P_0 şi P_1 au acelaşi punct ω. La fel, toate patrulaterele P_2, P_3, ... deduse fie care din precedentul ca P_1 din P_0.

Putem însă considera patrulaterul P_0 ca fiind la rândul său dedus după aceeaşi lege dintr'un altul P_{-1}. Astfel, dacă patrulaterul P_0 este NABC patrulaterul P_{-1} devine $MM_a M_b M_c$. Vârfurile patrulaterului P_{-1} sunt punctele invers isogonale vârfurilor lui P_0 în raport cu triunghiul format de celelalte trei. Astfel, M şi N sunt invers isogonale în triunghiul ABC, A şi M_a sunt invers isogonale în triunghiul BCN, etc.... Rezultă din cele arătate la § 5 că şi patrulaterele P_0 şi P_{-1} au acelaşi punct ω. De asemeni şi patrulaterele $P_{-2} P_{-3} \ldots P^{-n}$ obţinute în acelaşi mod.

Obţinem în definitiv că *patrulaterele şirului nesfârşit în ambele sensuri* ... P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, ... *au acelaşi punct* ω. *Patrulaterele din acest şir, sunt din două în două omotetice. Punctul* ω *este centrul de omotetie comun, iar cercurile respective sunt văzute pentru toate aceste patrulatere — sub acelaşi unghiu.*

ŞERBAN GHEORGHIU.

PROBLEME DE GEOMETRIE

1. In plan, se ştie că izogonalul unui punct la infinit faţă de un triunghiu se găseşte pe cercul circumscris triunghiului.

In general, dacă un punct P descrie o dreaptă Δ, izogonalul său P′, faţă de un triunghiu descrie o conică circumscrisă triunghiului. In adevăr ABC fiind triunghiul şi Δ dreapta descrisă de P, la o dreaptă AP′ dusă prin A corespunde în mod unic izogonala sa AP care taie pe Δ în P, BP′ fiind izogonala lui BP, observăm că între razele AP′, BP′, ce determină izogonalul P′ al lui P de pe Δ există o corespondenţă omografică, încât P′ descrie o conică trecând prin A, B când P descrie dreapta Δ. Cum punctul P′ se poate defini analog pornind dela oricare din vârfurile A, B, C rezultă că locul său conţine pe A, B, C, e adică o conică circumscrisă triunghiului ABC. Vârfurile sale corespund punctelor P unde Δ taie laturile opuse.

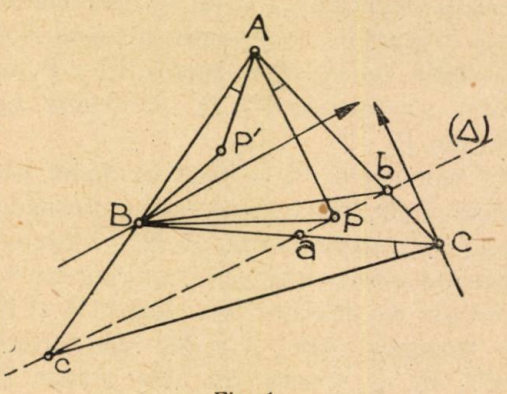


Fig. 1.

Fie *a*, *b*, *c* intersecţiile lui Δ respectiv cu BC, CA, AB, izogonalele lui A*a*, B*b*, C*c* sunt tangente conicei-loc a lui P — respectiv în A, B, C. Pentrucă AB fiind o rază AP′, izogonala sa este A*b*, încât raza din B corespunzătoare lui AB este izogonala lui B*b*, această rază e tangentă în B.

De aci imediat teorema cunoscută :

Dacă trei ceviene în un triunghiu determină pe laturi trei puncte colineare, izogonalele lor determină pe laturi trei puncte colineare. In adevăr A*a*, B*b*, C*c* fiind cele trei ceviene, izogonalele lor sunt tangentele în A, B, C la conica-loc al izogonalului P′ al lui P descriind dreapta *abc ;* ele formează un triunghiu omologic triunghiului ABC. (Teorema lui PASCAL).

Direcţiile asimptotice ale conicei-loc sunt date de punctele P′, la infinit, corespunzătoare celor două puncte P de intersecţie

ale dreptei Δ cu cercul circumscris lui ABC, deci conica ABC e o elipsă, o parabolă sau o hiperbolă; după cum Δ nu taie, e tangentă sau taie cercul ABC.

2. Fiind date patru drepte în plan D_1, D_2, D_3, D_4 ne propunem să găsim locul punctului P astfel ca izogonala lui față de cele patru triunghiuri ce se pot forma cu dreptele date, să se confunde.

Se observă că dacă izogonalele lui P față de două din aceste triunghiuri se confundă, atunci se confundă toate patru. Căci dacă două se confundă în P′ atunci P și P′ sunt focarele unei conice tangente celor patru drepte și se știe că dreptele ce unesc un punct cu focarele unei conice sunt izogonale față de unghiul tangentelor din acel punct la conică, și deci P, P′ sunt izogonale față și de celelalte două triunghiuri. Așa dar căutăm locul punctelor P astfel ca izogonalele lui față de două oarecare din triunghiurile ce se pot forma cu cele patru drepte să se confunde în P″. E clar că între P și P′ există reciprocitate — P′ aparține aceluiași loc. Problema se poate încă enunța: *Locul focarelor conicelor unui fascicol tangențial.*

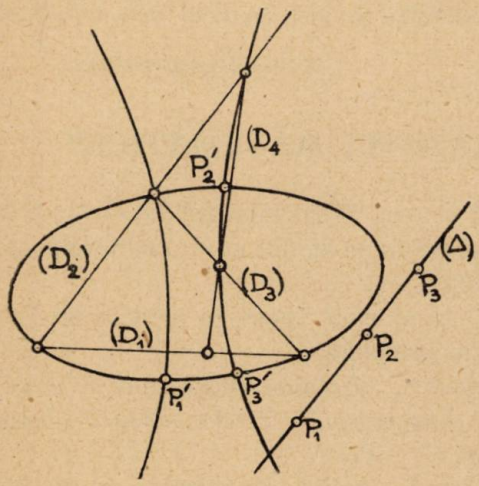


Fig. 2.

Utilizând rezultatele de la § 1 să numărăm punctele locului pe o dreaptă oarecare Δ, locul fiind o curbă algebrică, construcțiile fiind algebrice.

P descriind Δ, izogonalul său față de triunghiul $D_1 D_2 D_3$ descrie o conică circumscrisă acestui triunghiu iar izogonalul față de $D_2 D_3 D_4$ descrie la fel o conică circumscrisă acestui triunghiu. Aceste două conice având un punct comun $D_2 D_3$ se taie în încă trei puncte: P_1', P_2', P_3' cărora le corespund pe dreapta Δ respectiv trei puncte P_1, P_2, P_3; astfel că izogonalele lui P_1 față de cele patru triunghiuri se confundă în P_1', ale lui P_2 în P_2', ale lui P_3 în P_3'. Se vede imediat că și P_1', P_2', P_3' aparțin locului.

Locul căutat e o cubică.

Să considerăm punctul P descriind dreapta dela înfinit, izogonalul său faţă de triunghiul $D_1 D_2 D_3$ descrie cercul circumscris acestui triunghiu. Analog pentru celelalte triunghiuri în care se descompune patrulaterul. Aceste cercuri se taie în punctele ciclice I şi J şi în punctul lui MIQUEL M, al patrulaterului. Sau punctele P_1', P_2', P_3' devin respectiv I, J, M; încât corespunzătoarele P_1, P_2, P_3 pe dreapta dela înfinit devin J, I [1]), K, unde K este punctul la infinit al dreptei lui GAUSS. (Problema 3985, rezolvată la pag. 40 *Gazeta Matematică*, Vol. XLIII).

Observăm că vârfurile opuse ale patrulaterului sunt izogonale faţă de cele patru triunghiuri deci aparţin locului — ele sunt focarele celor trei conice singulare ale fascicolului tangenţial.

Aşa dar locul focarelor conicelor unui fascicol tangenţial este o cubică circulară, trecând prin vârfurile patrulaterului fascicolului, prin punctul lui MIQUEL şi prin punctul dela infinit al dreptei lui GAUSS.

ADRIAN GHEORGHIU.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat la pag. 77 în numărul din Octombrie 1943 al acestei reviste, şi anul acesta se va ţine concursul tradiţional al societăţii *Gazeta Matematică*.

Din 70 candidaţi cari au înaintat cereri în termen au fost admişi a lua parte la concurs următorii:

Clasa a IV-a: *Beroniade C. Vicenţiu, Bosinceanu P. Paul, Drăghicescu P. Constantin, Enăchescu V. Teodor, Filip V. Ioan, Huideş V. Alexandru, Tofan C. Aurel.*

Clasa a V-a: *Doneaud E. André, Dumitrescu F. Sorin, Florian Gh. Paul, Haret Sp. Radu, Man I. Aurel, Orha Fl. Ioan, Seni D. Gheorghe, Tripşa I. Iosif, Vlad N. Constantin-Mircea.*

Clasa a VI-a: *Bârzescu I. Vasile-Mircea, Ciumaşu Viorel, Marinescu Stelian, Nache D. Dumitru, Rogoz V. Ion, Vrânceanu Gh. Gheorghe.*

1) Căci faţă de un unghiu oarecare izogonala unei drepte $+ i$ este o dreaptă $- i$: fie 0 şi m coeficienţi triunghiulari a laturilor unghiului x coeficientul unghiular al izogonalei lui $+ i$, avem

$$x = \frac{m - i}{1 + mi} = -i.$$

Clasa a VII-a: *Cantuniar Cristu, Columbeanu D. Petru, Constantinescu N. Ilie, Ghiță M. Vasile, Ignat Gh. Mircea, Iliescu C. Constantin, Jurist Gh. Vlad, Leția Valentin, Marinescu C. Marinel, Mihăilescu I. Ștefan, Mustăcescu Traian, Pavica A. Victor, Roșu Tr. Nicolae.*

Clasa a VIII-a: *Andrei Gh. Aurel, Gâță Gh. Gheorghe, Pălăceanu D. Vasile, Staicu Constantin, Udrea C. Ilie, Vasiliu Gh. Dumitru.*

Anul I, Politechnica din București: *Aron I. Gheorghe, Drăghicescu P. Paul.*

In total au fost admiși 45 candidați și anume 7 pentru clasa a IV-a, 9 pentru clasa a V-a, 7 pentru clasa a VI-a, 14 pentru clasa a VII-a, 6 pentru clasa a VIII-a și 2 pentru anul I al Politechnicei din București.

Ne pare rău că nu am putut admite pe toți candidații înscriși. Nu au fost admiși acei cari pentru clasele a V-a și a VI-a au avut o activitate prea mică la „*Suplimentul cu Exerciții*“ și acei cari pentru clasele a VII-a și a VIII-a au avut o activitate prea redusă la *Gazeta Matematică*. De asemenea nu au fost admiși acei cari nu s'au înscris la *materia obligatorie*, corespunzătoare clasei lor, așa cum se precizează în condițiunile publicate la pag. 77 din acest volum.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă și o probă orală la materiile la care s'a înscris.

Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă se va da Joi 20 Aprilie 1944 dela ora 8^{30} la ora 11^{30}, iar a doua în aceeași zi dela ora 15 la ora 18, la Politechnica din București, Calea Griviței 132.

Oralul va începe Vineri 21 Aprilie 1944 ora 8^{30} tot în localul Politechnicei din București.

Candidaților, *elevi de liceu*, admiși la concurs și cari nu dispun de mijloace pentru venirea la București sau cari nu au unde fi găzduiți la București pe timpul concursului (după cum au arătat în cercurile de înscriere), li se vor trimite din timp mijloacele necesare transportului și li se va comunica unde vor fi găzduiți pe timpul concursului.

Eventualele modificări se vor comunica la timp.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

NOTE MATEMATICE

22. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Când N_9 începe cu 3 am găsit următoarele 80 soluţii ale relaţiei

$$9\ N_9 = N$$

unde N este scris cu 10 cifre diferite iar N_9 cu 9 cifre diferite şi diferite de 9:

N_9	N	N_9	N
302 164 785	2 719 483 065	342 180 576	3 079 625 184
304 267 851	2 738 510 659	342 680 751	3 084 126 759
304 517 682	2 740 659 138	342 681 075	3 084 129 675
304 562 871	2 741 065 839	342 750 681	3 084 756 129
305 461 782	2 749 156 038	342 751 068	3 084 759 612
306 872 145	2 761 849 305	345 217 608	3 106 958 472
310 426 785	2 793 841 065	345 280 761	3 107 526 849
315 276 840	2 837 491 560	345 281 076	3 107 529 684
321 460 785	2 893 147 065	346 720 851	3 120 487 659
321 507 846	2 893 570 614	346 721 085	3 120 489 765
321 567 084	2 894 103 756	347 218 650	3 124 967 850
321 708 456	2 895 376 104	350 846 721	3 157 620 489
324 078 165	2 916 703 485	350 867 214	3 157 804 926
324 081 756	2 916 735 804	351 084 672	3 159 762 048
324 086 715	2 916 780 435	352 847 601	3 175 628 409
324 186 705	2 917 680 345	352 847 610	3 175 628 490
324 187 056	2 917 683 504	354 027 861	3 186 250 749
326 018 745	2 934 168 705	354 102 786	3 186 925 074
326 854 170	2 941 687 530	354 217 806	3 187 960 254
326 874 150	2 941 867 350	354 718 620	3 192 467 580
327 018 645	2 943 167 805	356 087 241	3 204 785 169
327 860 154	2 950 741 386	356 108 724	3 204 978 516
328 701 564	2 958 314 076	356 720 841	3 210 487 569
328 751 460	2 958 763 140	356 721 084	3 210 489 756
340 217 586	3 061 958 274	357 428 601	3 216 857 409
340 268 751	3 062 418 759	357 428 610	3 216 857 490
340 285 761	3 062 571 849	365 078 241	3 285 704 169
341 026 875	3 069 241 875	365 107 824	3 285 970 416
341 028 576	3 069 257 184	365 712 084	2 291 408 756
341 768 052	3 075 912 468	365 718 420	3 291 465 780
341 806 572	3 076 259 148	378 065 241	3 402 587 169
342 051 768	3 078 465 912	378 650 214	3 407 851 926

1) Urmare la Nota 57 de la pag. 547, Vol. XLVIII.

N_9	N	N_9	N
378 651 024	3 407 859 216	384 675 021	3 462 075 189
380 216 754	3 421 950 786	384 675 102	3 462 075 918
380 217 564	3 421 958 076	385 762 140	3 471 859 260
380 567 421	3 425 106 789	386 750 214	3 480 751 926
380 657 412	3 425 916 708	386 750 241	3 480 752 169
380 745 621	3 426 710 589	386 751 024	3 480 759 216
381 056 742	3 429 510 678	387 462 501	3 487 162 509
381 074 562	3 429 671 058	387 462 510	3 487 162 590

G-L GH. BUICLIU.

23. *Asupra unei însumări de indicatori.* In *„Théories des Nombres“* par E. LUCAS, pag. 500, se dă următoarea formulă:

$$2\sum_{1}^{n}\varphi(i) = n^2 + 1 - \Sigma\left[E\left(\frac{n}{p}\right)\right]^2 + \Sigma\left[E\left(\frac{n}{p.q}\right)\right]^2$$

$$- \Sigma\left[E\left(\frac{n}{p.q.r}\right)\right]^2 + \ldots$$

unde $\varphi(i)$ este indicatorul lui i, iar simbolul E reprezintă întregii din fracție.

Numerele $p, q, r, \ldots$ reprezintă toate numerele prime care nu depășesc pe n.

Formula este demonstrată prin inducție.

Voiu demonstra formula direct, și pe o cale mai simplă.

In adevăr, presupunem că:

$$i = a_i^{\alpha_i} \cdot b_i^{\beta_i} \ldots$$

unde $a_i, b_i, \ldots$ sunt factorii primi a lui i, care pentru toate numerele dela 1 la n cuprind factorii primi: $p, q, r, \ldots$

Atunci putem scrie:

$$2\Sigma\varphi(i) = 2\Sigma i - 2\Sigma\Sigma\left(\frac{i}{a_i}\right) + 2\Sigma\Sigma\left(\frac{i}{a_i \cdot b_i}\right) - \ldots$$

Dar știm că:

$$2\,\Sigma i = n\,(n+1)$$

$$2\,\Sigma\Sigma\left(\frac{i}{a_i}\right) = 2\,\Sigma\left[\frac{i}{a_i}+\frac{i}{b_i}+\ldots\right] = 2\,\Sigma\Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{i}{p}\right)\right]$$

$$= \Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\left[1+\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]\right]$$

$$2\,\Sigma\Sigma\left(\frac{i}{a_i\,.\,b_i}\right) = 2\,\Sigma\left[\frac{i}{a_i\,.\,b_i}+\frac{i}{a_i\,.\,c_i}+\ldots\right] = 2\,\Sigma\Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{i}{p\,.\,q}\right)\right]$$

$$= \Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)\cdot\left[1+\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)\right]\right]$$

și așa mai departe.

Atunci formula devine:

$$2\,\Sigma\varphi\,(i) = n^2+n-\Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\left[1+\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]\right]$$

$$= \Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)\left[1+\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)\right]\right]\ldots\ldots$$

$$= n^2+n-\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)-\Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]^2$$

$$+\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)+\Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)^2-\ldots\right.$$

$$= n^2-\Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]^2+\Sigma\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)\right]^2-\ldots$$

$$+n-\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)+\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)-\ldots$$

Dar știm că dacă:

$$\mathrm{N} = p\,.\,q\,.\,r\ldots$$

atunci numărul numerelor prime cu N din șirul de numere naturale până la n este:

$$\mathrm{I}_n\,(\mathrm{N}) = n-\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)+\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{p\,.\,q}\right)-\ldots$$

(Vezi G. M., XLV, pag. 20—22).

Dar dacă factorii lui n sunt cuprinşi în factorii lui N, iar N este produsul tuturor numerelor prime până la N, înseamnă că din şirul de numere până la n nu va fi prim cu N decât 1, deci:

$$I_n(N) = 1.$$

In consecinţă am stabilit formula pe o altă cale.

COMANDOR I. LINTEŞ.

24. *Asupra notei 14 din „G. M.", XLIX, p. 239.* Proprietatea pe care autorul ei încearcă să o demonstreze în această notă, se enunţă sub forma următoare:

Există o infinitate de numere care nu sunt indicatori.

Intr'adevăr, ecuaţia

$$\varphi(n) = 2p,$$

unde p este un număr prim impar > 3, nu poate avea ca soluţie decât pe $n = 2p + 1$ şi pe $n = 2(2p + 1)$ şi aceasta numai dacă $2p + 1$ este prim. Dacă p este prim > 3, iar $2p + 1$ este compus numărul $2p$ nu poate fi indicator. In particular, orice număr prim de forma $p = 3m + 1$ $(m > 0)$ verifică această proprietate căci $2(3m + 1) + 1 = 3(2m + 1)$ este compus. Dar, în virtutea celebrei teoreme a lui DIRICHLET, există o infinitate de numere prime de forma $3m + 1$. Proprietatea enunţată este deci demonstrată. Demonstraţia se poate face la fel luând numere prime p de forma $5m + 2$, $7m + 3$, $11m + 5$, ... etc.

In coloanele Gazetei s'au considerat de mai multe ori aşa zişii *indicatori iteraţi,*

$\varphi_1(n) = \varphi(n)$, $\varphi_2(n) = \varphi(\varphi_1(n))$, $\varphi_3(n) + \varphi(\varphi_2(n)), \ldots,$

$\varphi_k(n)$ fiind indicatorul de ordinul k a lui n.

S'ar putea pune problema dacă există sau nu o infinitate de numere pare care sunt indicatori de ordinul 1 dar nu sunt indicatori de ordinul 2. Răspunsul la această chestiune pare mai puţin simplu, deşi părerea noastră este că acest răspuns trebue să fie afirmativ. Dacă am încerca să profităm de cele spuse mai sus, vedem că ar fi suficient să demonstrăm că există o infinitate de numere prime p astfel ca şi $2p + 1$ să fie prim dar $2(2p + 1) + 1 = 4p + 3$ să fie compus. Pentru $p = 5m + 3$ numărul $4p + 3$ este sigur compus. Ar fi deci destul să se arate

că există o infinitate de numere prime de forma $5m + 3$ pentru care $10m + 7$ este de asemenea prim.

Relativ la prima chestiune mai adaog că ar fi de văzut dacă nu cumva există o infinitate de numere pare care nu sunt indicatori şi care nu sunt de forma $2p$ sau sunt de altă formă dată. Răspunsurile la astfel de chestiuni sunt foarte probabil afirmative.

T. P.

25. *Relaţiuni între suprafeţe de triunghiuri.* 1°. *Pe dreptele paralele* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *din acelaşi plan, se notează respectiv perechile de puncte* A *şi* A′, B *şi* B′, C *şi* C′ *precum şi punctele* α, β, γ *care divid segmentele* AA′, BB′, CC′ *în acelaşi raport arbitrar* k. *Dacă se notează cu* S_1, S, S′ *suprafeţele triunghiurilor* $\alpha\beta\gamma$, ABC, A′B′C′ se găseşte că între aceste suprafeţe avem relaţiunea

$$(k + 1)\, S_1 = S + kS'.$$

Această relaţiune a fost găsită de D-l G-l Gh. Buicliu la pag. 392 punctul 2, ca o observaţie la problema 4205, rezolvată la pag. 259, Vol. XLII.

Tot această relaţiune a fost dată şi de D-l R. Goormaghtigh le pag. 512, Vol. XLII pe o altă cale decât aceea întrebuinţată de D-l G-l Gh. Buicliu.

In cele ce urmează voiu da proprietăţii o soluţie cu totul elementară.

Presupunem că suprafeţele ABC, A′B′C′ sunt pozitive, ceea ce înseamnă că sensurile circulatorii ABC, A′B′C′ sunt pozitive şi fie

$$\frac{\overline{\alpha A}}{\overline{A'\alpha}} = \frac{\overline{\beta B}}{\overline{B'\beta}} = \frac{\overline{\gamma C}}{\overline{C'\gamma}} = k.$$

(In soluţiile dela pag. 392 şi 512, Vol. XLII s'au considerat rapoartele $\frac{\overline{\alpha A}}{\overline{\alpha A'}}$, ceea ce înseamnă $-k$, faţă de notaţia noastră din prezenta notă).

Pe o figură în care Δ_1 este la mijloc, Δ_2 la stânga şi Δ_3 la dreapta, iar A şi A′ sunt deasupra lui BC şi B′C′, se vede că avem următoarele relaţii între suprafeţele ce se formează:

$$S_1 = \alpha\beta\gamma = BB'A'C'C - (B\beta\gamma C + \beta B'C'\gamma\alpha + B'A'C').$$

Dar

$$BB'A'C'C = BAC + (k+1)\,\beta B'A'C'\gamma\alpha = S + (k+1)\,\beta B'A'C'\gamma\alpha$$

şi

$$B\beta\gamma C = k\,.\,\beta B'C'\gamma.$$

Rezultă deci

$$S_1 = S+(k+1)\,(S'+\beta B'C'\gamma\alpha) - (k\,.\,\beta B'C'\gamma + \beta B'C'\gamma\alpha + S')$$
$$= S+(k+1)\,(S'+\beta B'C'\gamma\alpha) - [k(\beta B'C'\gamma\alpha + S_1) + \beta B'C'\gamma\alpha + S']$$
$$= S + kS' - kS_1$$
$$\therefore \qquad (k+1)\,S_1 = S + kS'$$

adică formula de demonstrat.

Urmând cuvânt cu cuvânt acelaşi raţionament se găseşte următoarea teoremă, pentru geometria în spaţiu:

Pe patru drepte paralele nesituate în acelaşi plan, se notează respectiv perechile de puncte A *şi* A', B *şi* B', C *şi* C', D *şi* D', *şi punctele* α, β, γ, δ *care divid segmentele* AA', BB', CC', DD', *în acelaşi raport* k. *Dacă se notează cu* V_1, V, V' *volumele tetraedelor* $\alpha\beta\gamma\delta$, ABCD, A'B'C'D', *atunci avem relaţiunea*

$$(k+1)\,V_1 = V + kV'.$$

V. THÉBAULT.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Proba scrisă la examenul pentru trimis ofiţeri de infanterie la studii în Germania. Al doilea examen. August 1943

Infanterie. I. Să se calculeze suma

$$E = \frac{x^2}{1+\frac{x}{y}} + \frac{y^2}{1+\frac{y}{x}}$$

şi să se arate că pentru $x = \frac{1}{y}$, valoarea ei este unu.

II. Diferenţa a două numere este 5 iar raportul lor este 2. Care sunt acele numere?

III. Să se calculeze:

$$\sin(a \pm \pi) \quad \text{şi} \quad \cos(a \pm \pi).$$

IV. Să se împartă suprafaţa unui trapez în două părţi echivalente printr'o dreaptă care taie bazele.

Notă: Numai trei chestiuni, la alegere, sunt obligatoriu.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine. Tome XXVI, No. 4, Bucureşti 1943. M. DRĂGANU: Sur l'hypothèse d'un domaine fonctionnel d'incertitude et l'énergie propre de l'électron. G. SUDAN: Sur les nombres *Delta*. C. BUDEANU: Sur l'induction d'un élément de conducteur.

Europäische Revue. Sept./Okt. 1943. XIX. Jahr-Heft 9/10. Stuttgart-Berlin.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXIII. Nr. 11 Ianuarie 1944. I. V. MĂTIEŞ: Asupra formelor nedeterminate. V. ALACI: Asupra formelor nedeterminate. Note matematice, Bibliografii, Probleme rezolvate şi propuse.

România Aeriană. Anul XVII. Nr. 12. Decembrie 1943. G-L I. RĂŞCANU: Sburătorii noştri. PROF. V. VÂLCOVICI: Aer şi Apă. Ing. AL. C. VISSARION: Avionul contra carului de luptă. C-DOR ANDREI POPOVICI: In iurul unei idei. C-DOR ING. I. LINTEŞ: Studiul economic al bombardamentelor de aviaţie la mari distanţe. SP. VÂRNAV: Să scontăm viitorul. MEDIC G-L I. BĂLĂNESCU: Columbofilia. VALENTIN POPESCU: Planorul de şcoală în concepţia actuală a sborului fără motor. SLT. C-DOR TR. UDRISCHI: Din activitatea echipajelor noastre de linie. AL. VLĂDICESCU: Un precursor al aviaţiei în timpul revoluţiei franceze. CONST. ARGEŞANU: Baladă. ROMÂNIA AERIANĂ: Instructorul de sbor fără motor.

CERERI

327. Unele table numerice cu numere având multe cifre la partea întreagă sau la partea zecimală au cifrele grupate câte 5 cu o coloană albă printre grupe. Care sunt avantagiile acestei grupări? Este evident că dispoziţia aceasta economiseşte spaţiul tipărit şi permite a se determina repede rangul unei cifre oarecare, dar aceste avantaje nu justifică înlăturarea grupării obişnuite a aritmeticei de a grupa numere câte trei spre a corespunde scrisul numerelor cu pronunţarea lor.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

E. HUMBERT. *Problèmes de trigonométrie et exposé des principales théories.* Paris. Vuibert 1921.

TH. CARONNET. *Exercices de trigonométrie*, Paris. Vuibert 1934.

Donate de D-l I. IONESCU, inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1958. *Se consideră în planul orizontal un triunghiu* abc *şi un punct* O *de pe linia de pământ.*

1°. *Să se aducă prin* O, *planul* P *care face unghiuri de* 60° *cu ambele plane de proiecţie.*

2°. *Să se determine prin proiecţiile sale şi în adevărata mărime triunghiul* ABC *situat în planul* P *care se proiectează pe planul orizontal după triunghiul* abc.

3°. *Să se determine axa verticală, situată în planul de profil al punctului* C, *în jurul căreia trebue învârtit acest triunghiu pentru ca proiecţiile verticale* a'b'c' *după rotaţie să vină în linie dreaptă cu un punct dat* α *al liniei de pământ. Să se determine unghiul de rotaţie.*

Aplicaţie :

a (25, 20, 0) , *b* (40, 45, 0) , *c* (55, 16, 0) , α (25, 0, 0).

Datele sunt în mm, *iar* O *este originea.*

T. LALESCU.

Soluţia. Vom demonstra mai întâi că: *„Dacă un plan* P *face unghiuri egale cu planele de proiecţie, atunci urmele sale* αP *şi* αP' *pe aceste plane sunt egal înclinate pe linia de pământ.*

Considerăm planul P cu urmele sale αP şi şi αP' (fig. 1). Dintr'un punct O al liniei de pământ, ducem pe planul P perpendiculara OI, apoi din I ducem pe urmele planului, perpendicularele IM şi IN. După teorema celor trei perpendiculare, dreptele OM şi ON sunt respectiv perpendiculare pe urmele αP şi αP' şi formează triunghiurile dreptunghice OMI şi ONI.

Unghiurile din M şi N măsoară unghiurile diedre ale planului P cu planele de proiecţie. Aceste unghiuri fiind egale, triunghiurile dreptunghice OMI şi ONI care au ipotenuza OI comună, sunt egale,

deci $$OM = ON.$$

Deducem apoi de aci egalitatea triunghiurilor dreptunghice OMα şi ONα. Rezultă

$$\widehat{P\alpha O} = \widehat{P'\alpha O}$$

cu alte cuvinte urmele Pα şi P'α sunt egal înclinate pe linia de pământ Oα. Planul P este perpendicular pe primul plan bisector.

Reamintim cum se construeşte un plan PαP' care face un unghiu dat *u* cu planele de proiecţie. Fie PαP' în fig. 2, planul astfel construit. Ducem planul RβR' perpendicular pe planul orizontal şi pe planul PαP'. Intersecţia planurilor PαP', RβR' este dreapta *ab*, *a'b'* din figură iar unghiul diedru al celor două planuri este unghiul pe care-l face urma Pβ cu intersecţia AB (proiectată în *ab*, *a'b'*). Dacă se rabate *a'* în A pe planul orizontal atunci

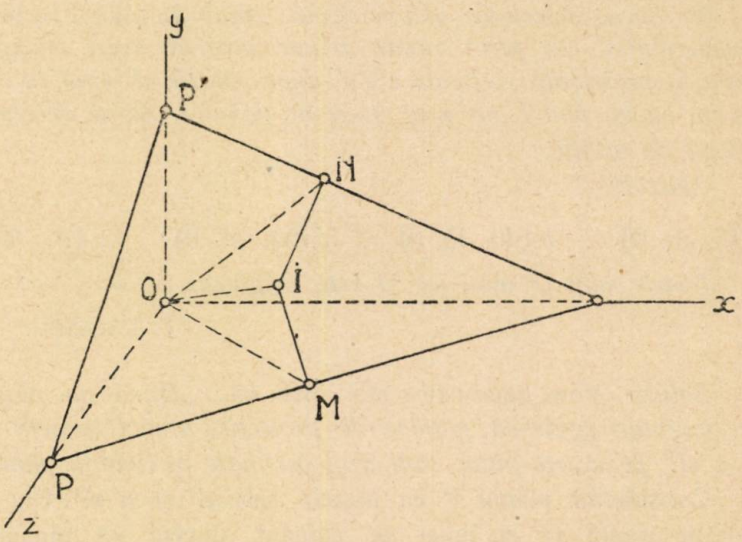


Fig. 1.

unghiul diedru al celor două planuri, în adevărata mărime este unghiul A*b*β. Cercul de centru β şi rază β*b* este tangent urmelor Pα, P'α şi taie linia de pământ în un punct T. Triunghiurile dreptunghice Aβ*b* şi Tβ*a'* sunt egale, având catetele egale prin construcţie, de aici rezultă

$$\sphericalangle\, \beta T a' = \sphericalangle\, A b \beta$$

De aici următoarea construcţie: In un punct T' al liniei de de pământ se construeşte unghiul *u*. Din *a'* de pe latura lui se coboară perpendiculara *a'*β şi apoi se duce tangenta *a'*α la cercul de centru β şi rază βT. Tangenta α*b* la acelaşi cerc este urma orizontală a planului căutat.

Se poate determina unghiul

$$v = \sphericalangle P'a\beta = P\alpha\beta$$

şi prin calcul. Din figura 2 avem

$$\alpha'\beta = \overline{\alpha\beta}\,\mathrm{tg}v \quad ; \quad \beta b = \overline{\alpha\beta}\,\sin v \quad ; \quad \overline{\beta A} = \overline{\beta b}\,\mathrm{tg}u = \overline{a'\beta}$$

$$\therefore \qquad \overline{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{tg}v = \overline{\alpha\beta}\,\sin v\,.\,\mathrm{tg}u$$

$$\therefore \qquad \cos v = \frac{1}{\mathrm{tg}\,u}.$$

Problema este deci posibilă numai dacă $u \geqslant 45^0$.
Pentru cazul enunţului

$$u = 60^0 \quad , \quad \cos v = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad v = 54^0\ 44'\ 7''$$

Trecem acum la rezolvarea problemei.

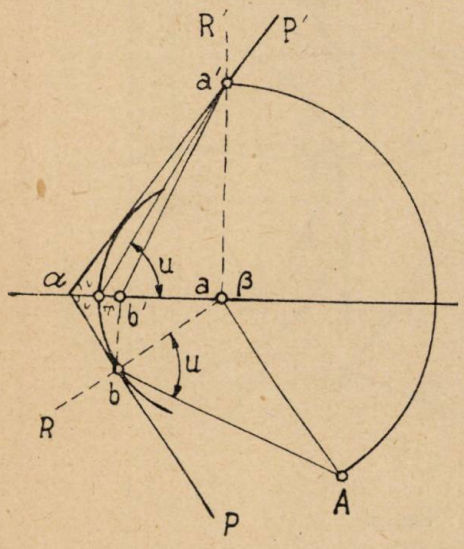


Fig. 2.

1°. Construim pe epură într'un punct α al liniei de pământ planul $P\alpha P'$ ca în figura 2 pentru $u = 60^0$, apoi din O ducem paralelele PO, P'O la urmele planului $P\alpha P'$. Planul POP' este planul căutat.

2°. Avem în proiecţie orizontală triunghiul *abc*, proiecţia unui triunghiu ABC din planul P. Proiecţiile verticale a', b', c' ale vârfurilor acestui triunghiu se obţin ducând prin proiecţiile *a*, *b*, *c* drepte particulare ale planului P. De exemplu prin *a* aducem frontala *ah*, $a'h'$, etc. Triunghiurile *abc*, $a'b'c'$, sunt proiecţiile unui triunghiu ABC din planul POP'. Rabatem triunghiul astfel găsit, pe planul orizontal şi avem triunghiul ABC în adevărata mărime.

3°. Dacă a', b', c' sunt aduse prin rotație, să fie în linie dreaptă cu punctul α de pe linia de pământ, înseamnă că ele sunt aduse a fi situate într'un plan $R\alpha R'$ perpendicular pe planul vertical. Urma orizontală a acestui plan, este perpendiculara αR în α pe linia de pământ. Rămâne să găsim urma $\alpha R'$ a lui și axa de rotație în jurul căreia s'a rotit planul P'OP.

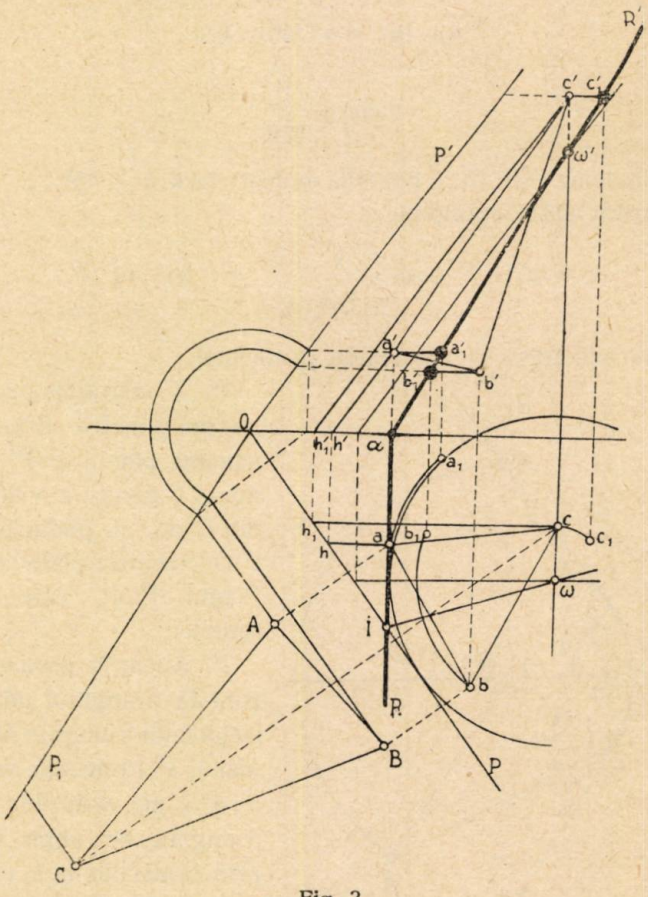


Fig. 3.

Prin rotația planului P'OP, urma orizontală OP rămâne tangentă unui cerc care se poate construi ducând o bisectoare a unghiului I făcut de urmele αR cu OP.

Avem o soluție luând bisectoarea unghiului obtuz I ce întâlnește dreapta cc' în punctul ω; acesta este proiecția orizontală

a punctului unde axa de rotire înţeapă planul P. Proiecţia verticală a acestui punct se află ducând prin ω o frontală a planului care taie pe cc' în proiecţia verticală ω'. Axa de rotaţie este verticală $\omega\omega'$. In această rotaţie proiecţiile verticale a', b', c' se mişcă pe drepte paralele la linia de pământ până ce ajung pe urma $\alpha\omega'$ sau $\alpha R'$ urma planului rotit şi adus în poziţia de plan proiectant $R\alpha R'$. Am obţinut prin această rotaţie proiecţiile a_1', b_1', c_1' în linie dreaptă cu α.

In proiecţie orizontală, proiecţiile a, b, c descriu arce cu centrul în ω şi ajung în noile poziţii a_1, b_1, c_1 pe proiectantele $a_1'a_1'$, $b_1'b_1'$, $c_1'c_1'$.

Unghiul de rotire măsurat în sensul acelor ceasornicului, este egal cu unghiul $OI\alpha$ făcut de urmele orizontale OP cu αR. Se observă imediat că acest unghiu ascuţit este complimentul unghiului $\alpha OI = \nu$ făcut de urma OP cu linia de pământ. Mărimea unghiului de rotire este deci

$$\sphericalangle I = \frac{\pi}{2} - \nu = 35^0,\ 15'\ 53''.$$

Dacă rotirea se face în sens contrariu unghiul este egal cu

$$2\pi - I = 324^0\ 44',\ 7''.$$

O a doua soluţie a acestui punct 3°, se obţine luând bisectoarea unghiului ascuţit I, care întâlneşte dreapta cc' în ω_1, dela care pornind găsim proiecţia lui verticală ω_1' şi deci axa de rotire $(\omega_1\omega_1')$. Unghiul de rotaţie în jurul acestei axe are una din valorile

$$\sphericalangle I_1 = \frac{\pi}{2} + \nu = 144^0\ 44',\ 7'' \quad \text{sau} \quad 2\pi - I_1 = 215^0\ 15'\ 53''$$

după cum rotaţia se face într'un sens sau în sens opus. Punctele I_1, ω_1, ω_1' nu sunt marcate pe epură. Epura, fig. 3, este construită la scara $^1/_1$ cu datele numerice ale enunţului.

I. ST. TEODORESCU.

PROBLEMA 4297. *Să se rezolve un triunghiu cunoscând un unghiu, latura opusă, precum și produsul lungimilor bisectoarelor interioare ale celorlalte două unghiuri. Discuție.*

M. GHERMĂNESCU.

Prima soluție, dată de D-l D. D. MAVRODIN, când era student.

Fie A, a, k^2 elementele date, iar b, c, laturile necunoscute ale triunghiului dat. Formulele cunoscute dintr'un triunghiu ne permit a scrie

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc},$$

$$k^2=\frac{4a^2bc\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{(a+b)(a+c)}=\frac{2abc(b+c+a)\sin\frac{A}{2}}{a^2+a(b+c)+bc}.$$

Să punem

$$x=b+c\quad,\quad y=bc,$$

relațiunile de mai sus se transformă în următoarele două ecuațiuni cu necunoscutele x și y,

$$(1)\qquad 4y\cos^2\frac{A}{2}=x^2-a^2$$

$$(2)\qquad ak^2(x+a)+k^2y=2ay(x+a)\sin\frac{A}{2}.$$

Valoarea lui y, scoasă din (1), o introducem în (2); simplificând ecuația obținută prin $x+a\neq 0$, obținem ecuația de gradul al doilea în x

$$(3)\quad 2a\sin\frac{A}{2}x^2-k^2x+ak^2-2a^3\sin\frac{A}{2}-4ak^2\cos^2\frac{A}{2}=0,$$

care are rădăcinile reale și neegale căci realizantul

$$R=\left(k^2-4a\sin\frac{A}{2}\right)^2+32a^2k^2\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}$$

este întotdeauna pozitiv, el neputând fi nul decât dacă $A=0$ sau $A=180^0$, cazuri excluse pentru un triunghiu propriu zis.

Ecuația (3) are evident o rădăcină pozitivă. Pentru ca și cealaltă să fie tot pozitivă, trebue ca termenul liber în (3) să fie pozitiv, ceea ce conduce la

$$(4) \qquad k^2 \geqslant \frac{2a^2 \sin\frac{A}{2}}{1 - 4a\cos^2\frac{A}{2}}.$$

O altă condiție pe care trebue s'o îndeplinească x este $x > a$, ceea ce conduce la $32a^2k^2 \sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} \geqslant 0$, evidentă.

Odată determinat x, (1) arată că y va fi de același semn cu x.

Cunoscând $x = b + c$, $y = bc$, putem determina laturile b și c, ca rădăcini ale ecuației

$$u^2 - xu + y = 0.$$

Trebue, în primul rând, ca $x^2 - 4y \geqslant 0$ sau, după (1)

$$x^2 - \frac{x^2 - a^2}{\cos^2\frac{A}{2}} \geqslant 0 \quad , \quad a^2 - x^2\sin^2\frac{A}{2} \geqslant 0,$$

deci $x < \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}$, valorile negative nefiind acceptabile.

Inlocuind aci pe x prin valoarea scoasă din (3), condiția precedentă devine

$$k^4 + 8a\sin\frac{A}{2}\left(2a^3\sin\frac{A}{2} + 4ak^2\cos^2\frac{A}{2} - ak^2\right) \leqslant (4a^2 - k^2)^2$$

sau

$$k^2\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) \leqslant 2a^2\cos^2\frac{A}{2}$$

sau, înlocuind $\cos^2\frac{A}{2} = 1 - \sin^2\frac{A}{2}$,

$$(5) \qquad k^2\left(1 + \sin\frac{3A}{2}\right) \leqslant 2a^2\cos^2\frac{A}{2}.$$

Dacă această condiție este îndeplinită, se găsesc valori reale și pozitive pentru laturile b și c, căci au suma și produsul pozitive. Cunoscând cele trei laturi, calculăm unghiurile necunoscute B și C cu formulele clasice.

A doua soluție, dată de D-nii: V. CEAUȘESCU și M. L. NEGREA. Dacă însemnăm cu β și γ cele două bisectoare, avem

$$\beta = \frac{a \sin C}{\sin\left(\frac{B}{2} + C\right)}, \quad \gamma = \frac{a \sin B}{\sin\left(\frac{C}{2} + B\right)},$$

(vezi și problema 3868, de același autor). Deducem

$$\beta\gamma = \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin\left(\frac{B}{2} + C\right)\sin\left(\frac{C}{2} + B\right)} = k^2;$$

însă

$$2 \sin B \sin C = \cos(B - C) - \cos(B + C) = \cos(B - C) + \cos A,$$

$$2 \sin\left(\frac{B}{2} + C\right)\sin\left(\frac{C}{2} + B\right) = \cos\frac{B - C}{2} - \cos\frac{3(B+C)}{2} =$$

$$= \cos\frac{B - C}{2} + \sin\frac{3A}{2}$$

așa că relația de mai sus devine

$$a^2 \cos(B - C) + a^2 \cos A = k^2 \cos\frac{B - C}{2} + k^2 \sin\frac{3A}{2}$$

sau încă, deoarece $1 + \cos(B - C) = 2\cos^2\frac{B - C}{2}$,

$$(1)\quad 2a^2\cos^2\frac{B-C}{2} - k^2\cos\frac{B-C}{2} - \left(2a^2\sin^2\frac{A}{2} + k^2\sin\frac{3A}{2}\right) = 0,$$

din care deducem

$$\cos\frac{B - C}{2} = \frac{k^2 \pm \sqrt{k^4 + 8a^2\left(2a^2\sin^2\frac{A}{2} + k^2\sin\frac{3A}{2}\right)}}{4a^2}.$$

Se vede că realizantul este pozitiv căci este o sumă de patrate sau de cantități pozitive $\left(\sin\frac{3A}{2} > \text{căci } A < \pi\right)$.

Cum $\frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2}$, iar radicalul este $> k^2$, numai semnul + înaintea radicalului este acceptabil. Mai trebue ca $\cos\frac{B-C}{2} \leqslant 1$, ceea ce conduce la condiţia (5) din prima soluţie.

Dacă această condiţie este îndeplinită, deducem diferenţa $B - C$ care, împreună cu $B + C = \pi - A$, ne dă unghiurile B şi C. Cunoscând o latură şi unghiurile, suntem într'un caz clasic de rezolvare.

Notă. D-l J. SEGAL arată că această problemă, se găseşte rezolvată în *„Exercices de Trigonométrie"* par F. G. M. pag. 337—40, unde este dată soluţia a doua de mai sus, pe care o reproduce de altfel şi D-sa. Este evident că noi nu am cunoscut acest fapt în momentul propunerii problemei de mai sus.

M. G.

PROBLEMA: 4315. *Există triunghiuri având laturile şi înălţimile sau bisectoarele interioare exprimate în numere întregi?*

MAIOR I. LINTEŞ.

D-l I. B. FLORESCU îmi face cunoscut că prima parte a problemei este rezolvată în *„Analyse indéterminée"* par R. D. CARMICHAEL, pag. 11, unde se dau soluţiile:

$$x = n.(m^2 + h^2) \quad ; \quad y = m\,(n^2 + h^2)$$

$$z = (m + n).(m.n - h^2)$$

unde m şi n sunt două numere întregi iar h înălţimea triunghiului coborîtă pe z, aşa fel că:

$$x + z_1 = m \quad ; \quad y + z_2 = n \quad \text{şi} \quad z = z_1 + z_2.$$

Pentru partea a doua ştim că bisectoarea coborîtă pe z are valoarea:

$$\beta = \sqrt{\frac{xy\,[(x+y)^2 - x^2]}{(x+y)^2}}$$

Se vede că punând de pildă:

$$xy = A^2 . (x + y) \quad \text{şi} \quad 2xy + y^2 = B^2 (x + y)$$

găsim că:

$$B^2 = b . A^2 \quad , \quad \text{iar} \quad A^2 = a . (b^2 - 2),$$

deci:

$$x = a . (b^2 - 1) \quad \text{şi} \quad y = a . (b^2 - 2) . (b^2 - 1)$$

Astfel pentru $a = b^2 - 2 = 2$ avem:

$$x = 0 \quad , \quad y = 12 \quad \text{şi} \quad \beta = 8.$$

Prin urmare concluzia este că asemenea triunghiuri există.

I. L.

PROBLEMA 4405. *Fie* $\varphi_1(N)$ *indicatorul lui* N, $\varphi_2(N)$ *indicatorul lui* $\varphi_1(N)$, ... *şi în general* $\varphi_i(N)$ *indicatorul de ordinul* i *al lui* N.

Să se arate că dacă

$$\varphi_8(N) < 100,$$

$\varphi_{11}(N)$ *este sau* 1 *sau o putere a lui* 2.

T. POPOVICIU.

Soluţia. $\varphi_8(N)$ poate fi egal cu 1 sau cu un număr par. Considerăm deci pe 1 şi toate numerele pare pozitive < 100. Dintre aceste numere putem suprima numerele

(1) 14, 26, 34, 38, 50, 62, 68, 74, 76, 86, 90, 94, 98,

care nu pot fi indicatori, deci nu pot fi valori ale lui $\varphi_8(N)$.

Dintre numerele rămase, proprietatea e demonstrată pentru 1, pentru puterile lui 2 şi pentru acelea care, afară de 2, nu au decât factori primi de forma $2^n + 1$ la o putere cel mult egală cu 3. Intr'adevăr indicatorul de ordinul 3 al unui astfel de număr este 1 sau o putere a lui 2, deci dacă $\varphi_8(N)$ ia o astfel de valoare, numărul $\varphi_{11}(N) = \varphi_3(\varphi_8(N))$ este 1 sau o putere a lui 2.

După aceasta rămâne să mai demonstrăm proprietatea pentru numerele

22, 28, 42, 44, 46, 52, 56, 68, 66, 70, 78, 82, 84, 88, 92.

Dintre aceste numere proprietatea este demonstrată pentru acelea al căror indicator nu are, afară de 2, decât factori primi de forma $2^n + 1$ la o putere cel mult egală cu 2 şi anume pentru motive analoage cu acelea de mai sus.

In felul acesta mai rămân de examinat numerele

$$46,\ 58,\ 92.$$

Un calcul simplu ne arată că

$$\varphi_3(46) = 4\ ,\quad \varphi_3(58) = 4\ ,\quad \varphi_3(92) = 8,$$

şi proprietatea este complect demonstrată.

Observări. 1. Cu toate că problema nu prezenta nicio dificultate specială, totuşi nu s'a primit dela corespondenţi decât o soluţie acum câteva zile şi anume dela D-l GH. GH. VRÂNCEANU (Liceul militar, Iaşi), care a examinat problema dând lui $\varphi_3(N) = M < 100$ diferite valori numerice.

2. Pentru rezolvarea problemei este inutil să cunoaştem toate numerele (1). E suficient să ştim că 94 nu poate fi indicator, deoarece $\varphi_3(94) = 10$ nu este o putere a lui 2.

3. La rezolvarea proplemei 4405 a fost inutil să se examineze dacă toate numerele pare < 100 pot fi indicatori de ordinul 8. Se ştie că un număr par, care nu are decât factorii primi 2 şi 3 este indicator de orice ordin [1]) Acestea sunt numerele de forma 2^α şi de forma $2^\alpha\, 3^\beta$. Până la 100, afară de 1, numerele

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 32,\ 36,\ 48,\ 54,\ 64,\ 72,\ 96$$

pot deci fi indicatori de orice ordin.

Pentru un număr par N care are cel puţin un factor prim impar diferit de 3 există deci un indice k, care va depinde în general de N astfel ca acest număr să fie indicator de ordinul k dar să nu fie indicator de ordinul $k + 1$. Evident că atunci N este şi indicator de ordinele $1, 2, \ldots, k-1$. Numărul k poate să fie egal şi cu 0, ceea ce însemnează că N nu poate fi indicator. Pentru numerele (1) avem $k = 0$. Recomand corespondenţilor, ca un bun exerciţiu, să calculeze numărul k pentru toate numerele pare < 100.

T. P.

---

1) Vezi: T. POPOVICIU, *Sur les indicateurs*, Bull. Ec. Polyt. Timişoara, 3, 72—80 (1930).

PROBLEMA 4636. *Un triunghiu* ABC *are vârful* A *fix, iar vârfurile* B *şi* C *mobile pe o sferă dată* O.

Să se demonstreze că centrul de greutate al triunghiului ABC *nu poate eşi din interiorul unei suprafeţe* Γ *şi să se determine această suprafaţă.*

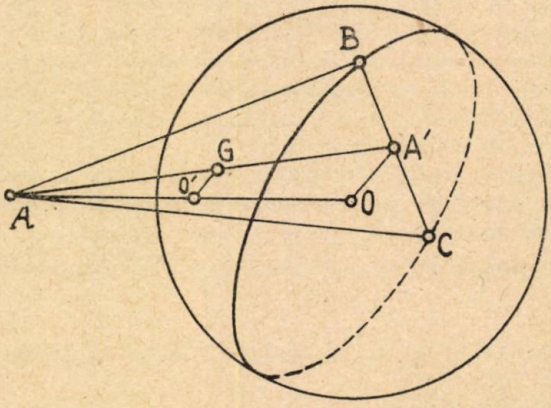
Soluţiuni geometrice.

ULPIU FLORESCU.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA D. POPA şi S-LT. M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

Fie A' mijlocul lui BC şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Deci

$$AG/AA' = 2/3.$$



In planul AA'O se duce prin G o dreaptă paralelă cu A'O şi care taie pe AO într'un punct O'.

Din $\Delta AGO' \sim \Delta AA'O$, deduc

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{AG}{AA'} = \frac{O'G}{OA'} = \frac{2}{3}.$$

Din primul şi ultimul raport se deduce că punctul O' e fix, iar din ultimele două

$$O'G = \frac{2}{R} OA'. \qquad (1)$$

Punctele B şi C fiind pe sferă, A' mijlocul segmentului BC e în interiorul sferei, deci

$$OA' \leqslant R .$$

Egalitatea are loc când punctele B şi C se confundă.

Inlocuind în (1) găsesc

$$O'G \leqslant \frac{2}{3} R . \qquad (2)$$

Punctul O' fiind fix, relaţia (2) ne arată că punctul G nu poate ieşi din interiorul unei sfere cu centrul în O' şi rază

$$R_1 = \frac{2}{3} R.$$

Egalitatea ne arată că punctul G se găseşte pe sferă când punctele B şi C se confundă.

Deci suprafaţa Γ e o sferă O' omotetica sferei O faţă de punctul A, raportul de omotetie fiind 2/3.

PROBLEMA 5454. *Fie* A, B, C *triunghiul format de axele radicale ale unui cerc* O *cu alte trei cercuri de centru* A, B, C *şi de centru radical* O_1. *Perpendicularele duse prin* O *pe cevienele* A_1M, B_1M, C_1M *ale unui punct* M *din planul triunghiului* $A_1B_1C_1$ *intersectează laturile triunghiului* ABC *în trei puncte colineare pe o dreaptă perpendiculară pe* O_1M.

THEODOR G. COCEA.

Soluţie şi generalizare. Fie ABC şi $A_1B_1C_1$ două triunghiuri ortologice. Perpendicularele din A, B, C pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 se întâlnesc în P iar perpendicularele din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA, AB se întâlnesc în P_1. Perpendicularele duse din P pe cevienele A_1M, B_1M, C_1M taie laturile BC, CA, AB în punctele α, β, γ colineare pe o dreaptă perpendiculară pe P_1M.

Intr'adevăr se vede că

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\sin \alpha PB}{\sin \alpha PC}$$

deci

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\sin \alpha PB}{\sin \alpha PC} \frac{\sin \beta PC}{\sin \beta PA} \cdot \frac{\sin \gamma PA}{\sin \gamma PB} = 1$$

căci unghiurile αPB, αPC, ... sunt respectiv egale sau suplimentare cu unghiurile MA_1C_1, MA_1B_1, ...

Se vede, după corespondența ce există între ele și cevienele A_1M, B_1M, C_1M că punctele α, β, γ nu pot fi decât colineare.

Triunghiurile MA_1B_1 și $C\alpha\beta$ sunt ortologice, căci perpendicularele din C, α, β pe A_1B_1, MA_1, MB sunt concurente în P. Deci perpendicularele din M, A_1, B_1 respectiv pe $\alpha\beta$, $C\alpha$, $C\beta$ sunt concurente în P_1, al doilea centru de ortologie, adică P_1M este perpendiculară pe $\alpha\beta\gamma$.

In cazul problemei propuse dreapta $\alpha\beta\gamma$ este perpendiculară pe dreapta ce unește M cu centrul radical al cercurilor (A), (B), (C).

P. P. DRĂGHICESCU
(Liceul Militar, Iași).

Notă. Urmând soluția D-lui P. P. DRĂGHICESCU, putem da încă următorul enunț pentru triunghiurile *isologice:* Fie ABC, $A_1B_1C_1$ două triunghiuri isologice; dreptele duse din A, B, C și făcând unghiul φ cu B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 se întâlnesc în P iar dreptele duse din A_1, B_1, C_1 și făcând unghiul $\pi - \varphi$ cu BC, CA, AB se întâlnesc în P_1. Dreptele duse prin P și făcând unghiul $\pi - \varphi$ pe cevienele A_1M, B_1M, C_1M ale unui punct arbitrar M, taie laturile BC, CA, AB în punctele $\alpha\beta\gamma$ colineare pe o dreaptă care face unghiul φ cu P_1M.

N. M.

PROBLEMA 5583. *Dacă* p, q, r... *reprezintă toate numerele prime, care nu depășesc un întreg oarecare* n, *atunci avem:*

$$n! = \frac{\Pi\left[E\left(\frac{n}{p}\right)\right]! \ldots \Pi\left[E\left(\frac{n}{p \cdot q \cdot r}\right)\right]! \ldots \Pi (p)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} \ldots}{\Pi\left[E\left(\frac{n}{p \cdot q}\right)\right]! \ldots \Pi\left[E\left(\frac{n}{p \cdot q \cdot r \cdot s}\right)\right]! \ldots \Pi (p \cdot q)^{E\left(\frac{n}{pq}\right)} \ldots}$$

unde $E(x)$ *reprezintă partea întreagă a lui* x, *iar:*

$$\pi [E(x)]! = [E(x)]! [E(y)]! \ldots$$

COMANDOR I. LINTEȘ.

Soluție dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Produsul numerelor prime cu N din șirul natural al numerelor până la n este (vezi *G. M.* XLI—278):

$$P_n(N) = \frac{n!\,\Pi\left[E\left(\frac{n}{a.b}\right)\right]!\ldots\,\Pi\,(ab)^{E\left(\frac{n}{ab}\right)}\ldots}{\Pi\left[E\left(\frac{n}{a}\right)\right]!\ldots\,\Pi\,(a)^{E\left(\frac{n}{a}\right)}\ldots}$$

unde $a, b, \ldots$ sunt factorii primi ai lui N.

Dacă însă $a = p$, $b = q$, $c = r, \ldots$ atunci $P_n(N) = 1$ deoarece numărul 1 este prim. Rezultă dar imediat relația din enunț.

PROBLEMA 5606. *Să se găsească numerele de 4 cifre* $N \equiv (abcd)$, *astfel că*

$$(abcd) \equiv 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 11$$

$$(bacd) \equiv 2^{\alpha-1} \times 3^{\beta-1} \times 41.$$

ALEX. V. NICULESCU.

Soluția 1-a. Fie

$$(abcd) \equiv 1000a + 100b + 10c + d$$

$$(bacd) \equiv 1000b + 100a + 10c + d;$$

de aci prin împărțire obținem

$$\frac{1000a + 100b + 10c + d}{1000b + 100a + 10c + d} = \frac{66}{41}$$

sau efectuând, reducând și simplificând cu 25

$4(344a - 619b) = 10c + d$; cum $10c + d < 100$, rezultă:

$$(I) \qquad 344a - 619b < 25$$

deci $$a < \frac{619b + 25}{344} \leqslant 9$$

și prin urmare $$b \leqslant 5.$$

Rămâne de încercat aşa dar valorile $b = 1, 2, 3, 4$ şi 5, pentru a satisface pe (I).

$b = 1$, trebue ca $a \leqslant 2$; inegalitatea (I) nu se verifică;
$b = 2$, cere pentru $a \leqslant 4$, ceea ce nu verifică pe (I);
$b = 3$, încercăm $a \leqslant 6$, dar inegalitatea (I) nu se verifică;
$b = 4$, şi $a \leqslant 8$ nu verifică inegalitatea;
$b = 5$, cere $a \leqslant 9$ şi obţinem

$$3096 - 3095 < 25.$$

Rezultă deci

$$10c + d = 04$$

şi singura soluţie este

$$N \equiv 9504 = 2^5 \times 3^2 \times 41 \text{ cu } 5904 = 2^4 \times 3^2 \times 41.$$

II. *Soluţia 2-a.* Prin scăderea celor două relaţii date se găseşte

$$36(a - b) = 2^{\alpha-1} \cdot 3^{\beta-1};$$

cum a şi b sunt de o singură cifră şi $a > b$, rezultă că putem lua

$$a - b = 1, 2, 3, 4, 6, 8;$$

de unde perechile de soluţii pentru α şi β

$$\alpha = 3, 4, 3, 5$$

$$\beta = 3, 3, 4, 3$$

se obţine astfel soluţia 9504.

Soluţia 3-a. Din condiţiile de divizibilitate cerute rezultă că

A) $$a + b + c + d = 9, 18, 27$$

şi

B) $$(a + c) - (b + d) = 0, 11;$$

pe de altă parte egalitatea obţinută la prima soluţie se scrie

C) $$2475b - 1386a + 10(a + c) + (b + d) = 0.$$

Combinând primele cazuri ale relaţiilor A), B) cu relaţia C) găsim

$$2(a + c) = 9,$$

deci o relaţie imposibilă în numere întregi.

Considerând acum relaţia C) împreună cu secunda din A) şi prima din B), obţinem

$$a + c = b + d = 9$$

şi

$$25b + 1 = 14a$$

de unde

$$a = \frac{25b + 1}{14}.$$

Observăm că b este aci un număr impar $\leqslant 5$, şi încercând găsim $b = 5$; $a = 9$ prin urmare $c = 0$ şi $d = 4$. Soluţia este 9504.

Procedând în acelaşi fel cu celelalte cazuri, obţinem soluţii imposibile în numere întregi, sau de o singură cifră. Unica soluţie a problemei este deci 9504.

Observări. a) Soluţia I-a a problemei nu corespunde exact enunţului; ea constitue o soluţie pentru problema:

„Să se determine numerele $(abcd)$ ştiind că avem

$$\frac{(abcd)}{(bacd)} = \frac{66}{41},$$

care poate fi privită ca o generalizare a enunţului celei date; ea mai poate arăta *unicitatea* sau *coincidenţa* celor 2 probleme.

In acest fel au dat soluţii D-nii: Oct. C. Gheorghiu (clasa a VII-a), M. Bârzescu (clasa a IV-a liceul militar, Iaşi) şi Slt. Mirel D. Stoenescu.

b) Soluţia II-a, a fost dată de D-nii: Minea V. Aldea (elev-inginer), I. Andarache, A. Andrei (liceul militar, Iaşi), Marcel Cotariu (Brăila), Aurel Cubat (Iaşi), C. D. Eftimie (elev-inginer), C. I. Staicu (Cernăuţi). R. Voinea (elev-inginer).

c) Soluţia III-a, — adevărata soluţie aritmetică — a fost dată de D-nii: I. Gr. Enăchescu (clasa a VI-a Timişoara) şi N. M. George (Craiova).

d) Au dat soluţii mai lungi sau făcând încercări mai multe, unele neprecise: D-ra Lydia Tudoran şi D-nii: Căp. E. Şt. Iacob, M. Andreescu, P. Columbeanu, G. Donţu, P. P. Drăghicescu, C. C. Iliescu, Claudiu Seni, V. D. Păläceanu, D-tru Vasiliu, Eugen Wegener şi Ion N. Păunescu.

A. V. N.

PROBLEMA 5618. *Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cifrele 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9 şi de două ori cifra 7, să se formeze un patrat perfect şi rădăcina sa.*

St. Cetăţeanu.

I. *Soluție* dată de D-l S-lt M. AL. VASILESCU-STABU.

Fie N^2 și N patratul căutat și rădăcina sa. Fiind că N^2 și N au la un loc 9 cifre, rezultă că N are 3 cifre și N^2 are 6 cifre. Apoi față de condițiile enunțului

$$023567 < N^2 < 987765 \quad \therefore \quad 303 < N < 994$$

sau ținând seama de cifrele de întrebuințat

$$307 \leqslant N \leqslant 873.$$

Fie acum

$$\overline{xyz}^2 = \overline{abcdef}$$

unde $x, y, z, a, b \ldots$ reprezintă cifrele din enunț. Observăm că N nu se poate termina cu 0, 5 sau 6 pentrucă atunci și N^2 s'ar termina cu aceste cifre, care însă nu se pot întrebuința de două ori. De asemeni N nu se poate termina cu 2,8 sau 9 pentrucă atunci N^2 s'ar termina cu 4 sau 1, care nu sunt date. Rămâne că N se poate termina numai cu 3 sau 7 și avem

$$(10\overline{xy} + 3)^2 = 100\overline{xy}^2 + 60\overline{xy} + 9 = \overline{abcde}9 \qquad (1)$$

sau

$$(10\overline{xy} + 7)^2 = 100\overline{xy}^2 + 140\overline{xy} + 49 = \overline{abcde}9 \qquad (2)$$

Pentru (1), e este ultima cifră a lui $6 \times y$, iar pentru (2) ultima cifră a sumei $(4 \times y + 4)$. Dând lui y valori din cifrele neîntrebuințate ale enunțului găsim:

z	3		7		
e	0	2	6	6	8
y	5	7	3	8	6

Prin urmare avem de cercetat numerele

$$\overline{x53}^2 = \overline{abcd09} \quad ; \quad \overline{x73}^2 = \overline{abcd29} \quad ; \quad \overline{x37}^2 = \overline{abcd69};$$

$$\overline{x87} = \overline{abcd69} \quad ; \quad \overline{x67}^2 = \overline{abcd89}.$$

Pentru primul avem

$$\overline{x53}^2 = 10000x^2 + 10600x + 2809 = 100\overline{abcd} + 9$$

$$\therefore \quad 100x^2 + 106x + 28 = \overline{abcd}$$

unde x poate fi 6, 7 sau 8, deci am putea avea

$$\overline{abcd} = 4264 \quad ; \quad 5670 \quad \text{sau} \quad 7276.$$

Primele două sunt inadmisibile căci au cifrele 4, 0 şi 5 întrebuinţate de câte două ori în ansamblu. Ultimul dă

$$853^2 = 727609$$

care este soluţie a problemei.

Examinând analog pe celelalte valori ale lui *abcd* nu mai găsim altă soluţie.

II. *Soluţie*, dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Sumând cifrele date se găseşte

$$0+2+3+5+6+7+7+8+9 = 47 = 9m+2.$$

Deci trebue să avem

$$N^2 + N = 9m + 2.$$

Faţă de divizorul 9 nu avem însă această egalitate decât dacă

$$N = 9m+1 \quad , \quad 9m+4 \quad \text{sau} \quad 9m+7. \qquad (3)$$

Ţinând seamă de acestea şi de faptul că N nu se poate termina decât în 3 sau 7, urmează că în limitele fixate ca la soluţia I, N trebue căutat între numerele

523, 583, 673, 703, 763, 823, 853

367, 577, 607, 637, 727, 757, 787, 877.

Prin ridicarea la patrat se găseşte soluţia

$$853^2 = 727609.$$

Este de observat că nu-i nevoie să se efectueze complect *toate* ridicările la patrat, căci unele numere se elimină chiar dela începutul celui de-al doilea produs parţial, care dă ultimele 2 cifre ale patratului. Astfel se elimină 607, 757 ale căror patrate se termină cu 49 sau 703 al cărui patrat se termină cu 09, cifrele 4 sau 0 fiind deja întrebuinţate la rădăcini. S'au făcut numai 10 ridicări complecte la patrat.

Au rezolvat bine problema, prin încercări mai numeroase D-nii: M. V. ALDEA, G. GH. DONŢU, CĂP. E. ŞT. IACOB, C. C. ILIESCU, PETRE F. IONESCU, OCT. C. GHEORGHIU, VL. GH. JURIST, DORU MUSCELEANU, V. D. PĂLĂCEANU, AD. POPESCU, CL. SENI, MIREL D. STOENESCU, D. GH. VASILIU şi E. WEGENER (Bucureşti).

Pentru probleme de asemenea natură a se vedea nota dela pag. 86. Vol. XLVI, dela finele soluţiei problemei 4605.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 5653. *O mărgea, asimilabilă unui punct material de greutate* P, *lunecă în lungul unui fir inextensibil, de lungime 2l, de greutate neglijabilă, legat cu capetele sale în punctele* A *şi* B *situate pe o orizontală* ($\overline{AB} = 2a$). *In poziţie iniţială mărgeaua este lăsată liber în* M_0 *pe prelungirea lui* $\overline{AB}$, *iar firul* AM_0B *este întins. Să se determine:*

a) *Iuţeala maximă a mărgelei în mişcarea sa de-a-lungul firului.*

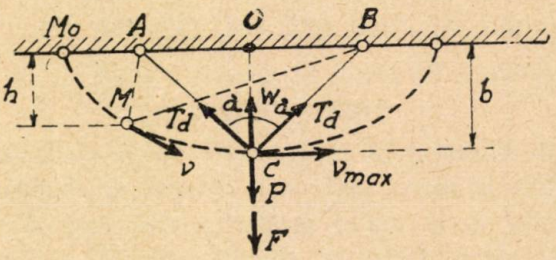
b) *Acceleraţia mărgelei şi tensiunea dinamică în fir, când mărgeaua trece prin poziţia sa de echilibru static.*

c) *Condiţia ca tensiunea dinamică să fie de două ori mai mare decât tensiunea statică pentru poziţia de echilibru static.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de D-nii: C. D. EFTIMIE, EMIL S. MODÂLCĂ şi MIRCEA STĂNCULESCU (Politechnica Bucureşti).

Se observă că traiectoria punctului material este o elipsă cu focarele în A şi B având axa mare egală cu $2l$ şi axa mică $2b = 2\sqrt{l^2 - a^2}$.



Să presupunem că mărgeaua a coborît pe elipsă cu o distanţa *h*. Iuţeala în această poziţie ne este dată de *teorema energiei cinetice:*

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh.$$

De unde:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Iuţeala v va fi maximă când h va fi maxim adică în poziţia C, *în punctul cel mai de jos al elipsei:*

$$v_{max} = \sqrt{2gb} = \sqrt{2g\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Poziția de echilibru static este tot punctul C, observăm deci că *mărgeaua trece cu iuțeala maximă prin poziția de echilibru static.*

Accelerațiile *tangențială* W_t și *nomală* W_n în C sunt:

$$W_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

deoarece în C v este maxim $W_n = \frac{v_{max}^2}{\rho}$.

Deoarece: $\rho = \frac{l^2}{b} = \frac{l^2}{\sqrt{l^2 - a^2}}$.

Rezultă: $W_n = 2g\frac{l^2 - a^2}{l^2}$.

Accelerația *totală* W va fi: $W = W_n = 2g\frac{l^2 - a^2}{l^2}$

și va fi îndreptată conform figurii după semi-axa mică către centrul O al elipsei. Pentru determinarea *tensiunii dinamice* T_d în fir, vom aplica principiul lui D'ALEMBERT scriind condiția de *echilibru dinamic* între forța *dată* P, *forța de inerție:*

$$F = mW = \frac{2P(l^2 - a^2)}{l^2}$$

și forțele de *legătură* tensiunile T_d în fir.

Prin proiecție pe verticală obținem:

$$2T_d \cos\alpha = P + F = P + \frac{2P(l^2 - a^2)}{l^2}.$$

Intru cât: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l}$

rezultă: $T_d = \frac{2P(3l^2 - a^2)}{2l\sqrt{l^2 - a^2}}$.

Tensiunea statică în poziția de echilibru este:

$$2T_s \cos\alpha = P \quad ; \quad T_s = \frac{Pl}{2\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Pentru ca $T_d = 2T_s$, rezultă:

$$l = a\sqrt{2} \quad ; \quad a = b.$$

AL. ST.

PROBLEMA 5666. *Din două puncte* A_1 *şi* A_2, *situate pe aceeaşi orizontală, la distanţa* l, *se asvârlă la acelaşi moment, două bile de mase* m_1 *şi* m_2 *respectiv cu iuţelile orizontale* v_1 *şi* v_2.

1°. *Să se determine locul de întâlnire al bilelor şi timpul după care se întâlnesc.*

2°. *Să se studieze ciocnirea lor: se va lua în acest caz coeficientul de elasticitate* k.

3.° *Să se determine condiţiile necesare astfel încât după ciocnire:*

a) *Bilele să cadă împreună pe verticală.*

b) *Fiecare bilă să urmeze traiectoria pe care ar fi descris-o cealaltă bilă dacă n'ar fi avut loc ciocnirea.*

Bilele vor fi asimilate unor puncte materiale; rezistenţa aerului va fi neglijată.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de D-nii: C. D. EFTIMIE (elev Politechnica din Bucureşti) şi D. GH. VASILIU (Liceul Militar, Iaşi).

Vom studia problema în două cazuri:

a) cazul când iuţelile v_1 şi v_2 sunt de *sens contrar* (figura 1);

b) cazul când iuţelile v_1 şi v_2 sunt de *acelaşi sens* (figura 2) şi $v_1 > v_2$.

In ambele cazuri vom alege drept axe de coordonate A_1x orizontala A_1A_2 şi A_1y verticala *descendentă* trecând prin A_1.

Cazul a:

Ecuaţiile mişcării bilelor asvârlite din A_1 şi A_2 sunt respectiv:

$$x_1 = v_1 t \quad ; \quad x_2 = l - v_2 t$$

$$y_1 = \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{2} g t^2.$$

Pentru întâlnire trebueşte ca $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$. Rezultă:

$$v_1 t_m = l - v_2 t_m .$$

De unde obţinem timpul t_m dela asvârlirea bilelor şi până la întâlnirea lor în M:

$$t_m = \frac{l}{v_1 + v_2}.$$

Coordonatele punctului de întâlnire M sunt:

$$x_m = v_1 t_m = l - v_2 t_m = \frac{v_1 l}{v_1 + v_2} \quad , \quad y_m = \frac{1}{2} g t_m^2 = \frac{g l^2}{2 (v_1 + v_2)^2}.$$

In M are loc ciocnirea. Componentele pe orizontală ale iuțelilor celor două bile sunt respectiv v_1 și v_2 și îndreptate conform figurii. Componenta verticală a iuțelilor este îndreptată în jos și are valoarea comună

$$gt_m = \frac{gl}{v_1 + v_2}.$$

Prin ciocnire, componenta verticală nu se modifică. Să notăm cu v_1' și v_2' respectiv iuțeala orizontală *după ciocnire* a bilei plecate din A_1 și A_2.

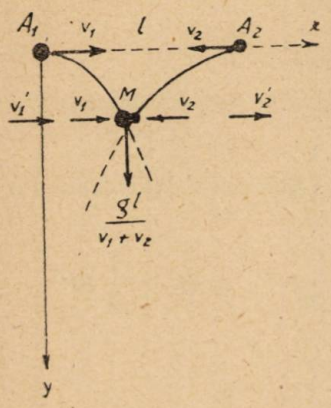


Fig. 1.

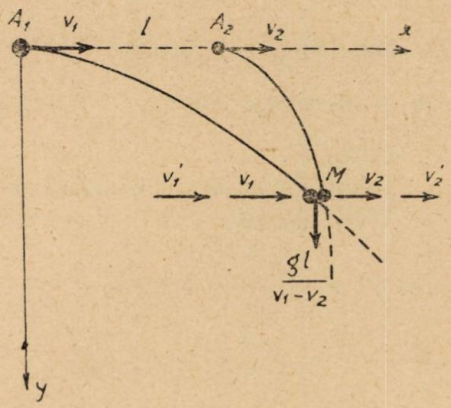


Fig. 2.

Teorema *constanței sumei cantităților de mișcare* ne dă relația:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'. \qquad (1)$$

Prin *definiția coeficentului de elasticitate* k avem o a doua relație:

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 + v_2}. \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul (1); (2) obținem:

$$v_1' = \frac{m_1v_1 - m_2v_2 - km_2(v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1v_1 - m_2v_2 + km_1(v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}.$$

Condiţiile ca după ciocnire, bilele *să cadă împreună* pe verticală sunt:

$$v_1' = 0 \quad ; \quad v_2' = 0.$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \qquad k = 0 \text{ } \textit{(ciocnire plastică)}$$

Condiţiile ca după ciocnire *fiecare bilă să urmeze traiectoria pe care ar fi descris-o cealaltă bilă dacă n'ar fi existat ciocnirea* sunt:

$$v_1' = -v_2 \quad ; \quad v_2' = v_1.$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$m_1 = m_2 \text{ } \textit{(mase egale)} \qquad k = 1 \text{ } \textit{(ciocnire perfect elastică).}$$

Cazul b :

Soluţia în acest caz urmează exact calea din soluţia cazului *a*.

Avem succesiv:

$$x_1 = v_1 t \quad , \quad x_2 = l + v_2 t \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad y_2 = \frac{1}{2} g t^2.$$

$$v_1 t_m = l + v_2 t_m \quad , \quad t_m = \frac{l}{v_1 - v_2}$$

$$\mathrm{M}\left(x_m = \frac{v_1 l}{v_1 - v_2} \quad ; \quad y_m = \frac{g l^2}{2 (v_1 - v_2)^2}\right.$$

Studiul ciocnirii este perfect analog:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{3}$$

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \tag{4}$$

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$

In cazul *b nu este posibilă* căderea comună pe verticală a celor două bile după ciocnire.

In adevăr pentru aceasta trebueşte ca:

$$v_1' = v_2' = 0$$

ceea ce conform relaţiilor (3); (4) conduce la condiţiile:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \qquad k = 0$$

din care prima este imposibilă, cantităţile m_1; m_2; v_1 şi v_2 fiind toate pozitive.

Pentru ca după ciocnire fiecare bilă să urmeze traiectoria pe care ar fi urmat-o cealaltă bilă dacă n'ar fi avut loc ciocnirea trebueşte să avem:

$$v_1' = v_2 \quad , \quad v_2' = v_1 .$$

Din (3) şi (4) obţinem condiţiile cerute:

$m_1 = m_2$ *(mase egale)* $\qquad k = 1$ *(ciocnire perfect elastică).*

AL. ST.

PROBLEMA 5685. *Se consideră coarda* AB *a unui cerc, pe care variază un punct* M. *Proiecţia lui* M *pe coarda* AB *fiind* N, *iar* P *şi* Q *fiind proiecţiile punctelor* A *şi* B *pe tangenta în* M *la cercul dat, să se afle locul geometric al centrului cercului* PNQ.

EMIL MORŢUN.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Se văd egalităţile de unghiuri:

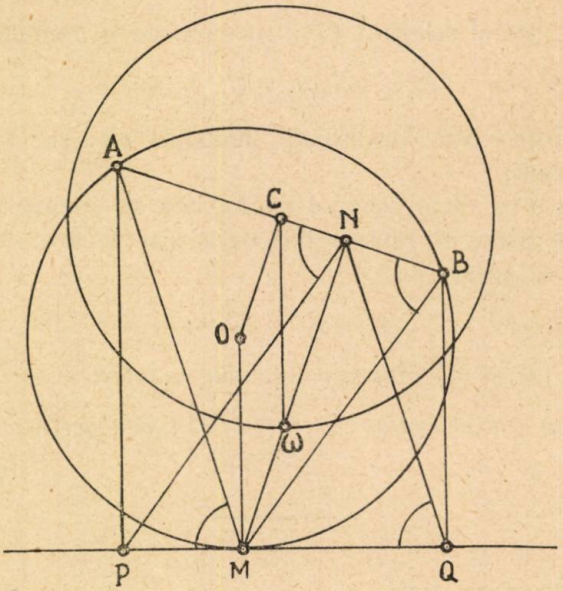
$$\hat{ANP} = \hat{AMP} = \hat{NBM} = \hat{NQM}.$$

Deci, cercul PNQ este tangent în N corzii AB. Centrul ω al cercului PNQ se găseşte pe MN. Acelaşi punct însă se găseşte şi pe mediatoarea segmentului PQ, adică pe proiectanta punctului C, mijlocul lui AB, pe tangenta PQ.

O fiind centrul cercului ABM, patrulaterul COMω este un paralelogram. Deci,

$$C\omega = OM = \text{const.}$$

Punctul ω descrie deci un cerc, egal cu cercul dat, ca centrul în mijlocul corzii AB.



S'au mai primit soluţii bune dela D-nii: Lt. N. Ştefănescu, Octav C. Gheorghiu (liceul Internat, Iaşi), Mircea Bârzescu, D-tru Nache, Tiberiu Turculeţ (liceul Militar, Iaşi).

Em. M.

PROBLEMA 5691. *Să se găsească două fracţii echivalente*[1] *aşa ca numărătorul uneia din ele să fie patratul numitorului celeilalte. Care din aceste fracţii poate fi ireductibilă?*

I. Ionescu.

Considerăm fracţiile echivalente $a^2/b = c/a \quad \therefore \quad a^3 = b.c$ (1) şi pentru a vedea care din ele poate fi ireductabilă, vom face următoarele presupuneri:

1⁰. *Numerele* a *şi* b *sunt coprime.* In acest caz din (1) rezultă $c = a^3$ şi $b = 1$, iar fracţiile devin $a^2/1 = a^3/a$, deci: prima nu este fracţie, iar a doua este reductibilă. Ex.: $9/1 = 27/3$.

---

1) In enunţul dela pagina 46, Vol. XLVIII cuvântul *echivalente* a scăpat neculeş la tipografie.

2°. *Numerele* a *şi* c *sunt coprime.* Atunci, din (1) rezultă $b = a^3$ şi $c = 1$, iar fracţiile devin $a^2/a^3 = 1/a$, deci: a doua este ireductibilă. Ex.: $4/8 = 1/2$.

3°. *Numerele* b *şi* c *sunt coprime.* Din (1) rezultă că

— sau unul din numerele b şi c se divide prin a şi atunci suntem în cazul 1° sau 2°;

— sau fiecare din numerele b şi c conţine o parte din factorii primi ai lui a. De exemplu dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \theta$ sunt numere prime şi avem

$$a = \alpha^m . \beta^n . \gamma^p . \delta^r \ldots \theta^t$$

atunci după (1) trebue să avem

$$b = \alpha^{3m} . \beta^{3n} \ldots \gamma^{3p} \ldots \quad \text{şi} \quad c = \delta^{3r} \ldots \theta^{3t} \ldots$$

iar cele două fracţii echivalente sunt

$$\frac{\alpha^{2m} . \beta^{2n} \ldots \gamma^{2p} \ldots \delta^{2r} \ldots \theta^{2t}}{\alpha^{3m} . \beta^{3n} \ldots \gamma^{3p}} = \frac{\delta^{3r} \ldots \theta^{3t}}{\alpha^m \beta^n \ldots \gamma^p \delta^r \ldots \theta^t}$$

şi se vede că dacă

$$r = \ldots = t = 0 \quad \therefore \quad c = 1$$

atunci fracţia a doua este ireductibilă.

4°. *Numerele* a, b, c *sunt prime între ele două câte două.* In acest caz relaţiunea (1) este imposibilă. Fracţiile sunt amândouă ireductibile, dar nu mai pot fi echivalente. Ex.: 9/5 ; 7/3.

5°. *Numerele* a *şi* b *nu sunt coprime.* Atunci, ele admit un codivizor maxim d şi avem $a = a' . d$ şi $b = b' . d$, în care a' şi b' sunt prime între ele. In acest caz (1) devine $a'^3 d^3 = b' . c . d$ $\therefore$ $c = a'^3$ şi $b = d^2$, iar fracţiile devin $a'^2 . d^2 = a'^3/a' . d$, deci: ambele reductibile. Ex.: $16/8 = 8/4$.

6°. *Numerele* a *şi* c *nu sunt coprime* Procedând ca la punctul 5 găsim fracţiile $a'^2 . d^2/a'^3 = d^2/a' . d$, deci: ambele reductibile. Ex.: $36/27 = 8/6$.

7°. *Numerele* b *şi* c *nu sunt coprime.* Atunci, avem $b = b' . d$ şi $c = c' . d$, în care d este codivizorul maxim, iar b' şi c' sunt prime între ele. In acest caz (1) devine $a^3 = b' . c' . d^2$, de unde

rezultă că cel puţin unul din factorii părţii a doua trebue să se împartă cu a. Prin urmare:

— dacă numai d se împarte cu a avem:

$$a^3 = b' \cdot c' \cdot d^6 \quad \therefore \quad a = b' = c' = 1 \quad \therefore \quad b = c = 1,$$

iar fracţiile devin: $1/1 = 1/1$;

— dacă numai b' este divizibil cu a, avem

$$a^3 = a^3 \cdot c' \cdot d^2 \quad \therefore \quad c' = d = 1 \quad \therefore \quad c = 1 \quad \therefore \quad a = b,$$

iar fracţiile devin a^2/a ; $1/a$, deci: cea de a doua ireductibilă, dar nu mai pot fi echivalente;

— dacă numai c' este divizibil cu a, avem:

$$a^3 = b' \cdot a^3 \cdot d^2 \quad \therefore \quad b' = d = 1 \quad \therefore \quad b = 1 \quad \therefore \quad a = c,$$

iar fracţiile devin: $a^2/1$; a/a, deci, prima nu e fracţie, a doua este reductibilă şi fracţiile nu mai pot fi echivalente;

8°. *Numerele* a, b, c *nu sunt prime între ele.* Atunci putem pune $a = a' \cdot d$, $b = b' \cdot d$, $c = c' \cdot d$, în care d este codivizorul maxim şi a', b', c' sunt prime între ele. In acest caz (1) devine: $a'^3 d^3 = b'c'd^2 \quad \therefore \quad a'^3 d = b' \cdot c'$, adică a' trebue să dividă cel puţin unul din factorii b', c', ceea ce este contrar ipotezei admise, deci fracţiile nu mai pot fi echivalente şi sunt ambele reductibile. Ex.: 36/10 ; 14/6.

In concluzie:

— problema are o infinitate de soluţii;

— exceptând forma 1/1, când fracţiile sunt echivalente, numai cea de a doua poate fi şi ireductibilă.

S-LT. M. AL. VASILESCU-STABU.

EXERCIŢII

16. *Fie* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *două triunghiuri înscrise în cercurile* (O_1), (O_2) *concentrice, cu centrul în* O *iar* A', B', C' *mijloacele segmentelor* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. *Să se demonstreze că*

$$\overline{A_1A_2}^2 + 4\,\overline{OA'}^2 = \overline{B_1B_2}^2 + 4\,\overline{OB'}^2 = \overline{C_1C_2}^2 + 4\,\overline{OC'}^2.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

R. Fie M şi N două puncte simetrice faţă de O. S'a demonstrat la pag. 548, Vol. XLVII *Gazeta Matematică*, că dacă avem 3 puncte colineare M, O, N astfel încât

$$\beta \overline{OM} = \alpha \overline{ON}$$

şi un triunghiu ABC, atunci avem

$$\beta \overline{MA}^2 - \alpha \overline{NA}^2 = \beta \overline{MB}^2 - \alpha \overline{NB}^2 = \beta \overline{MC}^2 - \alpha \overline{NC}^2 \qquad (1)$$

Făcând în (1), $\alpha = -\beta$, avem pentru exerciţiul de faţă

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{NA_1}^2 = \overline{MB_1}^2 + \overline{NB_1}^2 = \overline{MC_1}^2 + \overline{NC_1}^2$$

$$\overline{MA_2}^2 + \overline{NA_2}^2 = \overline{MB_2}^2 + \overline{NB_2}^2 = \overline{MC_2}^2 + \overline{NC_2}^2.$$

Adunăm aceste relaţiuni, ţinem seamă de teorema medianelor şi avem

$$2\left(\overline{MA_1}^2 + \overline{NA'}^2\right) + \overline{A_1A_2}^2 = 2\left(\overline{MB'}^2 + \overline{NB'}^2\right) + \overline{B_1B_2}^2 = 2\left(\overline{MC'}^2 + \overline{NC'}^2\right) + \overline{C_1C_2}^2$$

cere duc la relaţia din enunţ observând, că

$$\overline{MA'}^2 + \overline{NA'}^2 = 2\,\overline{OA'}^2, \ldots \text{ etc.}$$

17. *x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei*

$$x^2 + px + q = 0$$

să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt

$$1 - \frac{1}{x_1} \quad \text{şi} \quad 1 - \frac{1}{x_2}.$$

VAL. GH. ANDREI.

R. Avem, ţinând seamă de relaţiile între rădăcinele ecuaţiei date:

$$S = 1 - \frac{1}{x_1} + 1 - \frac{1}{x_2} = \frac{2q+p}{q}$$

$$P = \left(1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(1 - \frac{1}{x_2}\right) = \frac{q+p+1}{q}.$$

Deci ecuaţia cerută este

$$z^2 - \frac{2q+p}{q}\,z + \frac{q+p+1}{q} = 1.$$

18. *In orice triunghiu avem*

$$3\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} - \sum\cos^6\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{1}{64R^3}(r+r_a)(r+r_b)(r+r_c)\left[\sum\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} - \sum\cos^4\frac{A}{2}\right].$$

CPT. E. ST. IACOB.

R. Desvoltând determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos^2\frac{A}{2} & \cos^2\frac{B}{2} & \cos^2\frac{C}{2} \\ \cos^2\frac{B}{2} & \cos^2\frac{C}{2} & \cos^2\frac{A}{2} \\ \cos^2\frac{C}{2} & \cos^2\frac{A}{2} & \cos^2\frac{B}{2} \end{vmatrix}$$

obţinem

$$\Delta = 3\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} - \Sigma\cos^6\frac{A}{2}.$$

Adunăm la prima coloană a lui Δ pe celelalte şi apoi desvoltând găsim

$$\Delta = \Sigma\cos^2\frac{A}{2}\left[\Sigma\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} - \Sigma\cos^4\frac{A}{2}\right].$$

In fine ţinând seama de

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{r + r_a}{4R}, \quad \cos^2\frac{B}{2} = \frac{r + r_b}{4R}, \quad \cos^2\frac{C}{2} = \frac{r + r_c}{4R}$$

şi egalând cele două valori ale lui Δ se găseşte egalitatea din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

5893 *) Să se pună expresia

$$a^4 - a^2b^2 + b^4$$

sub forma unei sume de patrate. Să se studieze reciproca acestei proprietăţi.

M. GHERMĂNESCU.

5905. Numărul telefonului dela casa mea este 1.1764. Presupunând că l-aşi uita, cum l-aşi putea reconstitui memorând o singură cifră şi făcând cu ea operaţiuni aritmetice simple, elementare?

I. IONESCU.

5906. Să se găsească un cub perfect, care începe cu rădăcina sa cubică.

M. GHERMĂNESCU.

*) Problema publicată cu acest număr la pag. 322 din numărul precedent se publică din nou cu enunţul complectat.

5907. Să se găsească cifra d, numărul de două cifre ac și numărul de trei cifre abc, știind că

$$abc = 11 \times b \times d = 11 \times ac.$$

G-L GH. BUICLIU.

5908. O grădină dreptunghiulară este îngrădită cu un gard la care distanțele între stâlpi sunt egale. Proprietarul grădinii observă că ar fi putut face gardul, păstrând distanțele dintre stâlpi egale, dacă ar fi făcut acele distanțe fie cu 10 cm mai mici, fie cu 30 cm mari mari, însă în aceste cazuri ar fi trebuit fie 48 stâlpi mai mult, fie 126 stâlpi mai puțin.

Care este suprafața acelei grădini?

IOAN B. FLORESCU.

5909. Dacă x, y, z sunt numere întregi și pozitive, atunci avem

$$E\left(\frac{x}{z}\right)+E\left(\frac{x}{y}\right)+E\left(\frac{y}{z}\right)+E\left(\frac{y}{x}\right)+E\left(\frac{z}{x}\right)+E\left(\frac{z}{y}\right)$$

$$\leqq E\left(\frac{x+y}{z}\right)+E\left(\frac{x+z}{y}\right)+E\left(\frac{y+z}{x}\right),$$

unde $E(i)$ reprezintă întregii lui i.

COMANDOR I. LINTEȘ.

5910. Fie S aria unui poligon convex de n laturi, iar S_m aria poligonului având ca vârfuri centrele de greutate ale poligoanelor formate din câte $m+1$ vârfuri consecutive ale primului poligon. Se cere:

1°. Să se arate, că avem

$$p^2 S_{p-1} = (p+1)^2 S_p \quad , \quad n = 2p+1 \text{ impar}$$

$$S - 2^2 S_1 + 3^2 S_2 + \ldots + (-1)^{p-1} p^2 S_{p+1} + (-1)^p \frac{(p+1)^2}{2} S_p = 0,$$

$$n = 2p \text{ par.}$$

2°. Să se demonstreze inegalitățile

$$2-\left[\frac{3}{n}\right]\leqq\frac{4S_1}{S}\leqq 4-\left[\frac{3}{n}\right]-\left[\frac{4}{n}\right]-\left[\frac{5}{n}\right],\quad n\geqq 3,$$

$$2-\left[\frac{4}{n}\right]\leqq\frac{9S_2}{S}\leqq 9-2\left[\frac{4}{n}\right]-3\left[\frac{5}{n}\right]-\left[\frac{6}{n}\right]-\left[\frac{7}{n}\right]-\left[\frac{8}{n}\right],\ n\geqq 4,$$

unde $[\alpha]$ înseamnă cel mai mare întreg $\leqq\alpha$.

TIB. POPOVICIU.

5911. Dacă cercurile cu centrele A, B, C au un punct comun I și celelalte puncte de intersecție P, Q, R colineare, atunci:

1°. Dreptele (BR, CQ), (CP, AR), (AQ, BP) se întâlnesc în punctele D, E, F respectiv pe cercurile (A), (B), (C).

2°. Punctele A, B, C, D, E, F, I sunt conciclice.

GH. BAZACOV.

5912. Fie triunghiul ABC dat, $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic și A_2, B_2, C_2 picioarele bisectoarelor triunghiului ortic.

Dreapta BA_2 taie pe A_1C_1 în B_a; A_2C pe A_1B_1, în C_a și B_1C_1 pe BC în A'.

Să se arate, că punctele A', B_a, C_a, H sunt colineare.

CPT. I. G. ZAMFIRESCU.

5913. In triunghiul ABC dreptunghic în A, asociatul Γ_a al punctului lui GERGONNE este conjugatul armonic al punctului lui NAGEL față de segmentul AD_a, unde D_a este contactul cercului exînscris în unghiul A pe latura BC.

N. N. MIHĂILEANU.

5914. Fie (σ) o parabolă, (t) o tangentă fixă și (S) o secantă paralelă cu tangenta (t). Se consideră hiperbola echilateră (H), care aparține fascicolului linear definit de parabola (σ) și de aceea descompusă în dreptele (t) și (S). Când (S) variază, să se arate că:

1°. Hiperbolele (H) au asimptotele paralele.

2°. Centrele hiperbolelor (H) se găsesc pe aceeași dreaptă.

3°. In particular, când secanta (S) se confundă cu tangenta (t), centrul hiperbolei (H) şi punctul de contact al tangentei (t) sunt simetrice în raport cu directoarea parabolei (σ).

In acest caz, cele patru puncte comune hiperbolei (H) şi parabolei (σ) sunt confundate.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5915. In tetraedrul ABCD, sferele de centre B, C, D şi tangente două câte două, sferele de diametre BC, CD, DB şi sfera cu centrul în baricentrul triunghiului BCD şi cu diametrul egal cu o treime din perimetrul acestui triunghiu, sunt şapte sfere tangente la un acelaşi plan.

V. THÉBAULT.

5916. Dacă într'un triunghiu avem relaţia

$$\frac{r_c(a+b)+r_b(a-b)}{r_c(a+b)-r_b(a-b)} \times \frac{r_b(a+c)-r_c(a-c)}{r_b(a+c)+r_c(a-c)} = \frac{c}{b},$$

triunghiul este isoscel, sau are $\sphericalangle A = 60^\circ$.

MARCEL D. COTARIU.

5917. Se trage cu un tun având vitesa iniţială de 800 m/sec într'un panou înalt de 1 m.

1°. Se întreabă la ce distanţă maximă de gura ţevii trebue aşezat panoul pentru a fi atins, admiţând că se trage sub un unghiu de tragere de 30°.

2°. Să se studieze curba acestor distanţe, atunci când unghiul de tragere variază.

(Experienţa se face în vid).

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

5918. Un corp A, de rotaţie în jurul axei OO', are masa $M = 10$ kgr şi este aşezat deasupra unui corp B de masă $m = 5$ kgr şi tot de rotaţie în jurul axei OO'. Axele ambelor corpuri coincid.

Corpurile sunt legate între ele.

Se aplică în centrul de greutate G al corpului A o forţă verticală de sus în jos de 33 kgr, iar în centrul de greutate G' al corpului B, o altă forţă tot verticală de sus în jos de 45 kgr

Se lasă ambele corpuri să cadă în vid şi se cere a se calcula eforturile, de compresiune sau de tracţiune, care se desvoltă între cele două corpuri în timpul căderii.

Se presupune în calcule $g = 9{,}80$ m/sec.

I. VARDALA.

5919. Dintr'un punct A de pe un ţărm al unui râu, de lăţime $a = 300$ m şi iuţeala curentului apei $v_a = 1 \frac{km}{oră}$, o persoană vrea să treacă într'un punct B de pe celălalt ţărm la distanţă $b = 900$ m, în aval de A. Pentru aceasta, persoana se urcă într'o barcă. Iuţeala de vâslire este $v_b = 3$ km/oră.

Iuţeala de mers pe uscat este $v_m = 5$ km/oră. Presupunând că această persoană vrea să ajungă în cel mai scurt timp posibil în B, întâi vâslind şi apoi mergând pe ţărmul lui B, să se determine: 1° ce direcţie trebue să dea bărcii, 2° unde va debarca, 3° cât timp a făcut până în B.

GABRIELA ŢIŢEICA.

ERATĂ. 1°. La pag. 318 din numărul precedent, între rezolvitorii problemei 5825 se înlocueşte ILIE D. CONSTANTINESCU (Liceul militar, Iaşi) prin ILIE N. CONSTANTINESCU (Liceul „N. Bălcescu", Brăila).

2°. In articolul „*Cilindrul anallagmatic*" din G. M., Anul XLIX, Nr. 3, pagina 131 şi u., pe lângă vreo câteva îndreptări de indici şi accente, uşor de adus de către cititor, se mai face şi următoarea erată:

Pag. 132, rândul 5 de formule, să se citească

$$ds^2 = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{r^2}\left(\frac{du}{u}\right)^2 + \frac{a^2 + b^2}{r^2} dv^2.$$

Pag. 132, rândul 6 de formule, să se citească

$$V = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} v.$$

Pag. 152, rândul 2 de formule, să se citească

$$\sigma^2 \mu [\wp t - \wp \mu] \quad \text{şi} \quad \sigma^2 \nu [\wp t - \wp \nu].$$

Pag. 152, dela formula (28), inclusiv, înainte, să se pună atât în text cât şi în formule L* în loc de L.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Antonescu D. E. (5840); *Barbu A. I.* (4102, 5074, 851, 79, 96); *Bouvaist R.* (P); *Cantuniar Cristu* (5840, 46); *Caramalău V. E.* (5832); *Cârstea D. M.* (5896); *Chiriac C. C.* (5778, 91, 801, 43, 71, 86); *Constantinescu N. Ilie* (5871); *Drăghicescu P. P.* (1969, 5069, 343, 589, 846, 71, 79, 83, 86, 89, 94, 96, 98); *Gheorghe A. Grigore* (5896); *Iacob St. E.* (5870, E, P, R); *Iliescu C. C.* (4102, 550, 5801, 27, 38, 96, 98); *Ionescu F. Corneliu* (5813); *Manoliu M.* (5850, 96); *Marinescu Em.* (5852, 70, 79, 82, 86, 98); *Munteanu Gh. L.* (5815, 72); *Pălăceanu D. V.* (4022, 5412, 19, 35, 805, 32, 96, 98); *Ţincu C. C.* (5711, 91, 870); *Văduva F. M.* (5870, 71, 94); *Vrânceanu Gh. Gh.* (4405); *Wegener Eug.* (5894).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o** chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. ***Foile vor avea format de sfert de coală,*** iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 22.530

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1944

SUMARUL

1. Un an dela moartea lui A. Gh. Ioachimescu . . . . . *Al. Stoenescu.*
2. Formule pentru calculul suprafeţelor laterale ale solidelor rezultate din tăierea unui con circular drept cu un plan . . *Ing. O. S. Ianculescu.*
3. Patrate isofinale . . . . . *I. V. Mătieş.*
4. Asupra unei metode pentru calculul unghiurilor lui Euler . . . . . *N. T. Donciu.*
5. O metodă pentru scrierea ecuaţiei tangentelor dintr'un punct exterior la cerc şi sferă. Consecinţe pentru conice. . . *Gh. D. Simionescu.*
6. Concursul „Gazetei Matematice" . . . *Delegaţia Societăţii.*
7. Raportul comisiunii pentru premiul de aritmetică . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
8. Note matematice: 26 — 30.
9. Bibliografie.
10. Cereri: 328.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 1959, 3573, 3647, 4281, 5392, 5505, 5753, 5754, 5811, 5812, 5837.
13. Exerciţii: 19—25.
14. Probleme propuse: 5920 — 5934.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **9**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Calcul diferenţial şi analitic* . . . . . „ 250

UN AN DELA MOARTEA LUI A. GH. IOACHIMESCU

Cu două zile înaintea apariţiei acestui număr şi anume, la *13 Martie 1944* se împlineşte un an dela moartea profesorului ING. A. GH. IOACHIMESCU, membru fondator al *Gazetei Matematice.*

Reamintindu-ne cu emoţie figura sa blândă şi senină închinăm un gând pios în memoria sa.

Reproducem cu această ocazie şi o fotografie reprezentând pe marele dispărut în momentul când semnează actul de fundaţie la punerea pietrei fundamentale a localului *Gazetei Matematice* la 27 Octombrie 1933 înconjurat fiind de D-nii: ALEXANDRU BUNESCU, G-RAL GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, TANCRED CONSTANTINESCU şi GH. ILIESCU cunoscuţii membri şi susţinători ai *Gazetei Matematice.*

ALEXANDRU STOENESCU.

FORMULE PENTRU CALCULUL SUPRAFEȚELOR LATERALE ALE SOLIDELOR REZULTATE DIN TĂIEREA UNUI CON CIRCULAR DREPT CU UN PLAN

CAPITOLUL I

Preliminarii și observațiuni referitoare la problema 3069

In *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 415 s'a dat o soluție parțială problemei 3069 al cărei enunț este:

Printr'un plan oare care se secționează un con circular drept. Să se stabilească formule pentru exprimarea suprafețelor celor două solide căpătate prin această secționare.

In nota dela finele acelei soluțiuni, D-l G-l Gh. Buicliu observă că soluțiunea trebue complectată și pentru planurile care dau secțiuni parabolice sau hiperbolice.

In cele ce urmează îmi propun, să reiau acea problemă și să-i complectez soluția pentru toate cazurile.

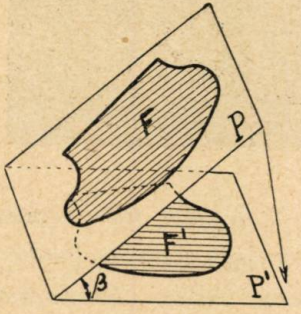


Fig. 1.

Inainte de a ne ocupa cu soluția acestei probleme, vom reaminti și demonstra mai întâi unele relațiuni între ariile suprafețelor plane și conice și proiecțiile lor.

O suprafață F într'un plan P proiectată normal pe un plan P′ devine F′.

Fie $\widehat{P.P'} = \beta$ (Fig. 1), avem:

$F' = F \times \cos\beta$ sau $F = F' : \cos\beta$. (1)

Aceste formule elementare sunt cunoscute, ele sunt valabile în cazul suprafețelor plane.

In cele ce urmează vom dovedi, că formule analoage cu (1) se aplică și în cazul unor anumite suprafețe conice, în unele condițiuni speciale.

Indicăm două metode deosebite.

Metoda I. Să considerăm un con circular drept SAB (Fig. 2), cu unghiul la vârf $\widehat{ASO} = \alpha$. Tăiem acest con cu un plan (P) înclinat cu unghiul β faţă de baza conului.

Secţiunea obţinută este evident o elipsă de arie (E) conţinută în planul (P). Această arie o proiectăm pe planul orizontal al bazei conului; putem aplica deci relaţiile (1) şi avem:

$$\text{arie}\,(E') = \text{arie}\,(E) \times \cos\beta. \qquad (2)$$

Să desfăşurăm suprafaţa laterală a conului SCD şi să o aşternem pe planul orizontal al elipsei (E'). Notăm cu S suprafaţa laterală a acestui con.

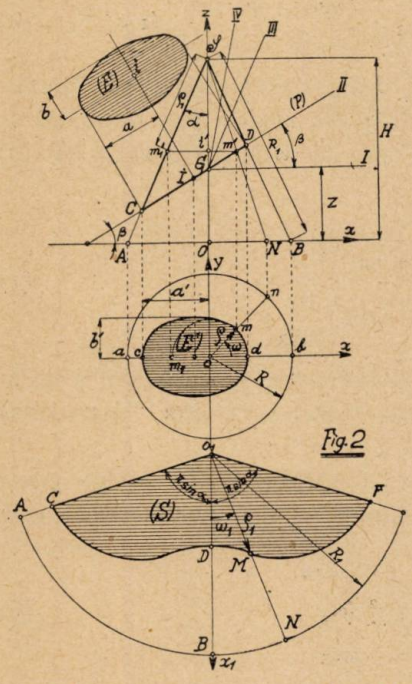


Fig. 2

Fie m un punct pe elipsa (E'); punctul corespunzător pe elipsa (E) şi pe con va fi m', iar în desfăşurarea suprafeţei laterale a conului va fi M.

Vom stabili o relaţie între coordonatele punctelor m şi M. Fie Ox axa polară; ρ şi ω coordonatele polare ale punctului m, iar Ox_1 axa polară, ρ_1 şi ω_1 coordonatele polare ale lui M.

Scriem că arc. (BN) de rază R_1 este egal cu arc. $(b.n)$ de rază R. Deci:

$$R_1\omega_1 = R\omega \;;\quad \therefore \quad \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{R}{R_1}$$

unde R şi R_1 sunt respectiv raza bazei şi generatoarea conului SAB.

Dar: $$R = R_1 \times \sin\alpha,$$

deci: $$\frac{\omega_1}{\omega} = \sin\alpha. \qquad (3)$$

De altă parte din (Fig. 2), avem:

$$\rho = \overline{om} = \overline{om_1} = \overline{i'm_1'} = \overline{Sm_1'} \times \sin\alpha = \rho_1 \times \sin\alpha,$$

căci: $$\overline{Sm_1'} = \overline{o_1M} = \rho_1.$$

Deci: $$\frac{\rho}{\rho_1} = \sin\alpha. \qquad (4)$$

Ecuaţia polară a elipsei (E') în raport cu polul o şi cu axa polară în sensul $0 \rightarrow x$, iar cu unghiul polar ω în sensul retrograd al mişcării acelor unui ceasornic, este dată de formula:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \times \cos\omega}. \qquad (5)$$

Unde: p şi ε reprezintă respectiv parametrul şi excentricitatea elipsei (E'). Dacă notăm cu a' şi b' semi-axele elipsei (E'), unde $a' > b'$, avem relaţiile cunoscute:

$$p = \frac{b'^2}{a'} = a'(1 - \varepsilon^2) \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a'^2 - b'^2}}{a'} \qquad (\varepsilon < 1). \qquad (6)$$

Ecuaţia curbei (CDF) din desfăşurarea suprafeţei laterale a conului, corespunzător elipsei (E') din acelaşi plan orizontal, se scrie uşor întroducând în (5) valorile lui ω şi ρ respectiv din (3) şi (4). Obţinem:

$$\rho_1 = \frac{\dfrac{p}{\sin\alpha}}{1 + \varepsilon \times \cos\left(\dfrac{\omega_1}{\sin\alpha}\right)}. \qquad (7)$$

Remarcăm însă că ω variază dela $(-\pi \sim +\pi)$ radiani [1]), iar în acelaşi timp după relaţia (3), ω_1 variază dela $(-\pi \times \sin\alpha \sim +\pi \times \sin\alpha)$ radiani.

Aplicând acum formula care dă mărimea unei suprafeţe plane în coordonate polare, găsim că suprafaţa S a conului SCD este dată de

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi \times \sin\alpha}^{+\pi \times \sin\alpha} \rho_1^2 \, d\omega_1 \qquad (8)$$

Dacă în (8) înlocuim pe ρ_1 cu valoarea sa din (7), obţinem:

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{p^2}{\sin^2\alpha} \times \int_{-\pi \times \sin\alpha}^{+\pi \times \sin\alpha} \frac{d\omega_1}{\left[1 + \varepsilon \times \cos\left(\dfrac{\omega_1}{\sin\alpha}\right)\right]^2} \qquad (9)$$

1) α radiani $= \pi \times \alpha^0 : 180^0$; (1 radian $= 56^0 17' 44{,}806''$).

Facem substituţia:

$$\frac{\omega_1}{\sin\alpha} = \varphi \quad \text{deci} \quad d\omega_1 = \sin\alpha \times d\varphi \qquad (\alpha = \text{const.}) \qquad (10)$$

Remarcând că ω_1 variază dela $(-\pi \times \sin\alpha \sim +\pi \times \sin\alpha)$ radiani, iar în acelaşi timp după relaţia (10), φ variază dela $-\pi \sim +\pi)$ radiani, avem

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{p^2}{2p \sin\alpha} \times \int_{+\pi}^{-\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \times \cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{2 \sin\alpha} \times I. \qquad (11)$$

Rămâne să calculăm integrala:

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \times \cos\varphi)^2} \qquad (\varepsilon < 1) \qquad (12)$$

Pentru integrare, considerăm un unghiu ajutător γ, definit de relaţia:

$$\cos\gamma = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \times \cos\varphi} \qquad (\varepsilon < 1) \qquad (13)$$

Din (13) deducem uşor următoarele relaţii:

$$1 + \varepsilon \times \cos\varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \times \cos\gamma} \quad ; \quad \sin\gamma = \frac{\sin\varphi}{1 + \varepsilon \times \cos\varphi} \times \sqrt{1 - \varepsilon^2};$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \times \cos\gamma} \times d\gamma. \qquad (14)^1)$$

Remarcând însă, când φ variază dela $(-\pi \sim +\pi)$ radiani, după relaţia (13) γ variază tot dela $(-\pi \sim +\pi)$ radiani. Deci integrala (12) cu substituţiile (14) se scrie succesiv:

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \times \cos\varphi)^2} = \int_{+\pi}^{-\pi} \frac{\left(\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \times \cos\gamma}\right) d\gamma}{\left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \times \cos\gamma}\right)^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - \varepsilon \cos\gamma}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} \times d\gamma$$

$$= \left| \frac{\gamma - \varepsilon \times \sin\gamma}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3}} \right|_{-\pi}^{+\pi} \qquad (\varepsilon < 1)$$

---

1) Demonstrarea acestor relaţiuni se dă la finele articolului în capitolul IX.

De unde, găsim uşor:

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} \qquad (\varepsilon < 1). \tag{15}$$

Introducând valoarea lui I din (15) în (11) şi ţinând apoi seama de relaţiile (6), obţinem succesiv:

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{p^2}{\sin\alpha} \times \frac{2\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} = \frac{\pi \times p^2}{\sin\alpha \sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} = \frac{\pi \times a' \times b'}{\sin\alpha}.$$

Dar: $\pi \times a' \times b'$ reprezintă tocmai aria elipsei (E'). Deci relaţia între suprafaţa laterală S a conului SCD şi aria proiecţiei ei (E') pe planul bazei conului, este:

$$S = \text{arie (E')} : \sin\alpha \quad \text{sau} \quad \text{arie (E')} = S \times \sin\alpha. \tag{16}$$

Rezultă aşa dar că dacă cunoaştem mărimea suprafeţei laterale a unui con circular drept tăiat cu un plan, înclinat cu un unghiu oarecare faţă de baza conului, atunci putem afla mărimea ariei proiecţiei acestei suprafeţe conice pe planul bazei conului, înmulţind suprafaţa laterală prin sinusul unghiului ce-l formează generatoarea, cu verticala vârfului conului.

Invers dacă cunoaştem aria proiecţiei suprafeţei conice pe planul bazei conului, şi o împărţim prin sinusul unghiului ce-l formează generatoarea cu verticala vârfului, obţinem suprafaţa laterală a conului.

Formulele (16) sunt analoage cu formulele (1) din (Fig. 1) aplicate la (Fig. 2).

Metoda II-a. Formulele (16) se mai pot deduce şi cu alte metode. O metodă mai simplă, ar fi următoarea:

Fie $\rho_1 = f_1(\omega_1)$ ecuaţia curbei (CDF) din desfăşurarea suprafeţei laterale a conului SCD (Fig. 2).

Ne propunem să calculăm mai întâi aria cuprinsă între două raze vectoare foarte apropiate. Pentru aceasta observăm că aria de calculat e funcţie continuă de $\nearrow \omega_1$. Dacă dăm lui ω_1 o creştere $\Delta\omega_1$, va corespunde, pentru ρ_1 o creştere $\Delta\rho_1$, iar pentru suprafaţă o creştere ΔS.

Dacă din o_1 descriem deci două cercuri cu razele respectiv ρ_1 şi $\rho_1+\Delta\rho_1$, atunci suprafaţa elementară ΔS va fi cuprinsă între suprafeţele celor doi sectori circulari elementari. Deci avem:

$$\frac{1}{2}\times\rho_1^2\times\Delta\omega_1<\Delta S<\frac{1}{2}\times(\rho_1+\Delta\rho_1)^2\times\Delta\omega_1$$

Sau:

$$\frac{1}{2}\times\rho_1^2<\frac{\Delta S}{\Delta\omega_1}<\frac{1}{2}\times(\rho_1+\Delta\rho_1)^2 \qquad (17)$$

Când $\Delta\omega_1$ tinde la zero, $\Delta\rho_1$ încă va tinde la zero, în virtutea continuităţii, deci relaţia (17) devine:

$$\frac{dS}{d\omega_1}=\frac{1}{2}\times\rho_1^2 \quad \therefore \quad dS=\frac{1}{2}\times\rho_1^2\,d\omega_1 \qquad (18)$$

Dar acestei suprafeţe elementare, îi corespunde în elipsa (E') suprafaţa:

$$dE'=\frac{1}{2}\times\rho^2\times d\omega, \qquad (19)$$

care se demonstrează la fel ca (18), căci curbei (CDF) de ecuaţie $\rho_1=f_1(\omega_1)$ îi corespunde elipsa (E') de ecuaţie $\rho=f(\omega)$ etc.

Impărţind deci (18) cu (19) şi ţinând apoi seamă de relaţiile (3) şi (4), avem succesiv:

$$\frac{dS}{dE'}=\frac{\frac{1}{2}\rho_1^2\,d\omega_1}{\frac{1}{2}\rho^2\,d\omega}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\times\frac{\sin\alpha\times d\omega}{d\omega}=\frac{1}{\sin\alpha} \quad (\alpha=\text{const.})$$

$$\therefore \quad dS=dE':\sin\alpha. \qquad (20)$$

De unde:

$$S=\frac{1}{\sin\alpha}\times\int_{(E')}dE'=\text{arie}\,(E'):\sin\alpha \quad (\alpha=\text{const.}).$$

In cazul particular, când tăiem conul circular (Fig. 2), cu un plan paralel cu planul bazei, secţiunea obţinută este evident un cerc (C), iar formula (16) devine:

$$S = \text{arie}\,(C) : \sin\alpha,$$

care se dovedeşte uşor, scriind că suprafaţa laterală desfăşurată este a unui sector circular cu raza egală cu $(r : \sin\alpha)$ şi cu unghiul la vârf egal cu $2\pi \times \sin\alpha$ radiani.

Deci:

$$S = \frac{1}{2} \times \text{raza} \times \text{arc}\,(2\pi r) = \pi r^2 : \sin\alpha, \text{ etc.}$$

Revenim la problema 3069. a) Să stabilim deci formula (4) din G. M., vol. XLVIII, pag. 416, care exprimă aria laterală a conului.

Formula (4) o stabilim direct cu relaţiile noastre (2) şi (16), şi obţinem:

$$S = \text{arie}\,(E) \times \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \qquad (21)$$

unde, dacă înlocuim: $\alpha = \theta$ şi $\beta = \pi/2 - \alpha$, avem formula (4) din G. M., Vol. XLVIII, pag. 416

b) Intersecţia unui con circular drept cu un plan, este o conică.

Excentricitatea unei conice se poate scrie sub forma:

$$\varepsilon = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}. \qquad (22)$$

Pentru:

$\beta = 0$, $\varepsilon = 0$, avem Cerc I

$\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\varepsilon < 1$, „ Elipsă II

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\varepsilon = 1$, „ Parabolă . . . III

$\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\varepsilon > 1$, „ Iperbolă IV

unde I, II, III, IV sunt planurile de secţiune, marcate pe fig. 2.

Pentru cazul particular al problemei 3069, dacă notăm cu a şi b semi-axele elipsei (E), avem relaţia cunoscută:

$$\varepsilon = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad (a > b) \text{ şi } (\varepsilon < 1)$$

unde înlocuind expresia semi-axei mari, cu valoarea sa calculată în G. M., Vol. XLVIII, pag. 417, obţinem expresia semi-axei mici, fără a utiliza formula lui DANDELIN.

CAPITOLUL II

Determinarea formulelor generale ale suprafeţelor laterale ale solidelor ce rezultă din intersecţia unui con circular drept cu un plan

Notăm cu R raza bazei şi cu H înălţimea unui con circular drept (Fig. 2). Dacă O este centrul cercului bazei, şi S vârful conului, atunci planul secant (P) taie axa de simetrie $\overline{OS}$ a conului într'un punct G situat la distanţa z faţă de O. Punctul G poate fi situat oriunde pe direcţia $\overline{OS}$.

Raportăm conul la trei axe rectangulare Ox, Oy şi Oz. Axa verticală Oz trece prin S. Luăm ca plan al figurii planul xOz perpendicular pe planul secant (P), ceea ce nu particularizează problema. Fie β înclinarea planului (P) faţă de planul orizontal xOy. Elementele în raport cu care vom exprima suprafeţele laterale ale celor două solide vor fi: R, H, z şi β.

Vom avea de studiat toate cazurile cuprinse în relaţia:

$$0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

excluzând cazurile particulare cunoscute:

$$\beta = 0 \quad \text{şi} \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Remarcăm că nu este necesar să studiem nici cazurile cuprinse în relaţia: $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, deoarece secţiunile obţinute se repetă.

Ne rămân de studiat următoarele trei cazuri:

Cazul A. $0 < \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$, secţiunea este o elipsă

Cazul B. $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, „ „ „ parabolă

Cazul C. $\frac{\pi}{2} - \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, „ „ „ iperbolă.

Cazul A: $0 < \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$. Intersecţia planului (P) cu conul SAB va fi evident:

a) un segment de elipsă când

$$\operatorname{arctg} \frac{z}{R} < \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$$

ca în figura A;

b) sau o elipsă complectă când

$$0 < \beta \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{R}$$

ca în fig. 2 dela pag. 383.

In acest caz planul (P) împarte conul SAB în 2 solide. Unul superior S(ACD) care are ca baze segmentul de elipsă (CD) şi segmentul de cerc (AC) şi solidul inferior văzut în secţiunea din fig. A sub triunghiul BCD.

Subcazul a): $\operatorname{arc\,tg} \frac{z}{R} < \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Notăm cu S_1 suprafaţa segmentului de elipsă cu semi-axele a, b unde $a > b$. Ne propunem să stabilim mai întâi formula generală a suprafeţei segmentului de elipsă şi apoi să calculăm mărimea suprafeţei corespunzătoare cazului nostru.

După cele ce ştim din calculul integral, suprafaţa cuprinsă între două ordonate y_1, y_2, axa Ox şi arcul superior al elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

este

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Dar, se ştie [1]), că

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Apoi din ecuaţia elipsei, avem:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Rădăcina negativă nu interesează. Deci I devine:

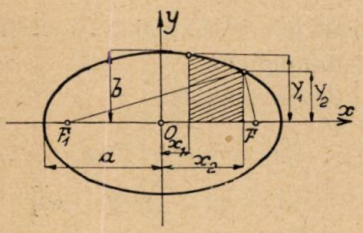
$$I = \frac{1}{2} \times \frac{a}{b}\left[x \times y + a \times b \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] + C.$$

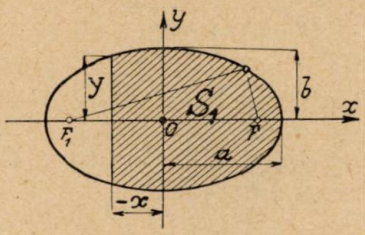
Introducând această integrală în expresia lui S găsim:

$$S = \frac{1}{2}(x_2 y_2 - x_1 y_1) + \frac{1}{2} ab\left[\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)\right]$$

cu condiţiile:

$$x_1 < x_2 < a \quad \text{şi} \quad y_2 < y_1 < b.$$





In cazul nostru (Fig. A) suprafaţa de evaluat este cuprinsă între ordonata $y_1 = -x$, arcul superior şi inferior al elipsei.

Deci:

$$x_1 = -x \;\; ; \;\; y_1 = y \;\; ; \;\; x_2 = a \;\; ; \;\; y_2 = 0.$$

Aşa dar

$$S_1 = x \times y + a \times b\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

---

1) Vezi: ... Hütte I. Band. 27. Auflage. 1941 ..... pag. 108.
H. Dubbel I. Band. 7. Auflage 1939 ... pag. 78—79.
M. Foerster. I. Band. 5. Auflage, 1928 ... pag. 67—68 etc. ...

Sau:

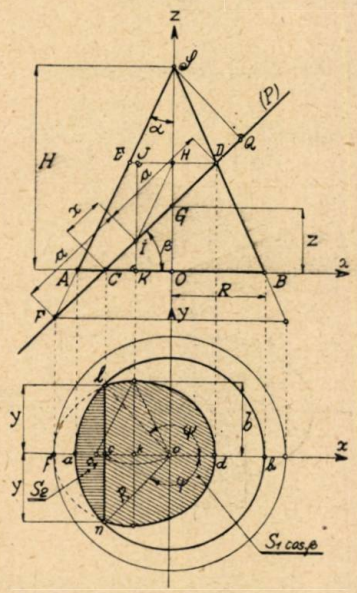
$$S_1 = x \times y + a \times b \times \arccos\left(-\frac{x}{a}\right)$$

cu condițiile:

$$-a \leqslant x \leqslant a \quad \text{și} \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

Urmează să stabilim acum valorile semi-axelor a, b precum și a mărimilor x și y. Ne referim la Fig. A.

Fig. A



Excentricitatea elipsei în cazul de față se scrie:

$$\varepsilon = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \; ; \quad (\varepsilon < 1).$$

Din triunghiurile SGF și SGD găsim semi-axa mare a elipsei. Din vârful S, comun acestor triunghiuri să lăsăm o perpendiculară $\overline{SQ}$ pe prelungirea bazelor lor. $\overline{SQ}$ este înălțimea comună a celor două triunghiuri.

Avem imediat:

$$\begin{cases} \overline{DG} = \overline{GQ} - \overline{DQ} \\ = \overline{SQ}\,[\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\beta - \alpha)] \\ \overline{FG} = \overline{FQ} - \overline{GQ} \\ = \overline{SQ}\,[\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\beta] \end{cases}$$

$$\widehat{DSQ} = \hat{\beta} - \hat{\alpha} \quad \text{iar} \quad \widehat{FSQ} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}.$$

Dar

$$\overline{SQ} = \overline{SG} \times \cos\beta = (H - z)\cos\beta.$$

Cu aceste relațiuni obținem ușor următoarele expresii:

$$\overline{DG} = (H - z) \times \frac{\sin\alpha}{\cos(\beta - \alpha)} \quad , \quad \overline{FG} = (H - z) \times \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Semi-axa mare a elipsei se scrie deci uşor:

$$a = \frac{1}{2} \times \overline{DF} = \frac{1}{2} \times (\overline{DG} + \overline{FG}) =$$

$$= (H - z) \times \sin\alpha \times \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\beta - \alpha)}.$$

Dacă ţinem seamă de identitatea:

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\beta - \alpha) = \cos^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta$$

şi apoi de relaţiunea $\text{tg}\alpha = R/H$, găsim în fine semi-axa mare:

$$a = \frac{HR(H - z)}{(H^2 - R^2 \text{tg}^2\beta)\cos\beta}.$$

Introducând această valoare în expresia excentricităţii, găsim semi-axa mică:

$$b = \frac{R(H - z)}{\sqrt{H^2 - R^2 \text{tg}^2\beta}}.$$

Ducem prin I, mijlocul segmentului $\overline{DF}$ o verticală până ce taie segmentele orizontale $\overline{ED}$ şi $\overline{AB}$ respectiv în J şi K.

Apoi să ducem din I dreapta $\overline{IH}$ paralelă la $\overline{EF}$. Punctul H de pe axa de simetrie a conului se află şi pe segmentul $\overline{ED}$ pe care îl împarte evident în două părţi egale. Avem din figură

$$\overline{CK} = \overline{CO} - \overline{KO} = \overline{CI} \times \cos\beta.$$

Unde:

$$\overline{CO} = \overline{GO} \times \text{cotg}\beta \quad \text{iar} \quad \overline{KO} = \overline{HJ} = \overline{IJ} \times \text{tg}\alpha = \overline{DI} \times \sin\beta\, \text{tg}\alpha$$

deoarece: $\widehat{IHG} = \widehat{HIJ} = \hat{\alpha}$ iar $\widehat{ICK} = \widehat{ICJ} = \hat{\beta}$.

Cu notaţiile noastre, avem:

$$\overline{CI} = x \quad ; \quad \overline{GO} = z \quad ; \quad \text{iar} \quad \overline{DI} = a.$$

Deci:

$$x\cos\beta = z\,\text{cotg}\beta - a\,\text{tg}\alpha\sin\beta.$$

unde, introducând pe a cu valoarea sa calculată precedent şi apoi ţinând seamă că $\text{tg}\alpha = R/H$, obţinem:

$$x = \frac{H}{\sin\beta} \times \left(\frac{Hz - R^2 \text{tg}^2\beta}{H^2 - R^2 \text{tg}^2\beta}\right).$$

Din triunghiurile dreptunghice *ocl* şi OCG avem imediat

$$\overline{cl} = \sqrt{\overline{lo}^2 - \overline{co}^2} \quad \text{unde} \quad \overline{co} = \overline{CO} = \overline{GO} \times \operatorname{cotg}\beta.$$

Cu notaţiile noastre, avem:

$$\overline{cl} = y \; ; \quad \overline{lo} = R \quad \text{iar} \quad \overline{GO} = z,$$

deci:

$$y = \sqrt{R^2 - z^2 \operatorname{cotg}^2\beta}.$$

Introducând pe a, b, x şi y cu valorile lor în expresia lui S_1 şi efectuând toate reducerile, obţinem suprafaţa segmentului de elipsă în mărime şi semn, în funcţie de R, H, z şi β:

$$S_1 = \frac{H(Hz - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)\sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2}}{\sin\beta \operatorname{tg}\beta (H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)} + \frac{HR^2 (H - z)^2}{\cos\beta \sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)^3}} \times$$

$$\times \arccos \left[\frac{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - Hz}{R(H - z) \operatorname{tg}\beta} \right]. \qquad (I)$$

Notăm acum cu S_2 suprafaţa segmentului de cerc $(\overset{\frown}{lan})$ cu raza R şi cu unghiul la centru $\overset{\wedge}{lon} = 2(\pi - \psi)$. rad. Suprafaţa segmentului de cerc $(\overset{\frown}{lan})$ se află scăzând din suprafaţa sectorului $(lano)$ suprafaţa triunghiului (lno), prin urmare:

$$S_2 = \frac{1}{2} \times R \times \operatorname{arc}(\overset{\frown}{lan}) - \frac{1}{2} \times \overline{ln} + \overline{co}.$$

Dar

$$\operatorname{arc}(\overset{\frown}{lan}) = 2R(\pi - \psi),$$

Din triunghiul dreptunghic *col*, găsim uşor:

$$\overline{ln} = 2\overline{cl} = 2R \times \sin(\pi - \psi) = 2R \times \sin\psi \; ; \; \overline{co} = R \times \cos(\pi - \psi) = -R\cos\psi.$$

Deci:

$$S_2 = R^2 \times (\pi - \psi) + R^2 \times \sin\psi \times \cos\psi.$$

Pe altă parte, din triunghiul dreptunghic OCG, avem:

$$\overline{CO} = \overline{GO} \times \operatorname{cotg}\beta = z \times \operatorname{cotg}\beta.$$

Cum însă $\overline{co} = \overline{CO}$, rezultă:

$$z \operatorname{cotg}\beta = R\cos(\pi - \psi) = -R\cos\psi.$$

De unde, obținem ușor următoarele relații:

$$\cos\psi = -\frac{Z}{R \times \operatorname{tg}\beta}\ ,\ \sin\psi = \frac{\sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2}}{R \times \operatorname{tg}\beta}\ ;\ \pi - \psi = \arccos\left(\frac{z}{R \operatorname{tg}\beta}\right).$$

Introducând aceste valori în expresia lui S_2 obținem:

$$S_2 = R^2 \times \arccos\left(\frac{z}{R \operatorname{tg}\beta}\right) - \frac{z}{\operatorname{tg}^2\beta} \times \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2} \qquad (II)$$

Notăm cu S_3 suprafața laterală ASD a solidului superior. Această suprafață este conică. Vom calcula pe S_3 în funcție de suprafețele plane S_1 și S_2 cunoscute din calculele precedente.

Proiecțiile suprafețelor S_1 și S_2 pe planul bazei conului, sunt respectiv:

$$S_1 \cos\beta \quad \text{și} \quad S_2.$$

Suma algebrică a acestor suprafețe reprezintă proiecția suprafeței laterale a solidului superior, pe planul bazei conului, ca și cum conul SAB ar fi tăiat cu două plane, anume: (P) și planul bazei sale xOy. Suntem deci îndreptățiți a aplica relațiile (1) respectiv (16) din Capitolul I, pentru (Fig. A).

Avem prin urmare:

$$S_3 = (S_2 + S_1 \cos\beta) : \sin\alpha.$$

Introducând aci pe S_1 și S_2 cu valorile lor, din (I) și (II) obținem formula suprafeței laterale a solidului superior în mărime și semn:

$$S_3 = R\sqrt{H^2 + R^2} \times \arccos\left(\frac{z}{R \operatorname{tg}\beta}\right) + \frac{HR\,(H - z)^2\sqrt{H^2 + R^2}}{\sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)^3}} \times$$

$$\times \left[\arccos\left(\frac{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - Hz}{R\,(H - z)\operatorname{tg}\beta}\right) - \frac{1}{H\,(H - z)} \times\right.$$

$$\left. \times \sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)\,(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2)}\right]. \qquad (III)$$

Notăm acum cu S_4 și S_5 respectiv suprafața laterală și suprafața bazei conului SAB, avem:

$$S_4 = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}\ ;\ S_5 = \pi R^2. \qquad (IV)$$

Notăm în fine cu S şi S' respectiv suprafaţa totală a solidului superior şi inferior, avem:

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \qquad (V)$$

iar:

$$S' = S_4 + S_5 - S_2 - S_3 + S_1. \qquad (VI)$$

Subcazul b). $0 < \beta \leqslant \text{arc tg } \frac{z}{R}$. Intersecţia planului (P) cu conul SAB va fi evident o elipsă complectă, după cum se vede din fig. 2. Păstrăm aceleaşi notaţii dela subcazul *a*). Observând că $S_2 = 0$ şi înlocuind chiar în valoarea $\pi \times ab$ a suprafeţei elipsei de axă mare CD valorile lui *a* şi *b* prin acelea găsite la pag. 393 vom avea:

$$S_1 = \pi \times \frac{HR^2 (H - z)^2}{\cos\beta \times \sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \beta)^3}}. \qquad (I)'$$

$$S_3 = \pi \times \frac{HR (H - z)^2 \times \sqrt{H^2 + R^2}}{\sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \beta)^3}}. \qquad (II)'$$

Ţinând seamă de formulele (IV), (V) şi (VI), se obţine pentru suprafaţa totală a solidului superior şi inferior respectiv următoarele formule:

$$S = \pi \times \frac{HR (H - z)^2 (R + \cos\beta \times \sqrt{H^2 + R^2})}{\cos\beta \times \sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \beta)^3}}. \qquad (III)'$$

$$S' = \pi R (R + \sqrt{H^2 + R^2}) + \pi \times \frac{HR (H - z)^2 (R - \cos\beta \times \sqrt{H_2 + R_2})}{\cos\beta \times \sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \beta)^3}} \qquad (IV)'$$

Notă. Dacă în formulele (I)' şi (II)' din subcazul *b*) facem înlocuirile:

$$H - z = h \;\; ; \;\; \alpha = \theta \;\; ; \;\; \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \;\; \text{şi} \;\; R = H \times \operatorname{tg}\theta,$$

obţinem formulele din corpul soluţiei problemei 3069, publicată în G. M., vol. XLVIII, pag. 417.

(Va urma)

ING. OCTAVIAN S. IANCULESCU
Direcţia Technică. „Astra Română" — Câmpina.

PATRATE ISOFINALE

Résumé. On indique une méthode pour trouver la forme générale de l'entier N, sachant que N^2 est terminé à droite par un certain groupe de p chiffres. Deux carrés parfaits ayant à droite le même groupe final de p chiffres s'apellent *carrés isofinaux.*

La 15 Iunie 1932 am dat[1]) expresia generală a numerelor întregi, ale căror patrate au la dreapta o anumită grupă finală de 1, 2 şi 3 cifre. Revin acum asupra acestui subiect cu extinderi şi noi precizări.

Am căutat a da şi un nume patratelor perfecte având la dreapta o aceeaşi grupă finală, după cum alte clase de patrate întregi care au proprietăţi caracteristice au primit nume speciale precum: *Patrate gemene,* definite şi studiate de D-l Prof. I. IONESCU în *Gazeta Matematică, vol. XX, pag. 203, 241, 441 şi 447; Patrate decapitate,* studiate de D-l E. ŞTEFĂNESCU, în *Gazeta Matematică, vol. XXX, pag. 205, 245 şi 365; Patrate pseudo-gemene (G. M., vol. XXXI, pag. 401)* şi *Patrate berce (G. M., vol. XL, pag. 104),* ambele definite şi studiate de D-l G-L GH. BUICLIU.

Patratele

$$N_1^2 = 10^p \cdot A + F_p \quad , \quad N_2^2 = 10^p B + F_p ,$$

având acelaşi grup final de p cifre, le numesc *patrate isofinale de ordinul* p.

1. **Patrate isofinale de primul ordin.** Fie N un număr întreg şi u cifra unităţilor lui. Avem:

$$N = 10 \cdot M \pm u \quad \therefore \quad N^2 = u^2 + \text{Mult. } 10.$$

Din aceste egalităţi se deduce

TABLOUL 1.

N	$10n$	$10n \pm 1$	$10n \pm 2$	$10n \pm 5$	$10n \pm 4$	$10n \pm 3$
N^2/u	0	1	4	5	6	9

unde $n = 0, 1, \ldots,$ iar (N^2/u) se citeşte N^2 terminat cu u.

1) I. V. MĂTIEŞ: Asupra ultimului grup de cifre ale patratelor perfecte. *Gazeta Matematică, vol. XXXVII, pag. 366.*

Acest tabel dă forma numerelor N care au patratele terminate în o aceeaşi cifră dată, de exemplu patratele numerelor

$$N = 10n \pm 4 \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

au la unităţi cifra 6.

2. **Patrate isofinale de ordinul doi.** Patratele care au la dreapta acelaşi grup final de două cifre (zu), se zic patrate isofinale de ordinul doi, cum sunt patratele

$$69^2 = 4761 \quad ; \quad 519^2 = 269361; \ldots$$

Iată modul de găsire al patratelor terminate cu un grup de exemplu, $z1$.

Patratele terminate cu $\overline{z1}$ se află printre cele terminate cu 1. Rădăcina acestora e de forma

$$N = 10n \pm 1.$$

Ridic pe N la patrat şi pun condiţia ca N^2 să se termine cu $z1$, am succesiv

$$N^2 = 1 \pm 20n + 100n^2 = 1 \pm 20n + M.100$$

$$\therefore \quad 1 \pm 20n = z1 + M.100 \quad \therefore \quad \pm 2n = z + M.10$$

$$\therefore \quad n = \pm \frac{z}{2} + M.5$$

de unde rezultă că z este oricare din cifrele perechi. Prin urmare numerele terminate cu $z1$, *nu pot fi patrate perfecte* atunci când z este nepereche.

Ducând pe n în expresia lui N, obţin

$$N = 50.M \pm (5z + 1) \quad , \quad z = 0, 2, 4, 6, 8 \quad ; \quad M = 0, 1, \ldots$$

Patratele acestor numere sunt isofinale, terminate cu $z1$ (z cu soţ). Acest rezultat figurează în tabloul 2, următor.

Procedând analog cu cele şase poziţii din tabloul 1, obţin

TABLOUL 2.

Nr. cor.	N	N^2/u	N	N^2/zu	z
1	$10n$	0	$10n$	$z0$	0 — — — — — — — — —
2	$10n \pm 1$	1	$50n \pm (5z + 1)$	$z1$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
3	$10n \pm 2$	4	$50n \pm (15z + 2)$	$z4$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
4	$10n \pm 5$	5	$10n + 5$	$z5$	2 — — — — — — — — —
5	$10n \pm 4$	6	$50n \pm (5z - 9)$	$z6$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
6	$10n \pm 3$	9	$50n \pm (15z - 3)$	$z9$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —

în care, patratele numerelor N, sunt cele şase clase de patrate isofinale de ordinul al doilea, având grupa finală de două cifre dată în coloana (N^2/zu), iar valorile zecilor în coloana z.

3. **Patrate isofinale de ordinul trei.** Luând din tabloul precedent pe fiecare expresie a lui N şi N^2 terminat cu zu, înlocuesc cifra z cu valorile ei atât în N cât şi în zu, şi obţin cel mult câte 5 forme atât pentru N cât şi pentru N^2.

Ridicăm la patrat expresia lui N şi punând condiţia ca N^2 să se termine cu szu, voiu determina pe n şi apoi pe N, depinzând de un parametru şi de s.

Iată un exemplu: *Care sunt numerele ale căror patrate se termină cu* $s16$?

Aceste patrate se află printre cele terminate cu $z6$. Rădăcina patrată a acestora e de forma

$$N = 50n \pm (5z - 9) \quad , \quad z = 1$$

care pentru $z = 1$ dă

$$N = 50n \pm 4.$$

Aceste numere se mai pot scrie

$$N_1 = 100n_1 \pm 4 \quad \text{şi} \quad N_2 = 100n_2 \pm 46$$

după cum n este pereche sau nepereche.

Patratul lor este

$$N_1^2 = 16 \pm 800n_1 + M.10^3 \quad \text{şi} \quad N_2^2 = 2116 \pm 9200n_2 + M.10^3$$

punând condiţia să se termine cu $s16$, obţin:

$$16 \pm 800n_1 = s16 + M.10^3 \quad \text{şi} \quad 116 \pm 200n_2 = s16 + M.10^3$$

$$\therefore \quad \pm 800n_1 = 100.s + M.1000 \quad \text{şi} \quad \pm 200n_2 = 100(s-1) + M.10$$

$$\therefore \quad \pm 8n_1 = s + M.10 \quad \text{şi} \quad \pm 2n_2 = (s-1) + M.10$$

$$\therefore \quad \pm (10-2)n_1 = s + M.10 \quad \text{şi} \quad \pm 2n_2 = (s-1) + M.10$$

$$\therefore \quad \mp 2n_1 = s + M.10 \quad \text{şi} \quad \pm 2n_2 = (s-1) + M.10$$

$$\therefore \quad n_1 = \mp \frac{s}{2} + M.5 \quad \text{şi} \quad n_2 = \pm \frac{s-1}{2} + M.5.$$

Se vede că n_1 e întreg, dacă s este cu soț și n_2 e întreg, dacă s este fără soț. Introducând pe n_1 și n_2 respectiv în N_1 și N_2, obțin

$$\begin{cases} N_1 = 500.M \mp (50s - 4) = 500M \pm (50s - 4), & s \text{ cu soț} \\ N_2 = 500.M \pm (50s - 50 + 46) = 500M \pm (50s - 4), & s \text{ fără soț.} \end{cases}$$

Ambele expresiuni se înglobează în expresiunea unică

$$N = 500n \pm (50s - 4) \quad , \quad s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Patratele acestor numere se termină cu $s16$.

Făcând calcule analoage (în număr de 22) pentru fiecare expresiune a lui N, obținută după înlocuirea lui z, din tabloul 2, găsim rezultatele ce figurează în:

TABLOUL 3.

Nr. cor.	N	$\frac{N^2}{zu}$	N	$\frac{N^2}{szu}$	s
1	$10n$	00	$100n$; $100n \pm 10$; $100n \pm 20$; $100n + 50$; $100n \pm 40$; $100n \pm 30$	$s00$	0 1 — — 4 5 6 — — 9
2	$50n \pm 1$	01	$250n \pm (50s + 1)$	$s01$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
3	$50n \pm 2$	04	$500n \pm (150s + 2)$	$s04$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
4	$50n \pm 3$	09	$250n \pm (150s - 3)$	$s09$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
5	$50n \pm 4$	16	$500n \pm (50s - 4)$	$s16$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
6	$50n \pm 11$	21	$250n \pm (50s - 39)$	$s21$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
7	$50n \pm 18$	24	$500n \pm (150s + 32)$	$s24$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	$10n \pm 5$	25	$50n \pm 5$; $50n \pm 15$; $50n + 25$	$s25$	0 — 2 — — — 6 — — —
9	$50n \pm 23$	29	$250n \pm (150s - 23)$	$s29$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
10	$50n \pm 6$	36	$500n \pm (50s + 6)$	$s36$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
11	$50n \pm 21$	41	$250n \pm (50s + 71)$	$s41$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
12	$50n \pm 12$	44	$500n \pm (150s - 138)$	$s44$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
13	$50n \pm 7$	49	$250n \pm (150s + 7)$	$s49$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
14	$50n \pm 16$	56	$500n \pm (50s - 84)$	$s56$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
15	$50n \pm 19$	61	$250n \pm (50s + 81)$	$s61$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
16	$50n \pm 8$	64	$500n \pm (150s - 8)$	$s64$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
17	$50n \pm 13$	69	$250n \pm (150s + 87)$	$s69$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
18	$50n \pm 24$	76	$500n \pm (50s + 226)$	$s76$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
19	$50n \pm 9$	81	$250n \pm (50s - 9)$	$s81$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
20	$50n \pm 22$	84	$500n \pm (150s - 78)$	$s84$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
21	$50n \pm 17$	89	$250n \pm (150s - 33)$	$s89$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
22	$50n \pm 14$	96	$500n \pm (50s - 64)$	$s96$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rezultatele din tablourile 1, 2 şi 3 au fost date de subsemnatul în 1932 (G. M., vol. XXXVII, pag. 366), dar sub o formă mai puţin restrânsă.

4. **Patrate isofinale de ordinul patru.** Pentru găsirea formelor generale ale lui N, pentru care N^2 se termină cu o anumită grupă finală de patru cifre, procedeul este acelaşi, cu deosebirea că se fac în *total 159* de calcule analoage referitoare la toate grupele de trei cifre $\overline{szu}$, ale patratelor perfecte, găsite, în mod implicit în tabloul 3.

Iată un exemplu: *Există patrate terminate în general cu* $\overline{m944}$ *şi în particular cu* 1944?

Patratele, terminate la dreapta cu $m944$, se află printre cele terminate cu $s44$. In tabloul 3, sub Nr. 12 se vede că rădăcina acestora este de forma:

$$N = 500n \pm (150s - 138), \quad s = 0, 1, 2, \ldots, 9.$$

De aici încolo procedând ca la punctul 3° găsim că numerele de forma generală

$$N = 2500n \pm (250m - 788), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

au patrate isofinale (N^2) de ordinul patru, având grupa finală $m944$, cu $m = 0, 2, 4, 6, 8$. Aşa că există patrate terminate cu 0944; 2944 ; 4944 ; 6944 şi 8944 şi *nu există patrate perfecte terminate cu* 1944 sau cu 3944 ; 5944 , 7944 şi 9944.

Următorul tabel 4 dă forma numerelor ale căror patrate sunt isofinale de ordinul al patrulea [1]).

---

1) Articolul acesta a fost primit la redacţie la 19 Iulie 1943. Ulterior şi anume la 26 August 1943 s'a primit dela D-l A. GLODEN un articol asupra aceleiaşi chestiuni intitulat „*Forma lineară a numerelor ale căror patrate au o terminaţie de 4 cifre date*". Metoda D-lui A. GLODEN este analoagă cu cea din articolul de faţă. Dată fiind personalitatea D-lui A. GLODEN îi vom publica articolul ceva mai târziu, când ne va îngădui spaţiul revistei.

N. R.

TABLOUL 4 [1]).

Nr. cor.	N	N²/szu	N	N²/mszu	m
1	$100n$	000	$100n$	$m000$	0 — — — — — — — — —
2	$250n \pm 1$	001	$5000n \pm (500m + 1)$; $5000n \pm (500m - 1249)$	$m001$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
3	$500n \pm 2$	004	$2500n \pm (250m + 2)$	$m004$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
4	$250n \pm 3$	009	$5000n \pm (1500m - 3)$; $5000n \pm (1500m - 1253)$	$m009$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
5	$500n \pm 4$	016	$2500n \pm (750m + 4)$	$m016$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
6	$500n \pm 32$	024	$2500n \pm (250m - 289)$	$m024$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
7	$50n \pm 5$	025	$1000n \pm (100m + 5)$; $1000n \pm (100m - 245)$	$m025$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	$500n \pm 6$	036	$2500n \pm (750m - 6)$	$m036$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
9	$250n \pm 71$	041	$5000n \pm (500m - 2429)$; $5000n \pm (500m - 1179)$	$m041$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
10	$500n \pm 138$	044	$2500n \pm (250m + 112)$	$m044$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
11	$250n \pm 7$	049	$5000n \pm (1500m + 7)$; $5000n \pm (1500m + 1257)$	$m049$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
12	$500n \pm 84$	056	$2500n \pm (750m - 166)$	$m056$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
13	$500n \pm 8$	064	$2500n \pm (250m - 8)$	$m064$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
14	$500n \pm 226$	076	$2500n \pm (750m - 976)$	$m076$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
15	$250n \pm 9$	081	$5000n \pm (500m - 9)$; $5000n \pm (500m + 1241)$	$m081$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
16	$500n \pm 78$	084	$2500n \pm (250m + 922)$	$m084$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
17	$250n \pm 33$	089	$5000n \pm (1500m - 1533)$; $5000n \pm (1500m - 283)$	$m089$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
18	$500n \pm 64$	096	$2500n \pm (750m - 436)$	$m096$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
19	$100n \pm 10$	100	$500n \pm (50m + 10)$	$m100$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
20	$500n \pm 152$	104	$2500n \pm (250m - 598)$	$m104$	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
21	$500n \pm 46$	116	$2500n \pm (750m - 954)$	$m116$	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —

1) Tabloul ultimei tranşe de 4 cifre ale patratelor perfecte a fost dat şi de D-l V. THÉBAULT în suplimentul din Oct. 1934 al revistei *Mathesis*.

TABLOUL 4 (urmare).

Nr. cor.	N	Nº/*szu*	N	Nº/*mszu*	*m*
22	$250n \pm 11$	121	$5000n \pm (500m + 11)$; $5000n \pm (500m + 1261)$	*m*121	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
23	$500n \pm 182$	124	$2500n \pm (250m - 568)$	*m*124	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
24	$250n \pm 123$	129	$5000n \pm (1500m + 2377)$; $5000n \pm (1500n + 1127)$	*m*129	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
25	$500n \pm 56$	136	$2500n \pm (750m + 194)$	*m*136	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
26	$500n \pm 12$	144	$2500n \pm (250m + 12)$	*m*144	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
27	$500n \pm 34$	156	$2500n \pm (750m - 716)$	*m*156	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
28	$250n \pm 119$	161	$5000n \pm (500m + 2119)$; $5000n \pm (500m + 1631)$	*m*161	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
29	$500n \pm 142$	164	$2500n \pm (250m + 142)$	*m*164	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
30	$250n \pm 13$	169	$5000n \pm (1500m - 13)$; $5000n \pm (1500m + 1237)$	*m*169	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
31	$500n \pm 224$	176	$2500n \pm (750m + 224)$	*m*176	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
32	$500n \pm 72$	184	$2500n \pm (250m - 1178)$	*m*184	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
33	$500n \pm 14$	196	$2500n \pm (750m + 14)$	*m*196	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
34	$250n \pm 101$	201	$5000n \pm (500m + 101)$; $5000n \pm (500m - 1149)$	*m*201	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
35	$500n \pm 198$	204	$2500n \pm (250m + 52)$	*m*204	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
36	$250n \pm 47$	209	$5000n \pm (1500m + 2047)$; $5000n \pm (1500m - 1705)$	*m*209	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
37	$500n \pm 96$	216	$2500n \pm (750m + 654)$	*m*216	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
38	$500n \pm 168$	224	$2500n \pm (250m + 332)$	*m*224	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
39	$50n \pm 15$	225	$1000n \pm (300m - 15)$; $1000n \pm (300m - 265)$	*m*225	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
40	$500n \pm 106$	236	$2500n \pm (750m - 644)$	*m*236	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
41	$250n \pm 79$	241	$5000n \pm (500m + 1921)$; $5000n \pm (500m + 671)$	*m*241	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
42	$500n \pm 162$	244	$2500n \pm (250m + 1162)$	*m*244	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
43	$250n \pm 57$	249	$5000n \pm (1500m + 557)$; $5000n \pm (1500m - 693)$	*m*249	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
44	$500n \pm 16$	256	$2500n \pm (750m - 16)$	*m*256	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —

TABLOUL 4 (urmare).

Nr. cor.	N	N²/*szu*	N		N²/*mszu*	*m*
45	$500n \pm 208$	264		$2500n \pm (250m - 958)$	*m*264	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
46	$500n \pm 174$	276		$2500n \pm (750m + 174)$	*m*276	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
47	$250n \pm 91$	281	$5000n \pm (500m + 1091)$;	$5000n \pm (500m + 2341)$	*m*281	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
48	$500n \pm 222$	284		$2500n \pm (250m + 472)$	*m*284	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
49	$250n \pm 17$	289	$5000n \pm (1500m + 17)$;	$5000n \pm (1500m - 1233)$	*m*289	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
50	$500n \pm 36$	296		$2500n \pm (750m - 786)$	*m*296	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
51	$500n \pm 48$	304		$2500n \pm (250m - 548)$	*m*304	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
52	$500n \pm 146$	316		$2500n \pm (750m - 896)$	*m*316	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
53	$250n \pm 111$	321	$5000n \pm (500m - 889)$;	$5000n \pm (500m + 361)$	*m*321	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
54	$500n \pm 18$	324		$2500n \pm (250m - 18)$	*m*324	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
55	$250n \pm 73$	329	$5000n \pm (1500m + 242?)$;	$5000n \pm (1500m - 1323)$	*m*329	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
56	$500n \pm 156$	336		$2500n \pm (750m - 656)$	*m*336	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
57	$500n \pm 188$	344		$2500n \pm (250m + 1062)$	*m*344	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
58	$500n \pm 66$	356		$2500n \pm (750m - 566)$	*m*356	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
59	$250n \pm 19$	361	$5000n \pm (500m - 19)$;	$5000n \pm (500m - 1269)$	*m*361	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
60	$500n \pm 58$	364		$2500n \pm (250m - 808)$	*m*364	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
61	$250n \pm 37$	369	$5000n \pm (1500m - 1463)$;	$5000n \pm (1500m + 2287)$	*m*369	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
62	$500n \pm 124$	376		$2500n \pm (750m - 1126)$	*m*376	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
63	$500n \pm 128$	384		$2500n \pm (250m + 872)$	*m*384	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
64	$500n \pm 86$	396		$2500n \pm (750m - 336)$	*m*396	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
65	$100n \pm 20$	400		$500n \pm (150m + 20)$	*m*400	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
66	$250n \pm 49$	401	$5000n \pm (500m - 1049)$;	$5000n \pm (500m + 201)$	*m*401	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
67	$500n \pm 102$	404		$2500n \pm (250m + 102)$	*m*404	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —

TABLOUL 4 (urmare).

Nr. cor.	N	N²/*szu*	N	N²/*mszu*	*m*
68	$250n \pm 97$	409	$5000n \pm (1500m + 1597)$; $5000n \pm (1500m + 347)$	*m*409	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
69	$500n \pm 196$	416	$2500n \pm (750m + 1304)$	*m*416	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
70	$500n \pm 132$	424	$2500n \pm (250m + 882)$	*m*424	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
71	$500n \pm 206$	436	$2500n \pm (750m + 794)$	*m*436	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
72	$250n \pm 21$	441	$5000n \pm (500m + 21)$; $5000n \pm (500m - 1229)$	*m*441	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
73	$500n \pm 38$	444	$2500n \pm (250m - 288)$	*m*444	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
74	$250n \pm 107$	449	$5000n \pm (1500m - 1393)$; $5000n \pm (1500m - 143)$	*m*449	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
75	$500n \pm 116$	456	$2500n \pm (750m + 134)$	*m*456	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
76	$500n \pm 92$	464	$2500n \pm (250m + 592)$	*m*464	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
77	$500n \pm 74$	476	$2500n \pm (750m - 1176)$	*m*476	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
78	$250n \pm 59$	481	$5000n \pm (500m - 1559)$; $5000n \pm (500m + 2191)$	*m*481	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
79	$500n \pm 22$	484	$2500n \pm (250m + 22)$	*m*484	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
80	$250n \pm 67$	489	$5000n \pm (1500m - 933)$; $5000n \pm (1500m + 317)$	*m*489	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
81	$500n \pm 136$	496	$2500n \pm (750m - 1136)$	*m*496	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
82	$100n \pm 50$	500	$100n + 50$	*m*500	— — 2 — — — — — — —
83	$500n \pm 248$	504	$2500n \pm (250m - 498)$	*m*504	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
84	$500n \pm 246$	516	$2500n \pm (750m - 246)$	*m*516	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
85	$250n \pm 39$	521	$5000n \pm (500m - 539)$; $5000n \pm (500m - 1789)$	*m*521	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
86	$500n \pm 218$	524	$2500n \pm (250m + 532)$	*m*524	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
87	$250n \pm 23$	529	$5000n \pm (1500m - 23)$; $5000n \pm (1500m - 1273)$	*m*529	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
88	$500n \pm 244$	536	$2500n \pm (750m + 994)$	*m*536	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
89	$500n \pm 112$	544	$2500n \pm (250m - 388)$	*m*544	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
90	$500n \pm 166$	556	$2500n \pm (750m - 416)$	*m*556	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9

TABLOUL 4 (urmare).

Nr. cor	N	N²/*szu*	N	N²/*mszu*	*m*
91	$250n \pm 81$	561	$5000n \pm (500m + 2081)$; $5000n \pm (500m + 831)$	*m*561	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
92	$500n \pm 242$	564	$2500n \pm (250m + 742)$	*m*564	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
93	$250n \pm 87$	569	$5000n \pm (1500m - 413)$; $5000n \pm (1500m + 837)$	*m*569	0 1 2 3 4 5 6 7 8 6
94	$500n \pm 24$	576	$2500n \pm (750m + 24)$	*m*576	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
95	$500n \pm 172$	584	$2500n \pm (250m + 422)$	*m*584	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
96	$500n \pm 186$	596	$2500n \pm (750m - 686)$	*m*596	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
97	$100n \pm 40$	600	$500n \pm (50m - 90)$	*m*600	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
98	$250n \pm 51$	601	$5000n \pm (500m - 949)$; $5000n \pm (500m + 301)$	*m*601	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
99	$500n \pm 98$	604	$2500n \pm (250m + 152)$	*m*604	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
100	$250n \pm 103$	609	$5000n \pm (1500m - 103)$; $5000n \pm (1500m - 1353)$	*m*609	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
101	$500n \pm 204$	616	$2500n \pm (750m - 546)$	*m*616	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
102	$500n \pm 68$	624	$2500n \pm (250m - 168)$	*m*624	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
103	$100n \pm 25$	625	$200n \pm (20m + 25)$	*m*625	0 — — — — 5 — — — —
104	$500n \pm 194$	636	$2500n \pm (750m - 56)$	*m*636	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
105	$250n \pm 121$	641	$5000n \pm (500m - 1879)$; $5000n \pm (500m + 1871)$	*m*641	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
106	$500n \pm 238$	644	$2500n \pm (250m + 762)$	*m*644	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
107	$250n \pm 93$	649	$5000n \pm (1500m - 2093)$; $5000n \pm (1500m - 843)$	*m*649	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
108	$500n \pm 216$	656	$2500n \pm (750m + 284)$	*m*656	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
109	$500n \pm 108$	664	$2500n \pm (250m - 358)$	*m*664	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
110	$500n \pm 26$	676	$2500n \pm (750m - 26)$	*m*676	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
111	$250n \pm 41$	681	$5000n \pm (500m - 459)$; $5000n \pm (500m - 609)$	*m*681	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
112	$500n \pm 178$	684	$2500n \pm (250m - 428)$	*m*684	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
113	$250n \pm 117$	689	$5000n \pm (1500m + 617)$; $5000n \pm (1500m - 633)$	*m*689	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TABLOUL 4 (urmare).

Nr. cor.	N	N²/*szu*	N		N²/*mszu*	*m*
114	$500n \pm 236$	696		$2500n \pm (750m + 1014)$	*m*696	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
115	$500n \pm 52$	704		$2500n \pm (250m - 448)$	*m*704	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
116	$500n \pm 154$	716		$2500n \pm (750m + 404)$	*m*716	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
117	$250n \pm 61$	721	$5000n \pm (500m - 1439)$;	$5000n \pm (500m + 2311)$	*m*721	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
118	$500n \pm 82$	724		$2500n \pm (250m + 1082)$	*m*724	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
119	$250n \pm 27$	729	$5000n \pm (1500m + 27)$;	$5000n \pm (1500m + 1277)$	*m*729	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
120	$500n \pm 144$	736		$2500n \pm (750m + 144)$	*m*736	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
121	$500n \pm 88$	744		$2500n \pm (250m + 662)$	*m*744	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
122	$500n \pm 234$	756		$2500n \pm (750m - 266)$	*m*756	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
123	$250n \pm 69$	761	$5000n \pm (500m - 2069)$;	$5000n \pm (500m - 819)$	*m*761	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
124	$500n \pm 42$	764		$2500n \pm (250m - 208)$	*m*764	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
125	$250n \pm 113$	769	$5000n \pm (1500m + 1887)$;	$5000n \pm (1500m - 1863)$	*m*769	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
126	$500n \pm 76$	776		$2500n \pm (750m + 1174)$	*m*776	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
127	$500n \pm 28$	784		$2500n \pm (250m - 28)$	*m*784	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
128	$500n \pm 214$	796		$2500n \pm (750m - 1036)$	*m*796	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
129	$250n \pm 99$	801	$5000n \pm (500m + 401)$;	$5000n \pm (500m - 849)$	*m*801	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
130	$500n \pm 202$	804		$2500n \pm (250m + 202)$	*m*804	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
131	$250n \pm 53$	809	$5000n \pm (1500m + 1947)$;	$5000n \pm (1500m - 1803)$	*m*809	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
132	$500n \pm 104$	816		$2500n \pm (750m + 104)$	*m*816	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
133	$500n \pm 232$	824		$2500n \pm (250m - 518)$	*m*824	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
134	$500n \pm 94$	836		$2500n \pm (750m - 906)$	*m*836	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
135	$250n \pm 29$	841	$5000n \pm (500m - 29)$;	$5000n \pm (500m + 1221)$	*m*841	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
136	$500n \pm 62$	844		$2500n \pm (250m - 688)$	*m*844	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9

TABLOUL 4 (urmare şi sfârşit).

Nr. cor.	N	N²/*szu*	N		N²/*mszu*	*m*
137	$250n \pm 43$	849	$5000n \pm (1500m - 1543)$;	$5000n \pm (1500m + 2207)$	*m*849	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
138	$500n \pm 184$	856		$2500n \pm (750m + 434)$	*m*856	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
139	$500n \pm 192$	864		$2500n \pm (250m + 1192)$	*m*864	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
140	$500n \pm 126$	876		$2500n \pm (750m + 1124)$	*m*876	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
141	$250n \pm 109$	881	$5000n \pm (500m - 609)$;	$5000n \pm (500m + 641)$	*m*881	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
142	$500n \pm 122$	884		$2500n \pm (250m - 878)$	*m*884	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
143	$250n \pm 83$	889	$5000n \pm (1500m + 917)$;	$5000n \pm (1500m - 333)$	*m*889	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
144	$500n \pm 164$	896		$2500n \pm (750m + 644)$	*m*896	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
145	$100n \pm 30$	900		$500n \pm (150m - 30)$	*m*900	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
146	$500n \pm 148$	904		$2500n \pm (250m - 398)$	*m*904	— 1 — 3 — 5 — 7 —
147	$500n \pm 54$	916		$2500n \pm (750m + 1014)$	*m*916	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
148	$250n \pm 89$	921	$5000n \pm (500m + 1411)$;	$5000n \pm (500m - 2339)$	*m*921	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
149	$500n \pm 118$	924		$2500n \pm (250m - 868)$	*m*924	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
150	$250n \pm 77$	929	$5000n \pm (1500m - 2423)$;	$5000n \pm (1500m + 1327)$	*m*929	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
151	$500n \pm 44$	936		$2500n \pm (750m - 706)$	*m*936	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
152	$500n \pm 212$	944		$2500n \pm (250m - 788)$	*m*944	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
153	$500n \pm 134$	956		$2500n \pm (750m - 116)$	*m*956	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
154	$250n \pm 31$	961	$5000n \pm (500m + 31)$;	$5000n \pm (500m + 1281)$	*m*961	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
155	$500n \pm 158$	964		$2500n \pm (250m - 1158)$	*m*964	0 — 2 — 4 — 6 — 7 — 9
156	$250n \pm 63$	969	$5000n \pm (1500m + 437)$;	$5000n \pm (1500m - 813)$	*m*969	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
157	$500n \pm 176$	976		$2500n \pm (750m - 176)$	*m*976	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —
158	$500n \pm 228$	984		$2500n \pm (250m - 478)$	*m*984	— 1 — 3 — 5 — 7 — 9
159	$500n \pm 114$	996		$2500n \pm (750m + 1114)$	*m*996	0 — 2 — 4 — 6 — 8 —

Acest tablou cuprinde explicit forma lui N, N^2 terminat cu trei cifre anumite date în coloana (N^2/*szu*) precum şi forma generală a lui N, N^2 terminat cu un anumit grup de patru cifre *mszu* dat în coloana (N^2/*mszu*), *m* luând valorile date în ultima coloană (*m*), în *total* 1044 *de terminaţiuni* mszu *distincte.*

5. **Patratele isofinale mai superioare** se află din aproape în aproape ca cele de ordinul trei sau patru.

Mă opresc aci cu prezentarea tablourilor, ce ar cuprinde expresiuni generale pentru N, N^2 terminat cu grupe de *p* cifre, căci tablourile 1, 2, 3, 4, se pot utiliza şi în aceste cazuri.

Modul de utilizare a tabloului 4, în cazul patratelor isofinale de ordin superior lui patru, se va vedea în următorul exerciţiu:

Să se afle patratele terminate cu grupa de şase cifre: abbbbc, *ştiind că* $b + c = 6$.

Conform tabloului 4, grupa *bbbc* poate lua valorile 0000; 0001 ; 0004 ; 0009 ; 2224 ; 2225 ; 4441 ; 4449 ; 5556 ; 7776; 8881 ; 8884 ; 8889, dar condiţia $b + c = 6$, le elimină pe toate afară de 2224. Urmează deci să se treacă la căutarea formei generale a lui N, pentru care N^2 se termină cu *a*22224.

In tabloul 4, sub Nr. 38 se găseşte

$$N = 2500n \pm (250m + 332)$$

având N^2 terminat cu *m*224, *m* cu soţ. Pun $m = 2$ şi urmând calculele cuvânt cu cuvânt, ca în cazul exemplelor precedente, găsim că

$$N = 250.000n \pm (25.000a - 37.500 + \varepsilon . 70.832), \quad \varepsilon = \pm 1$$

care dă N^2 terminat cu *a*22224, $a = 0, 2, 4, 6$ şi 8.

II. Fie *x* şi *y* două numere, astfel ca

$$x^2 = 10^p . A + F_p \quad \text{şi} \quad y^2 = 10^p . B + F_p$$

eliminând grupa finală F_p, obţin ecuaţia

$$x^2 - y^2 = k . 10^p$$

corespunzătoare patratelor isofinale, ale cărei soluţii în numere întregi, pentru $p = 1, 2, 3$ şi 4 sunt numerele N din tablourile 1, 2, 3 şi 4.

Rezolvarea directă a acestei ecuaţii se face după metoda indicată de D-l G-l Gh. Buicliu *(G. M., vol. XXXI, pag. 401)* cu ocazia găsirii patratelor pseudogemene.

Ecuaţia se scrie

$$(x-y)(x+y) = 10^p \cdot k$$

şi întru cât x şi y sunt de aceeaşi paritate, se pune

$$x - y = 2\alpha$$

$$\therefore \quad x + y = 5 \cdot 10^{p-1} \cdot \frac{k}{\alpha}$$

de unde găsesc soluţiile

$$x, y = 5^2 \cdot 10^{p-2} \cdot \frac{k}{\alpha} \pm \alpha.$$

Pentru ca x şi y să fie întregi, trebue ca întregul α să nu aibă alţi factori primi decât pe 2, 5 şi pe ai lui k (diferiţi de 2 şi de 5), pe care însemnându-i cu r, se obţine

$$\alpha = 2^\mu \cdot 5^\nu \cdot r \quad , \quad (r \text{ poate fi şi } 1)$$

şi atunci x şi y au valorile întregi date de

$$x, y = 2^{p-\mu-2} \cdot 5^{p-\nu} \cdot \frac{k}{r} \pm 2^\mu \cdot 5^\nu \cdot r.$$

Numărul soluţiilor depinde de numărul divizorilor lui k. Pentru cazul particular $k = c < 10$ ecuaţia

$$x^2 - y^2 = c \cdot 10^p$$

a fost complect rezolvată de D-l G-L GH. BUICLIU *(G. M., vol. XXXI, pag. 401)*. Printre soluţiile ei D-sa a găsit valori întregi, ale căror patrate sunt pseudogemene.

III. Ecuaţia *patratelor isofinale* fiind

$$x^2 - y^2 = M \cdot 20^p \quad \text{sau} \quad x^2 - F_p = M \cdot 10^p$$

pe care scriindu-le sub forma

$$x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{10^p} \quad \text{sau} \quad x^2 \equiv F_p \pmod{10^p}$$

găsim o congruenţă de gradul doi şi de ordinul p în baza 10.

Ea se mai poate rezolva urmând calea indicată în articolul meu „*Contribuţiuni la rezolvarea congruenţelor de gradul* n *şi ordinul* p[1])".

---

1) I. V. MĂTIEŞ: Contribuţiuni la rezolvarea congruenţelor de gradul n şi ordinul p, articol ce va apare în Revista Matematică din Timişoara, Vol. XXIV.

Pentru aceasta vom rezolva *congruența inițială*

$$x^2 - u = \mathrm{M} \cdot 10 \quad , \quad x, u < 10.$$

Cum însă $u = 0, 1, 4, 5, 6, 9$, soluția congruenței, pentru diversele valori ale lui u, aflate prin simple verificări, sunt date în tabloul

x	0	± 1	± 2	$+5$	± 4	± 3	$\alpha_1 = x_1$
x^2/u	0	1	4	5	6	9	u

Deci soluția generală a congruenței de bază

$$x^2 - u = \mathrm{M} \cdot 10$$

este $$x = x_1 + 10\, m_1.$$

Pentru ca aceasta să fie soluție și la congruența de ordinul doi

$$x^2 - \overline{zu} = \mathrm{M} \cdot 10^2$$

trebue să avem

$$(x_1 + 10m_1)^2 - \overline{zu} = \mathrm{M} \cdot 10^2$$

$$\therefore \quad \frac{x_1^2 - \overline{zu}}{10} + 2x_1 m_1 = \mathrm{M} \cdot 10$$

care în privința lui m_1, e o congruență de gradul și ordinul prim, de forma

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1\, m_1 = \mathrm{M} \cdot 10$$

și se rezolvă ca și ecuația cu două necunoscute în numere întregi [1])

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1\, \mathrm{X} + 10\mathrm{Y} = 0.$$

(Ch. Fr. Gauss: *Recherches Arithmétiques. Traduites par* A. C. M. Poullet-Delisle. *Paris 1910. Nr. 13—44*).

α_2 fiind soluțiile ei de o cifră, soluția generală este

$$m_1 = \alpha_2 + 10m_2$$

iar soluția generală a congruenței de ordinul doi este

$$x = x_1 + 10\ _2 + 100m_2 + x_2 + 100m_2$$

---

[1]) Soluția ecuației $ax + by = \pm 1$ în numere întregi a fost dată de Bachet de Meziriac, geometru din sec. XVII.

x_2 fiind ansamblul numerelor de două cifre, soluții ale congruenței de ordinul doi

In general, soluția congruenței de ordinul $p - 1$

$$x^2 - F_{p-1} = M \cdot 10^{p-1}$$

fiind $$x = x_{p-1} + 10^{p-1} \cdot m_{p-1}$$

ea va fi soluție și pentru congruența

$$x^2 - F_p = M \cdot 10^p$$

dacă avem

$$(x_{p-1} + 10^{p-1} \cdot m_{p-1})^2 - F_p = M \cdot 10^p$$

$$\therefore \quad \frac{x_{p-1}^2 = F_p}{10^{p-1}} + 2 x_{p-1} \cdot m_{p-1} = M10$$

care având ca soluție

$$m_{p-1} = \alpha_p + 10 \cdot m_p$$

soluția generală a congruenței de ordinul p este

$$x = x_{p-1} + \alpha_p \cdot 10^{p-1} + 10^p \cdot m_p$$

$$\therefore \quad x = {}_p + 10^p \cdot m_p$$

x_p fiind ansamblul tuturor numerelor de p cifre, soluții ale congruenței de ordinul p și ale cărei cifre se află din aproape în aproape. Patratele acestor numere sunt patratele isofinale.

Generalizare. Patratele isofinale în baza k de numărare sunt patratele soluțiilor congruenței de gradul doi, ordinul p în baza k, de forma

$$f(x) = x^2 - F_p = M \cdot k^p .$$

Soluția generală a acestei congruențe este

$$x = x_p + M \cdot k^p \quad , \quad x_p = \overline{\alpha_p \ldots \alpha_2 \alpha_1}$$

x_p fiind un număr, scris în baza k, de p cifre $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_p$, unde α_1 reprezintă ansamblul soluțiilor de o cifră ale *congruenței*

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^2 - u = Fk \quad , \quad \alpha_1 < k$$

iar $\alpha_i (i = 2, 3, \ldots, p)$ fiind soluţiile *congruenţei de recurenţă de gradul şi ordinul prim* de forma

$$\frac{f(x_{i-1})}{k^{i-1}} + f'(x_{i-1}) \cdot \alpha_i = M \cdot k$$

$f'(x)$ fiind derivata funcţiunii $f'(x) = x^2 - F_p$, în care se înlocueşte x prin x_{i-1}.

Observare. Soluţia generală, se mai poate scrie, în cazul când k admite ca divizori $k_1, k_2, \ldots, k_r$,

$$x = x_p + M \cdot k_1^{p_1} \cdot k_2^{p_2} \cdot k_3^{p_3} \ldots k_r^{p_r}$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_r \leqslant p$.

I. V. MĂTIEŞ.

ASUPRA UNEI METODE PENTRU CALCULUL UNGHIURILOR LUI EULER

In cele ce urmează îmi propun să dau o metodă pentru calculul cosinusurilor de direcţiune ale triedrului mobil faţă de triedrul fix în funcţiune de cei trei parametrii ψ, φ şi θ (unghiurile lui EULER), care determină la un moment dat poziţia triedrului mobil faţă de triedrul fix.

Fie un triedru fix de axe coordonate $Ox_1y_1z_1$ şi un triedru mobil $oxyz$ având aceeaşi origină în punctul O. OI este dreapta de intersecţie a planelor xOy şi x_1Oy_1. La un moment dat triedrul $Oxyz$ este determinat faţă de triedrul, $Ox_1y_1z_1$ prin cei trei parametri ψ, φ şi θ. O sferă cu centrul în origină şi cu raza egală cu unitatea este intersectată de planul yOx după arcul de cerc mare $\overset{\frown}{AL}$, de planul x_1Oy_1 după arcul de cerc mare $\overset{\frown}{A_1IB}$, de planul IOz_1 după arcul de cerc mare $\overset{\frown}{CI}$, de planul xOz_1 după arcul de cerc mare $\overset{\frown}{AC}$. Pentru a calcula cosinusurile de direcţiune ale

axului ox față de triedrul $Ox_1y_1z_1$ consider triunghiurile sferice: AA_1I, ABI și AIC (fig. I-a). Din triunghiul AA_1I căruia îi aplic formula fundamentală a trigonometriei sferice avem;

$$(1)\quad \cos\widehat{AA_1} = \cos\widehat{AI}\,\cos\widehat{A_1I} + \sin\widehat{AI}\,\sin\widehat{A_1I}\,\cos\widehat{AIA_1}.$$

Dar de pe figură avem:

$$\widehat{AI} = \varphi \quad ; \quad \widehat{A_1I} = \psi \quad ; \quad \widehat{AIA_1} = 180^0 - \theta.$$

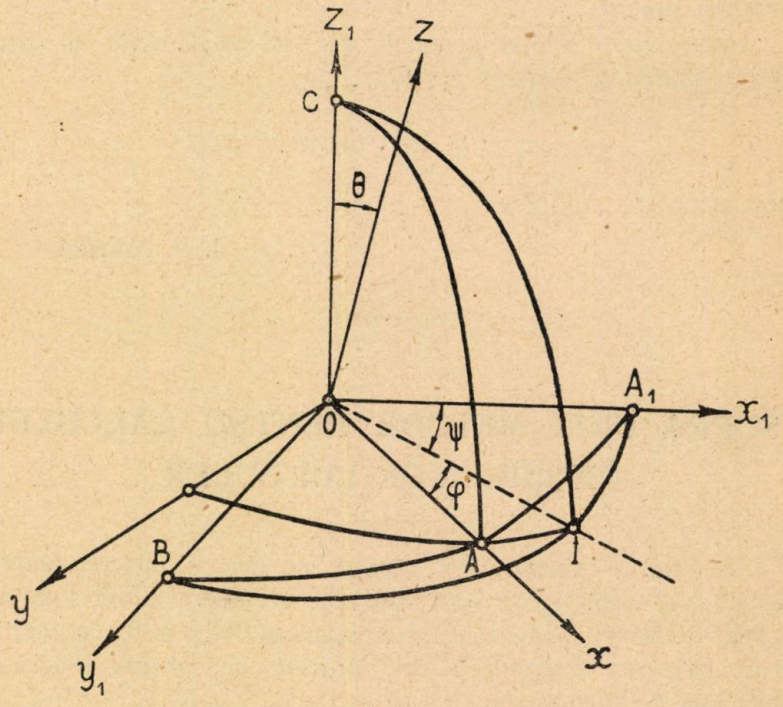


Fig. 1.

Căci $\widehat{ALB} = \theta$. Atunci (1) devine

$$\boxed{\alpha = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\theta}$$

căci $\cos\widehat{AA_1} = \alpha$.

Pentru calculul lui β, consinusul de direcție al axei Ox față de Oy_1, consider triunghiul sferic ABI și avem:

$$(2)\quad \cos\widehat{AB} = \cos\widehat{BI}\,\cos\widehat{AI} + \sin\widehat{BI}\,\sin\widehat{AI}\,\cos\theta.$$

Dar de pe figură avem $\widehat{BI} = \frac{\pi}{2} - \psi$; $\widehat{AI} = \varphi$ atunci (2) devine:

$$(2') \quad \cos \widehat{AB} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \cos\varphi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \sin\varphi \cos\theta.$$

De unde:

$$\boxed{\beta = \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta}.$$

Pentru calculul lui γ cosinusul de direcțiune al axei Ox față de Oz_1, consider triunghiul sferic AIC și avem:

$$(3) \quad \cos\widehat{AC} = \cos\widehat{AI} \cos\widehat{IC} + \sin\widehat{AI} \sin\widehat{IC} \cos \widehat{AIC}.$$

Dar: $\widehat{AI} = \varphi$; $\widehat{IC} = 90^0$; $\widehat{AIC} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

și (3) devine

$$\cos \widehat{AC} = \cos\varphi \cos\frac{\pi}{2} + \sin\varphi \sin\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

de unde $$\boxed{\gamma = \sin\varphi \sin\theta}.$$

Fie acum α', β', γ' cosinusurile de direcțiune ale axei Oy față de triedrul $Ox_1 y_1 z_1$. Pentru a nu complica figura 1 voiu considera o a doua figură. Consider triunghiul sferic A_1BI și avem:

$$(4) \quad \cos \widehat{A_1 B} = \cos\widehat{A_1 I} \cos\widehat{BI} + \sin\widehat{A_1 I} \sin\widehat{BI} \cos(\pi - \theta),$$

pentrucă $$\sphericalangle BIA_1 = \pi - \theta.$$

Atunci (4) devine

$$(4') \quad \alpha' = \cos\psi \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + \sin\psi \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cos(\pi - \theta)$$

căci $$\widehat{A_1 I} = \psi \quad ; \quad \widehat{BI} = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Deci . $$\boxed{\alpha' = -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta}.$$

Pentru calculul lui β' considerăm triunghiul BIB_1 şi avem:

(5) $\cos\widehat{\beta B_1} = \cos\widehat{BI}\,\cos\widehat{B_1 I} + \sin\widehat{BI}\,\sin\widehat{B_1 I}\,\cos\theta.$

(5') $\beta' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\cos\theta$

pentrucă $\widehat{BI} = \frac{\pi}{2}+\varphi \;;\; \widehat{B_1 I} = \frac{\pi}{2}-\psi.$

Deci: $\boxed{\beta' = -\sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\theta}$.

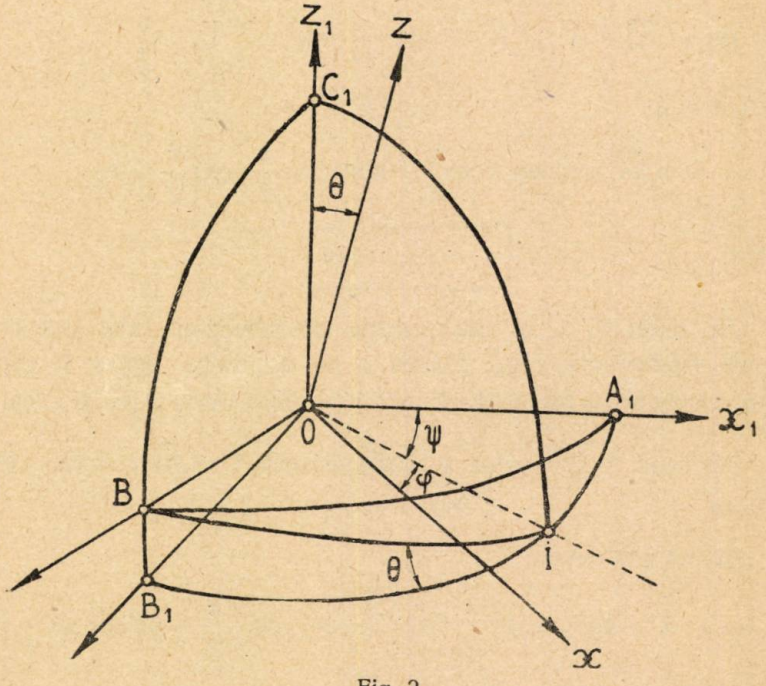


Fig. 2.

Pentru calculul lui γ' considerăm triunghiul sferic BC_1I şi avem:

(6) $\cos\widehat{BC_1} = \cos\widehat{BI}\,\cos\widehat{C_1 I} + \sin\widehat{BI}\,\sin\widehat{C_1 I}\,\cos\widehat{BIC_1}.$

Dar pe figură avem:

$$\widehat{BI} = \frac{\pi}{2} + \varphi \quad ; \quad \widehat{C_1 I} = 90^0 \quad ; \quad \widehat{BIC} = 90^0 - \theta.$$

Deci (6) devine

$$(6') \quad \gamma' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cos 90^0 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin 90^0 \cos(90^0 - \theta).$$

Deci $\boxed{\gamma' = \cos\varphi \sin\theta}$.

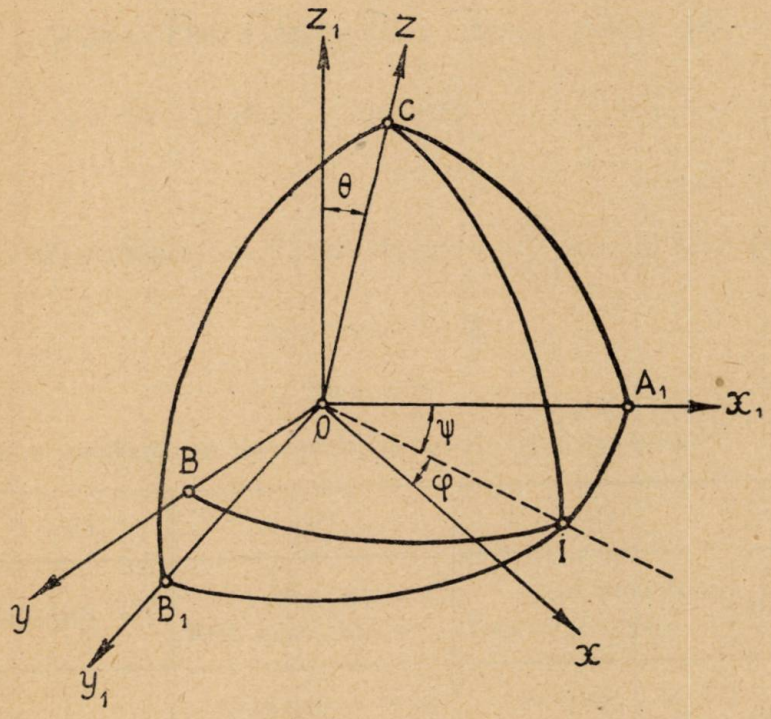


Fig. 3.

Pentru calculul cosinusurilor de direcţiune α'', β'' şi γ'' ale axei Oz faţă de Ox_1, Oy_1 şi Oz_1 consider o a treia figură. In primul rând consider triunghiul sferic IA_1C, din fig. 3, şi avem:

$$(7) \quad \cos\widehat{CA_1} = \cos\widehat{A_1 I} \cos\widehat{CI} + \sin\widehat{CI} \sin\widehat{A_1 I} \cos\widehat{CIA_1}.$$

De pe figură avem:

$$\widehat{CI} = 90^0 \quad ; \quad \widehat{A_1 I} = \psi \quad ; \quad \widehat{CIA_1} = 90^0 - \theta.$$

Atunci (7) devine

$$(7') \qquad \alpha'' = \sin 90^0 \sin\psi \cos(90^0 - \theta)$$

sau

$$\alpha'' = \sin\psi \sin\theta.$$

Pentru calculul lui β'' considerăm triunghiul sferic CIB_1 şi avem:

$$(8) \quad \cos\widehat{CB_1} = \cos\widehat{B_1 I} \cos\widehat{CI} + \sin\widehat{B_1 I} \sin\widehat{CI} \cos\widehat{B_1 IC}.$$

$$\widehat{B_1 I} = \frac{\pi}{2} - \psi \quad ; \quad \widehat{CI} = 90^0 \quad ; \quad \sphericalangle B_1 IC = 90^0 + \theta.$$

Deci

$$(8') \quad \cos\widehat{CB_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\cos 90^0 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\sin 90^0 \cos(90^0 + \theta)$$

sau

$$\beta'' = -\cos\psi \sin\theta$$

iar

$$\gamma'' = \cos\theta.$$

Punând sub formă de tablou cosinusurile de direcţiune, avem:

	Ox_1	Oy_1	Oz_1
Ox	$\alpha = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta$	$\beta = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta$	$\gamma = \sin\varphi\sin\psi$
Oy	$\alpha' = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta$	$\beta' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta$	$\gamma' = \cos\varphi\sin\theta$
Oz	$\alpha'' = \sin\psi\sin\theta$	$\beta'' = -\cos\varphi\sin\theta$	$\gamma'' = \cos\theta.$

N. T. DONCIU.

O METODĂ PENTRU SCRIEREA ECUAȚIEI TANGENTELOR DINTR'UN PUNCT EXTERIOR LA CERC ȘI SFERĂ. CONSECINȚE PENTRU CONICE

1°. Ecuația cunoscută a tangentelor duse dintr'un punct la o conică nu se poate folosi pentru începători, deoarece stabilirea ei cere cunoștințe mai întinse de teoria conicelor. Se recurge atunci, în cazul cercului și conicelor raportate la axe, la a le intersecta cu polara și a scrie ecuațiile tangentelor în punctele de intersecție, metodă nu tocmai simplă în aplicații. O altă metodă e aceea de a impune dreptei $y-y_0=m\,(x-x_0)$, ce trece prin punctul $P(x_0, y_0)$ de unde avem să ducem tangentele, condiția de a fi tangentă conicei.

După câte știu nu s'a căutat o metodă simplă de a se scrie direct ecuația tangentelor la cerc sau la conicele cu axele paralele axelor de coordonate, precum și separarea acestor tangente.

E ceeace îmi propun să fac în rândurile ce urmează.

2°. *Tangentele la cerc.* Fie cercul cu centrul în $\omega\,(a, b)$, de rază r și $P(x_0, y_0)$ punctul de unde vrem să ducem tangentele.

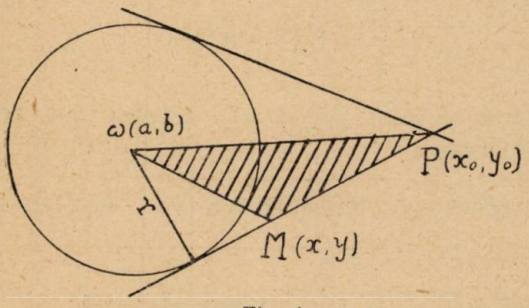


Fig. 1.

Să luăm un punct curent $M(x, y)$ indiferent pe una din cele două tangente. In triunghiul ωMP luăm pe $\overline{MP}$ ca bază, înălțimea va fi raza cercului, încât relația ce caracterizează punctele tangentelor este:

$$(1) \qquad 2 \times \text{aria } MP\omega = MP \times r.$$

Aria $MP\omega$ și segmentul $\overline{MP}$ pot avea orientări diferite după cum punctul M e pe o tangentă sau pe alta, de o parte sau de alta a punctului P, încât relația de mai sus scrisă analitic va fi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \pm\, r\sqrt{(x-y_0)^2+(y-y_0)^2}\,.$$

Ridicând la patrat avem forma definitivă a *ecuației tangentelor duse din punctul* $P(x_0, y_0)$ *la cercul de rază* r *cu centrul în* $\omega(a, b)$:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}^2 = r^2 [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2].$$

Dacă centrul e în origină prima parte din (2) devine $\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2$.

3°. Dacă avem nevoie să determinăm pe fiecare din cele două tangente vom scrie ecuația tangentelor (2) sub forma

$$(2') \qquad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_0-a & y_0-b \end{vmatrix}^2 = r^2 [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2].$$

Tangentele, trecând prin punctul P, vor avea ecuațiile de forma

$$(3) \qquad y - y_0 = m(x - x_0)$$

deci înlocuind pe $y-y_0$ în (2') și împărțind cu $(x-x_0)^2$, obținem

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 1 & m \\ x_0-a & y_0-b \end{vmatrix}^2 = r^2 (1+m^2)$$

ecuație în m, care ne dă două valori m_1 și m_2. Acestea duse în (3) ne dau cele două tangente.

Exemplu. Să scriem tangentele duse din punctul A (— 13, — 4) la cercul

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

Elementele cercului sunt $\omega(2, 1)$ și $r^2 = 5$. Ecuația (4) ne dă:

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ -15 & -5 \end{vmatrix}^2 = 5(1+m^2) \quad \text{sau} \quad 22m^2 - 15m + 2 = 0 \; ; \; m_1 = \frac{1}{2} \; ; \; m_2 = \frac{2}{11}.$$

Acestea duse în (3) ne dau tangentele:

$$x - 2y + 5 = 0 \quad \text{și} \quad 2x - 11y - 18 = 0.$$

4°. *Conul tangentelor la sferă.* Relația (1) e valabilă și când $M(x, y, z)$ se găsește pe o tangentă oarecare dusă din $P(x_0, y_0, z_0)$ la o sferă de rază r, cu centrul în $\omega(a, b, c)$.

Să notăm cu S aria triunghiului MPω şi cu S_1, S_2, S_3 proiecţiile ei pe cele trei plane *xoy*, *yoz*, *zox*. Avem:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}; \quad S_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_0 & z_0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}; \quad S_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_0 & x_0 & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix}$$

şi relaţia cunoscută

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Ridicând relaţia (1) la patrat şi transformând-o analitic *avem ecuaţia conului tangentelor duse din punctul* P *la sferă:*

$$(5)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_0 & z_0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_0 & x_0 & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= r^2\,[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2].$$

Observaţiuni. Scăzând în determinanţi linia a doua din prima şi a treia din a doua se observă că ecuaţia (5) e omogenă în raport cu $(x - x_0)$, $(y - y_0)$ şi $(z - z_0)$, deci reprezintă un con cu vârful în $P(x_0, y_0, z_0)$.

5°. *Tangentele la elipsa cu axele paralele axelor de coordonate.* O asemenea elipsă are ecuaţia caracterizată prin lipsa termenului în *xy*, iar coeficienţii lui x^2 şi y^2 sunt diferiţi şi de acelaşi semn.

Ea se poate strânge uşor în patrate şi pune sub forma

$$(6)\qquad \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} - 1 = 0$$

care ne dă coordonatele centrului $\omega(p, q)$ şi semiaxele *a*, *b*. Se ştie că elipsa este proiecţia unui cerc cu raza *a* (semiaxa mare) aşezat într'un plan XOY, ce face cu planul *xOy* al elipsei unghiul φ, dat de relaţia $\cos\varphi = \frac{b}{a}$. Intersecţia celor două plane e axa mare a elipsei, sau o paralelă la ea. Intre coordonatele unui punct $M_1(X, Y)$ din planul cercului şi ale proiecţiei sale $M(x, y)$ pe planul elipsei avem evident relaţiile:

$$(7)\quad x = X \;;\; y = Y\cos\varphi = \frac{b}{a}Y \;\therefore\; Y = \frac{a}{b}y.$$

Să notăm cu $P_1(X_0, Y_0)$ punctul din planul cercului, care are drept proiecție în planul elipsei punctul $P(x_0, y_0)$ și cu ω_1 centrul cercului. Proiectând relația (1) din planul cercului pe planul elipsei vom avea:

$$2 \times \text{aria } MP\omega = 2 \times \text{proiecția ariei } M_1P_1\omega_1 = \text{pr. } (a \times \overline{M_1P_1})$$

$$= (a \times \overline{M_1P_1}) \cos\varphi$$

$$\therefore \quad (8) \quad 2 \times \text{aria } MP\omega = b \times \overline{M_1P_1}.$$

Insă ținând seamă de (7) avem:

$$\overline{M_1P_1}^2 = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = (x - x_0)^2 + \frac{a^2}{b^2}(y - y_0^2).$$

Atunci relația (8) ridicată la patrat ne dă:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ p & q & 1 \end{vmatrix}^2 = a^2(y - y_0)^2 + b^2(x - x_0)^2$$

care este *ecuația tangentelor duse din punctul* P *la elipsă.*

6°. Dacă trebue să separăm cele două tangente vom proceda exact ca la cerc. Ecuația în m este:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} 1 & m \\ x_0 - p & y_0 - q \end{vmatrix}^2 = a^2 m^2 + b^2.$$

7°. *Ecuația tangentelor duse din punctul* $P(x_0, y_0)$ *la o iperbolă cu axele paralele axelor de coordonate,* se obține din (9) schimbând pe b în bi. Căpătăm:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ p & q & 1 \end{vmatrix}^2 = a^2(y - y_0)^2 - b^2(x - x_0)^2.$$

Din (10) obținem ecuația în m:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} 1 & m \\ x_0 - q & y_0 - q \end{vmatrix}^2 = a^2 m^2 - b^2.$$

8°. *Tangentele la parabolă.* Până acum nu am folosit decât rezultatele dela cerc. *Pentru parabolă va trebui însă să schimbăm metoda.*

Fie P (x_0, y_0) punctul de unde ducem tangentele, N unul din punctele de contact, Q proiecția lui pe directoare, M (x, y) un punct curent de pe tangentă. Vârful A al parabolei are coordonatele (α, β) și atunci focarul va fi $F(\alpha + \frac{p}{2}, \beta)$, iar directoarea va avea ecuația $x = \alpha - \frac{p}{2}$.

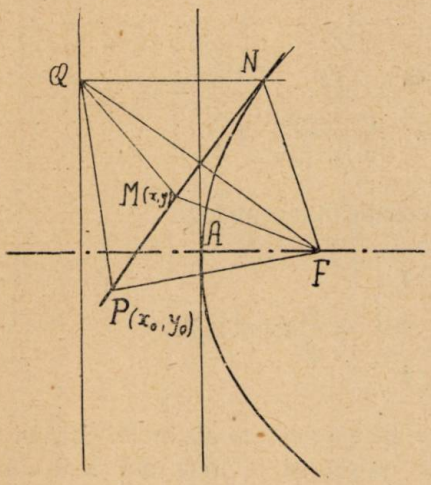


Fig. 2.

Se știe că tangenta PN este mediatoarea segmentului FQ, deci triunghiurile MPF și MPQ sunt egale. Fiind parcurse în sensuri contrarii vom avea relația geometrică:

(13) aria MPF + aria MPQ = 0.

Ne trebuesc coordonatele lui Q în funcție de cele ale lui M și P. Le vom calcula socotind pe Q intersecție a directoarei cu perpendiculara din focar pe tangenta MP, care are coeficient unghiular $\frac{y - y_0}{x - x_0}$. Luând X, Y coordonate curente pentru dreapta FQ avem ecuația ei:

$$Y - \beta = -\frac{x - x_0}{y - y_0}\left(X - \alpha - \frac{p}{2}\right)$$

care intersectată cu directoarea

$$X = \alpha - \frac{p}{2} \text{ ne dă } Q\left(\alpha - \frac{p}{2} \;;\; \beta + p\frac{x - x_0}{y - y_0}\right).$$

Atunci relația (13) scrisă analitic devine:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha + \frac{p}{2} & \beta & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha - \frac{p}{2} & \beta p + \frac{x - x_0}{y - y_0} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ 2\alpha & 2\beta + p\frac{x - x_0}{y - y_0} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

căci primele două linii sunt identice şi elementele liniilor a 3-a din cei doi determinanţi se pot aduna. Impărţim linia ultimă cu 2 şi desfacem în suma de determinanţi:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha & \frac{p}{2} & \frac{x-x_0}{y-y_0} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care ne dă forma definitivă a ecuaţiei tangentelor,

$$(14) \qquad (y - y_0) \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = \frac{p}{2}(x - x_0)^2.$$

9°. Separarea tangentelor se face tot cu ecuaţia în m. Scăzân în determinant linia a II-a din prima şi a treia din a II-a şi înlocuind pe $y - y_0$ cu $m(x - x_0)$ găsim:

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} m & m^2 \\ x_0 - \alpha & y_0 - \beta \end{vmatrix} = \frac{p}{2}.$$

10°. *Observaţiuni finale.* Problema pentru cerc şi sferă a fost tratată în cazul general. Cazul general la conice, tratat prin această metodă nu prezintă interes deoarece, chiar dacă s'ar ajunge la o formulă, ea va conţine *semiaxele* şi *coordonatele centrului.* Dar atunci ar trebui făcută întâi reducerea ecuaţiei conicei şi apoi scrisă ecuaţia tangentelor, lucru lipsit de sens când avem la îndemână formula pentru cazul general.

Pentru cazurile particulare studiate aci, problema este interesantă şi practică, fiindcă determinarea centrului şi semiaxelor se face lesne prin gruparea în patrate.

Când centrul (sau vârful parabolei) e în origină, ecuaţiile respective devin mai simple făcând $p = q = 0$ sau $\alpha = \beta = 0$.

GH. D. SIMIONESCU.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

In tabloul candidaţilor admişi la concurs, publicat la pag. 338 şi 339 din numărul precedent, s'au strecurat câteva greşeli şi omisiuni de culegere. In loc de erată, republicăm după cum urmează, numele candidaţilor admişi la concurs pentru clasele a VI-a, a VII-a şi a VIII-a:

Clasa a VI-a: *Bârzescu I. Vasile-Mircea, Ciumaşu Viorel, Marinescu Stelian, Nache D. Dumitru, Rogoz V. Ion, Strejea N. Iorgu, Vrânceanu Gh. Gheorghe.*

Clasa a VII-a: *Cantuniar Cristu, Columbeanu D. Petru, Constantinescu N. Ilie, Ghiţă M. Vasile, Ieşan Alexandru, Ignat Gh. Mircea, Leţia Valentin, Marinescu C. Marinel, Mihăilescu I. Ştefan, Mustăcescu Traian, Pavica A. Victor, Roşu Tr. Nicolae.*

Clasa a VIII-a: *Andrei Gh. Aurel, Gâţă Gh. Gheorghe, Iliescu C. Constantin, Jurist Gh. Vlad, Păläceanu D. Vasile, Staicu Constantin, Udrea C. Ilie, Vasiliu Gh. Dumitru.*

In total 45 candidaţi şi anume: 7 pentru clasa a IV-a, 9 pentru clasa a V-a, 7 pentru clasa a VI-a, 12 pentru clasa a VII-a, 8 pentru clasa a VIII-a şi 2 pentru anul I al Politechnicei din Bucureşti.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ

In volumul XLVIII s'a publicat soluţiile a 32 probleme de aritmetică. Rezolvitorii lor, elevi de liceu, şi-au împărţit preferinţele, aşa încât nu se găseşte unul care să fie citat la cel puţin 25% din acele probleme. Singur D-l D. GH. VASILIU, elev al Liceului Militar din Iaşi, a atins numărul de 6 probleme rezolvate din cele 32 de probleme. D-sa este singurul rezolvitor la problema 5559 şi a dat soluţii bune la problemele 5530, 5543, 5605, 5679, iar la problema 5423 este citat printre rezolvitorii cari au dat o soluţie parţială.

In fine, în volumul XLVIII s'a propus, sub numele D-lui D. GH. VASILIU şi un exerciţiu de aritmetică, exerciţiul 16 dela pag. 133.

Pentru aceste motive, propunem să se acorde anul acesta, D-lui D. GH. VASILIU, premiul de aritmetică în valoare de 5.000 lei şi menţionăm ca încheiere, că premiata de anul trecut, D-ra LIDIA TUDORAN, deţine şi anul acesta un loc foarte aproape de primul, prin soluţiile date de D-sa la problemele 5352, 5423, 5468 şi 5543.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ARITMETICĂ

G-L GH. BUICLIU, ING. I. I. CHIŢULESCU,
ING. I. IONESCU.

Aprobat de Adunarea generală dela 9 Februarie 1944.

NOTE MATEMATICE

26. *Asupra unei recenzii* [1]). In *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 218 a apărut o recenzie a D-lui ŞERBAN ŢIŢEICA despre o lucrare de a mea „*Considérations sur certaines recherches quantiques de l'École française de physique théorique*" prezentată, la cerere, Reuniunii internaţionale de fizică teoretică din Boston, 1941.

Deoarece în timpul publicării acestei recenzii mă aflam în Ardealul de Nord, la Cluj, unde numerele G. M. îmi veneau foarte neregulat, am aflat de această recenzie abia după refugierea mea în ţară, întâmplată în ziua de 23 Octombrie 1943.

Faţă de obiecţiunile din acea recenzie relev următoarele:

Raportul pregătit de subsemnatul nu conţine cercetări originale ci rezumarea, uneori din cuvânt în cuvânt, ale unor cercetări speciale ale şcoalei franceze de fizică teoretică. Subiectul şi domeniul raportului mi-au fost fixate de comisiunea Reuniunii, care a adunat peste 120 de astfel de rapoarte asupra chestiunilor

1) Nota de faţă se publică cu acordul D-lui ŞERBAN ŢIŢEICA, autorul recenziei dela pag. 218, Vol. XLVIII.

de fizică teoretică. Deci, în privința fondului lucrării sau mai bine-zis ale rezultatelor pozitive sau negative ale acestor cercetări, autorii francezi menționați în lucrare sunt vizați direct a suporta obiecțiunile D-lui ȘERBAN ȚIȚEICA. In acest fel dacă raportul prezentat de mine are un aspect de diletantism, acest aspect privește întru totul pe acei cercetători francezi din școala lui BÜHL, cari au încercat să se ocupe (cu ajutorul studiului structurilor fine) de teoria cuantelor. De asemenea, grava greșeală de expunere, privitoare la funcțiunea continuă fără derivată, amintită de subsemnatul în raportul de mai sus, privește pe D-l DELSARTE, care a expus pentru prima oară, după a mea cunoștință această chestiune. De altfel, nu sunt de acord de loc cu D-l ȘERBAN ȚIȚEICA, că în cazul amintit formula

$$\frac{d}{dx}\left[\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right] = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{d}{dx} f_n(x)$$

ar fi inaplicabilă, fiindcă este vorba de o serie uniform convergentă, derivata seriei fiind de asemenea o funcțiune uniform convergentă și funcțiunea reprezentată de seria considerată o funcțiune continuă, deci chiar cu o condiție în plus pentru derivabilitatea seriilor. După câte îmi aduc aminte, de altfel, chestiunea aceasta, a mai fost desbătută la un seminar al Universității din Cluj, în prezența corpului profesoral al acelei Universități, în special matematicieni și problema funcțiunii continue fără derivată a lui DELSARTE a fost rezolvată în sensul indicat de școala lui BÜHL. Această chestiune ar putea să fie punctul de plecare al unor cercetări mai migăloase asupra problemei lui DELSARTE. De altfel acesta a fost și scopul raportului, de a porni discuții și cercetări în jurul chestiunilor propuse de unii reprezentanți ai școalei franceze. „*Se recomandă deci multă atenție la cetirea articolului*“, așa cum afirmă și D-l ȘERBAN ȚIȚEICA; căci numai în acest fel se va putea înțelege rostul lucrării mele.

T. VESCAN.

27. *Asupra problemei 3733*[1]). 1°. Un caz particular al acestei probleme se găsește publicat în „*Exercices d'Arithmétique*“ par

1) A se vedea soluția dată problemei 3733 în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVII, pag. 465.

FITZ-PATRICK et CHEVREL pag. 302, chestiunea 37, care se enunţă astfel:

„Dacă a *şi* b *sunt factorii primi ai lui* N, *suma patratelor tuturor numerelor prime cu* N *şi mai mici ca el este:*

$$\frac{N^3}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{b}\right)+\frac{N}{6}(1-a)(1-b)$$

şi aceea a cuburilor:

$$\frac{N^4}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{b}\right)+\frac{N^2}{4}(1-a)(1-b).$$

2°. Cunoscând pe o cale oarecare suma patratelor, voiu indica o altă cale mai simplă pentru determinarea sumei cuburilor.

Fie $p_1, p_2, \ldots p_n$ numerele prime cu N şi mai mici decât el, atunci se ştie că avem:

$$1)\quad \begin{cases} p_1 + p_n = N \\ p_2 + p_{n-1} = N \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{\frac{n}{2}} + p_{\frac{n}{2}+1} = N \end{cases} \qquad \text{unde} \quad n = \varphi(N).$$

Ridicând la patrat şi adunând, avem:

$$2)\ p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2+2(p_1.p_n+p_2.p_{n-1}+\ldots+p_{\frac{n}{2}}.p_{\frac{n}{2}+1})=\frac{n}{2}N^2.$$

Dacă punem:

$$S(p_1 p_n) = p_1 p_n + p_2 p_{n-1} + \ldots p_{\frac{n}{2}}\, p_{\frac{n}{2}+1}$$

atunci avem:

$$3)\qquad \Sigma p_i^2 = \frac{1}{2}N^2.\varphi(N) - 2.S(p_1.p_n).$$

Ridicând acum egalităţile 1) la cub şi adunând, avem:

$$4)\qquad \Sigma p_i^3 + 3.\Sigma p_1.p_n(p_1+p_n) = \frac{n}{2}.N^3.$$

Dar:

$$3\Sigma p_1 p_n (p_1 + p_n) = 3N.\Sigma p_1 p_n = 3N.S(p_1 p_n).$$

Prin urmare:

$$5) \qquad \Sigma p_i^3 = \frac{1}{2} N^3 \varphi(N) - 3N \cdot S(p_1 p_n).$$

Scoţând însă valoarea lui $S(p_1 p_n)$ din 3) şi introducând-o în 5), obţinem:

$$6) \qquad \Sigma p_i^3 = \frac{3}{2} \cdot N \cdot \Sigma p_i^2 - \frac{1}{4} \cdot N^3 \cdot \varphi(N).$$

Aşa dar, am exprimat suma cuburilor în funcţie de suma patratelor.

COMANDOR I. LINTEŞ.

28. *Teoremă asupra egalităţilor multigrade. Dacă* a_i, b_i *verifică relaţiile*

$$(1) \quad a_1,\ a_2,\ a_3 \overset{p}{=} b_1,\ b_2,\ b_3 \quad \text{şi} \quad a_1 + a_2 - a_3 = 2(b_1 + b_2 - b_3)$$

pentru $(p = 2, 4)$, *vom avea şi*

$$(2) \quad \begin{cases} 5a_1 - 3a_2 + 7a_3, \quad 7a_1 - a_2 + a_3, \quad -3a_1 + 5a_2 + 3a_3, \\ -a_1 + 7a_2 + a_3, \quad 2(b_1 + b_2 + 3b_3) \overset{q}{=} a_1 + a_2 + 7a_3, \\ 3a_1 + 3a_2 + 5a_3, \quad 2(3b_1 - b_2 + b_3), \quad 2(-b_1 + 3b_2 + b_3), \\ 3(a_1 + a_2 - a_3 \qquad (q = 1, 3, 5, 7). \end{cases}$$

Egalitatea multiplă (1) antrenează, după teorema lui BIRCK, pe următoarea:

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3, \quad -a_1 + a_2 + a_3, \quad a_1 - a_2 + a_3, \quad a_1 + a_2 - a_3, \\ 2b_1, \quad 2b_2, \quad 2b_3 \overset{x}{=} b_1 + b_2 + b_3, \quad -b_1 + b_2 + b_3, \\ b_1 - b_2 + b_3, \quad b_1 + b_2 - b, \quad 2a_1, \quad 2a_2, \quad 2a_3 \\ \qquad (x = 1, 2, 4, 6, 8). \end{cases}$$

Asociem termenii celor 2 membri ca în tabloul următor:

A_i	$a_1+a_2+a_3$	$-a_1+a_2+a_3$	$a_1-a_2+a_3$	$a_1+a_2-a_3$	$2b_1$
B_i	$2a_3$	$2a_2$	$2a_1$	$b_1+b_2-b_3$	$b_1-b_2+b_3$
A_iB_i	$a_1+a_2-a_3$	$-(a_1+a_2-a_3)$	$-(a_1+a_2-a_3)$	$a_1+a_2-a_3$ $-(b_1+b_2-b_3)$	$b_1+b_2-b_3$

A_i	$2b_2$	$2b_3$
B_i	$-b_1+b_2+b_3$	$b_1+b_2+b_3$
A_iB_i	$b_1+b_2-b_3$	$-(b_1+b_2-b_3)$

Dacă punem $b_1+b_2-b_3=d$, cu condiția egalității a doua din (1), avem șirul de diferențe A_i-B_i:

$$2d,\ -2d,\ -2d,\ d,\ d,\ d,\ -d.$$

Aplicând acum egalității (3) teorema reducerii [1]), găsim multigrada (2) de 10 termeni în total.

Pentru a rezolva sistemul (1) am stabilit formulele următoare:

$$[1, -4, -2],\ [2, 0, -3],\ [3, -1, 1] \overset{p}{=} [1, 1, 3],\ [2, -4, -1],$$
$$[3, 0, -2] \quad \text{cu} \quad (p=2, 4)$$

unde prin $[k, l, m]$ se reprezintă forma cuadratică $kx^2+lxy+my^2$.

Iată câteva exemple numerice:

1°. $77, 3, 111 \overset{p}{=} 43, 53, 114$

$13, 27, 31, 155, 173, 219 \overset{q}{=} 95, 115, 195, 213$

2°. $45, (-2) \overset{p}{=} 15, 46, 23$

$1, 33, 39, 65, 71 \overset{q}{=} 11, 15, 53, 57, 73$

3°. $6, 23, 25 \overset{p}{=} 10, 19, 27$

$9, 11, 43, 45, 55 \overset{q}{=} 3, 19, 37, 51, 53.$

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 293.

Multigradele dela 2^0 şi 3^0, adevărate pentru $q = 1, 3, 5, 7$ sunt cunoscute [1]).

Iată şi câteva soluţii inedite ale egalităţii multigrade:

$$A_1, A_2, \ldots A_5 \overset{q}{=} B_1, B_2, \ldots B_5 \qquad (q = 1, 3, 5, 7)$$

$$13, 53, 67, 103, 107 \overset{q}{=} 19, 39, 81, 93, 111$$

$$15, 115, 137, 227, 237 \overset{q}{=} 47, 57, 185, 195, 247$$

$$15, 31, 89, 121, 139 \overset{q}{=} 1, 55, 75, 129, 135.$$

Ultima egalitate mi-a fost comunicată de D-l AD. LETAC. Dacă, între a_i, b_i care verifică relaţiile

$$a_1, a_2, a_3 \overset{p}{=} b_1, b_2, b_3 \qquad (p = 2, 4)$$

se stabilesc condiţiile

$$a_1 + a_2 - a_3 = 2(b_1 + b_2 - b_3) \quad \text{şi} \quad b_2 - b_3 = 3b_1$$

se va găsi o soluţie a multigradei

$$A_1, A_2, \ldots A_5 \overset{q}{=} B_1, B_2, B_3, B_4 \qquad (q = 1, 3, 5, 7).$$

Exemplu. $71, 98, 195 \overset{p}{=} 21, 127, 190 \qquad (p = 2, 4)$

$(71 + 195 - 98) = 2(21 + 190 - 127)$ şi $190 - 127 = 3 \times 21.$

Formulele (2) dau apoi

$$8, 50, 132, 148, 174 \overset{q}{=} 63, 119, 161, 169 \qquad (q = 1, 3, 5, 7).$$

Acest exemplu trebue apropiat de acela pe care l-am semnalat în *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XXI, pag. 39. Din aceste două exemple se deduc două octograde cu câte 9 termeni în fiecare membru.

A. GLODEN.

---

1) *The Tohoku Mathematical Journal.* Sept. 1940, pag. 197.

29. *Asupra problemei 5179*, rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 367. Ecuaţiile dreptei lui SIMSON stabilită de D-l ŞT. S. MIHĂIESCU cu ocazia rezolvării acestei probleme sunt cunoscute.

In „*Cours de Géométrie analytique*", B. NIEWENGLOWSKI, Tome I, page 196, se propun aceste ecuaţii ca exerciţiu şi se menţionează că ele sunt date de BADOUREAU în „*Nouvelles Annales*" din 1879.

P. P. DRĂGHICESCU.

30. *Relaţiuni între suprafeţe.* Relaţiunile stabilite de D-l V. THÉBAULT în nota dela pag. 344 din numărul trecut, se pot extinde la un poligon de n laturi şi la o prismă cu n muchi. Iată cum:

Pe dreptele paralele $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, *din acelaşi plan, se iau la întâmplare perechile de puncte* $A_1, A_1'; A_2, A_2'; \ldots; A_n, A_n'$, *iar pe* $A_1A_1', A_2A_2', \ldots A_nA_n'$ *se iau punctele* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *care împart segmentele* $A_1A_1', A_2A_2', \ldots$ *în acelaşi raport* k. *Notând cu* S_1, S, S' *respectiv suprafeţele* $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, A_1A_2 \ldots A_n, A_1'A_2' \ldots A_n'$, *avem relaţiunea*

$$(1) \qquad (k+1)\, S_1 = S + k S'.$$

Se descompun suprafeţele respective în triunghiuri, între suprafeţele cărora există relaţiuni ca (1). Suma acelor relaţiuni dă pe (1) între suprafeţele poligoanelor.

La fel se tratează problema din spaţiu:

Pe n drepte paralele, nesituate în acelaşi plan, se iau perechile de puncte $A_1, A_1'; A_2, A_2', \ldots A_n, A_n'$ şi punctele $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ care divid segmentele $A_1A_1', A_2A_2', \ldots A_nA_n'$ în acelaşi raport k. Între volumele V_1, V, V' ale solidelor $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n A_1A_2 \ldots A_n$, $A_1'A_2' \ldots A_n'$ există relaţiunea

$$(k+1)\, V_1 = V + k V'.$$

G-L GH. BUICLIU.

BIBLIOGRAFIE

Cercul Matematic, Nr. 1, Târgu-Jiu. Supliment ştiinţific scos de *Amicul Tinerimii,* Revista liceului *„Tudor Vladimirescu"* sub îngrijirea D-lor profesori: V. M. VASILIU, M. PAVELESCU şi N. N. ANIŢESCU.

Conţine exerciţii şi probleme propuse.

Disquisitiones Mathematicae et Physicae. GABRIELA BOGDAN: La dimonstrazione di un teorema sopra le funzioni n-iperarmoniche. GH. TH. GHEORGHIU: Sur quelques propriétés affines. CAIUS IACOB: Recherches sur les mouvements fluides engendrés par la rotation de plusieurs corps solides. MARIE-ANTOINETTE TOUNELAT: Théorie euclidienne de l'électromagnétisme et de gravitation.

Pozitiva. Anul IV. Nr. 1—2, Noembrie-Decembrie 1943. Lista membrilor. G. G. CONSTANTINESCU: Despre ecuaţiile diferenţiale lineare integrabile prin generalizarea transformării lui LAPLACE. Curierul cititorilor, exerciţii şi probleme propuse.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXIII, Nr. 12. Februarie 1944. M. GHERMĂNESCU: Ecuaţia

$$x^2 + axy + bk^2 = z^k$$

în întregi. C-DOR I. LINTEŞ: Teoreme şi consecinţe asupra distribuţiei de numere prime. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXIX. Nr. 3—4, Iulie-Dec. 1943. H. A. STUART: Determinarea constituţiei moleculelor cu ajutorul metodelor fizice. V. ŞIADBEI: COPERNIC. C. BARTH: Aplicaţii cytologice şi bacteriologice ale microcosmnlui electronic. DR. C. GH. MACAROVICI: Dializa ca metodă de determinare a greutăţii moleculare sau ionice şi complecşi cu două sau mai multe învelişuri. M. PĂUCĂ: Paleobiologia şi începuturile ei în România. C. C. OPRESCU: O ştiinţă nouă, radiogeologia. CR. I. SIMIONESCU: Acţiunea hydroxyzilor alcalini asupra fibrelor de celuloză. DR. EM. GHEORGHIU: Profesorul ÉMILE SERGENT. DR. M. POPOVĂŢ: Substanţele coloidale din soluri. C. V. GHEORGHIU: Vitamina X. Scurte comunicări originale. Note şi informaţii. Dări de seamă.

Ştiinţă şi progres. Anul IX. Nr. 2, Decembrie 1943. EM. POP: Un erou al culturii Româneşti: ŞTEFAN MICLE. M. DRĂGAN: De ce strălucesc stelele. I. STAMATE: Asupra unei probleme. P. P. DRĂGHICESCU, AUREL POPA şi GH. BOGDAN: O problemă de construcţie.

Insemnări. Dela *Congresul Profesorilor de Geografie.* A. A. V.: Ştiinţa românească peste hotare. Probleme rezolvate şi propuse.

DR. ING. PL. ANDRONESCU. Calculul vectorial. (Extras din *Gazeta Matematică*).

N. N. GHIRCOIAŞU. O pagină de aur de istoria matematicilor. (Extras din *Ştiinţă şi Progres*).

CERERI

328. Prin unele articole şi Note matematice, şi mai ales prin Cereri, *Gazeta Matematică* a creat un curent pentru cercetări ale istoricului matematicilor în România. Pentru a se crea un asemenea curent şi pentru istoricul astronomiei în ţara noastră vom publica de aci înainte şi date privitoare la astronomie, extrase din publicaţiunile speciale. Ca izvoare se poate consulta *Albina* lui ASACHI, *Buletinul Societăţii Române de Ştiinţe*, cursurile de cosmografie făcute la Licee, etc. Rugăm pe corespondenţii noştrii a contribui la adunarea acestui material.

I. i.

DIVERSE

a) Conferinţele D-lui Prof. Petre Sergescu

In cursul lunii Decembrie, D-l PETRE SERGESCU, actualmente Profesor la Politechnica din Bucureşti, a fost invitat de Universităţile Politechnicilor din Elveţia spre a ţine acolo conferinţe asupra istoricului matematicilor. Conferinţele s'au ţinut la Universităţile din Geneva, Lausanne, Neuchâtel, Fribourg şi la Politechnica din Zürich. Subiectele tratate au fost: *Matematica în România, Matematica în Evul mediu, Inceputurile difuziunii calculului Diferenţial, Combinări cu repetiţie limitate.*

Reputaţia D-lui SERGESCU ca un cunoscător al Istoriei Matematicilor este bine cunoscută prin conferinţele şi publicaţiile sale în acest domeniu.

I. I.

b) **Redacţionale.** Numărul de faţă apare în 84 pagini graţie contribuţiei D-lor N. T. DONCIU şi I. V. MĂTIEŞ, cari au suportat costul imprimării plusului peste numărul normal de 56 pagini lunare.

c) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

PL. ANDRONESCU. Calculul vectorial.
Donată de autor.

PAUL METH. Theorie der Planetenbewegung. Leipzig und Berlin 1912.

COLONEL MUICĂ. Demonstrarea teoremei lui FERMAT. Bucureşti 1909.

H. E. TIMERDIND. Die Fallgesetze. Ihre Geschichte und Bedeutung. Leipzig und Berlin 1912.
Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

GERGE-JÓN MANU. Maior în oştirea Română. Arithmetica şi Algebra. Paris, Imprimeria lui DE SOYE şi ROUCHET. Piaţa Pantheonului 2. Paris 1863.

SLUGERULŬ G. POPŬ. Elemente de Aritmetică Raţionată. Bucureşti. Tipografia Kolegiului St. Sawa. 1850. (Scrisă cu litere cirilice).

IACOB FRIDRICH MALEN. Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen. Frankfurt und Leipzig. 1761.

DR. E. WINKLER: Vorträge über Brückenbau. Druck und Verlag von CARL GEROLD'S SOHN. Wien 1877.

DR. E. WINKLER: Vorträge über Eisenbahnbau. Verlag von H. DOMINICUS. Prag 1867.

DR. FR. MOCNIK, traducere de I. N. BLĂNDU. Algebra pentru învățământulŭ secundarŭ. Ed. II. Iassi, Librăria Şcólelorŭ G. S. PETRINI, Editore. 1870.

Donate de ING. N. PORTOCALĂ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1959. *Un cărucior se mişcă rectiliniu pe un plan orizontal. In el se aşează un steag cu tija verticală. Să se studieze un mecanism care să facă pânza steagului să se mişte după traiectoria unui proiectil în vid, când căruciorul se mişcă dela un punct la altul.*

I. IONESCU.

Fie în Fig. 1 A'SB' traiectoria în vid a unui proiectil, care este o parabolă. Fie α unghiul sub care ar urma să fie asvârlit

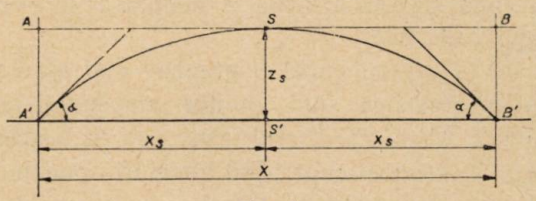


Fig. 1.

un proiectil cu o viteză iniţială V_0. Atunci proprietăţile ecuaţiei traiectoriei din vid, care ne interesează în cazul problemei 1959, ne arată că:

Bătaia $$X = AB = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2X_s .$$

Săgeata $$Z_s = SS' = \frac{V_0 \sin^2\alpha}{2g} .$$

Durata $$T = \frac{X}{V_0^2 \cos\alpha} .$$

Apoi:

Viteza orizontală $V_0 \cos\alpha$ = *constantă.*

Viteza verticală $V_0 \sin\alpha - gt$ = proporţională cu *căderea.*

In consecinţă dacă presupunem că un punct oarecare greutate pleacă din spre A sau B, cu o viteză orizontală egală cu $V_0 \cos\alpha$ şi în acelaşi timp ar fi lăsat să cadă liber, atunci după timpul T/2X ajunge în A sau B, urmând traiectoriile SA′ sau SB′. In consecinţă, *cel mai simplu mecanism de mişcare a steagului* ar fi ca el să alunece de-a-lungul tijei, aşa cum se vede în Fig. 2, tras fiind prin intermediul unui scripete de o sfoară şi de o greutate.

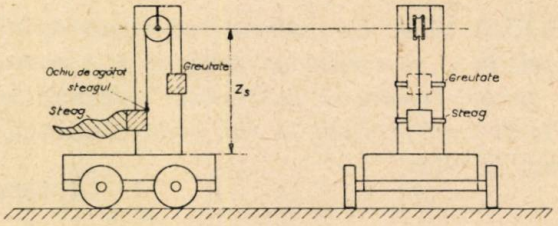


Fig. 2.

Sfoara este agăţată la steag cu un simplu ochiu, aşa în cât, în momentul când steagul a ajuns la înălţimea scripetelui, ochiul iese iar steagul cade liber.

Sfoara are la celălalt capăt o greutate mai mare ca a steagului; steagul şi greutatea sunt ghidate convenabil aşa cum se vede în Figura 2. Când căruciorul este pus în mişcare pe linia A′ B′ cu viteza $V_0 \cos\alpha$, în clipa când trece prin punctul A′ spre B, greutatea care este sus (şi steagul jos), este lăsată să cadă. Când căruciorul ajunge în S, steagul s'a urcat în dreptul scripetelui la înălţimea Z_0, iar ochiul sfoarei scăpând, lasă steagul să cadă, aşa în cât în clipa când căruciorul ajunge în B′, steagul a ajuns jos.

COMANDOR I. LINTEŞ.

PROBLEMA 3573. *Se dă un punct* $M_0\ (x_0, y_0)$. *Din el se obţin punctele* $M_1, M_2, \ldots M_n$, *coordonatele lor deducându-se unele din altele cu ajutorul unor aceloraşi relaţii omografice, una pentru abscise, iar alta pentru ordonate.*

Pe ce curbă se găsesc punctele $M_1, M_2, \ldots M_n$?

In ce caz această curbă se reduce la o iperbolă sau la o dreaptă? (Enunţ rectificat).

M. GHERMĂNESCU.

Fie

$$ax_n x_{n+1} + bx_n + cx_{n+1} + d = 0, \quad Ay_n y_{n+1} + By_n + Cy_{n+1} + D = 0$$

relaţiile omografice care leagă abscisele, respectiv ordonatele a două puncte consecutive M_n, M_{n+1}. Putem pune aceste relaţii sub forma [1])

$$(1) \quad \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_{n+1} - \beta} = h \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}, \quad (2) \quad \frac{y_{n+1} - \alpha'}{y_{n+1} - \beta'} = k \frac{y_n - \alpha'}{y_n - \beta'},$$

unde

$$h = \frac{c\alpha + b}{a\beta + b} = \frac{a\beta + c}{a\alpha + c}, \quad k = \frac{A\alpha' + B}{A\beta' + B} = \frac{A\beta' + C}{A\alpha' + C},$$

α şi β fiind rădăcinile distincte ale ecuaţiei

$$au^2 + (b + c)\, u + d = 0,$$

iar α' şi β' ale ecuaţiei

$$Av^2 + (B + C)\, v + D = 0.$$

Acestea reamintite, (1) şi (2) constitue relaţii de recurenţă, prima pentru abscisele, iar a doua pentru ordonatele punctelor $M_1, M_2, \ldots M_n$, etc. Dacă M_0 este punctul iniţial dat, vom deduce, cu aceste relaţii

$$\frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} = h^n \frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \beta}, \quad \frac{y_n - \alpha'}{y_n - \beta'} = k^n \frac{y_0 - \alpha'}{y_0 - \beta'}.$$

Locul punctelor $M_1, M_2, \ldots M_n$, etc., se obţine eliminând n între aceste două relaţii, în care înlocuim x_n şi y_n prin coordonatele curente x şi y; avem

$$L\left(\frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \beta}\right) - L\left(\frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \beta}\right) = nLh, \quad L\left(\frac{y - \alpha'}{y - \beta'}\right) - L\left(\frac{y_0 - \alpha'}{y_0 - \beta'}\right) = nLk,$$

aşa că locul este curba cu ecuaţia

$$(3) \quad \left(\frac{y - \alpha'}{y - \beta'}\right)^{Lh} \left(\frac{y_0 - \beta'}{y_0 - \alpha'}\right)^{Lh} = \left(\frac{x - \alpha}{x - \beta}\right)^{L} \left(\frac{x_0 - \beta}{x_0 - \alpha}\right)^{Lk}$$

---

1) G. PAPELIER, *Exercices de Géométrie moderne*, t. VII, *Homographie*, p. 8.

care este algebrică dacă h şi k sunt puteri raţionale ale bazei logaritmilor întrebuinţaţi.

Curba este o iperbolă dacă $h = k$. Ea se reduce la o dreaptă dacă, în plus, avem

$$(4) \qquad \frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \beta} = \frac{y_0 - \alpha'}{y_0 - \beta'}.$$

Notă. 1°. D-l P. P. DRĂGHICESCU a determinat transformarea aşa fel că, dacă M_n se află pe o iperbolă, M_{n+1} să se afle pe aceeaşi curbă.

2°. Relaţia (4) se mai poate scrie

$$(\alpha' - \beta')\, x_0 - (\alpha - \beta)\, y_0 + \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$$

care arată că $M_0(x_0, y_0)$ trebue să se afle pe dreapta de ecuaţie

$$(\alpha' - \beta')\, x - (\alpha - \beta)\, y + \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$$

pentru ca, dacă $h = k$, curba (3) să se reducă la o dreaptă. Ar fi interesant de găsit legătura acestei drepte cu datele problemei.

M. G.

PROBLEMA 3647. *Să se găsească numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[\frac{n!}{x^n}]{a} = x^p \ , \quad (p \text{ real}).$$

LEON CĂLDĂRARU.

Ecuaţia dată se mai poate scrie

$$a^{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots} = x^p$$

sau

$$(1) \qquad a^{e^x - 1} = x^p.$$

Primul membru este pozitiv, oricare ar fi x real; trebue ca membrul al doilea să fie pozitiv.

Dacă p este raţional, $p = \frac{m}{n}$, ecuaţia (1) se mai scrie

$$a^{n(e^x - 1)} = x^m.$$

Curba $y = a^{n(e^x - 1)}$ porneşte dela $(-\infty, 0)$, asimptotă axei Ox, apoi creşte mereu până la $(+\infty, +\infty)$, tăind axa Oy în $(1, 0)$.

Curba $y = x^m$, are înfăţişări deosebite, după cum m este par sau impar.

Dacă m este *impar*, curba $y = x^m$ porneşte dela $(-\infty, -\infty)$, creşte apoi mereu până la $(+\infty, +\infty)$, tăind axa Oy în origine, deci nu poate întâlni curba precedentă decât pentru $x > 0$.

Dacă m este *par*, curba $y = x^m$ porneşte dela $(-\infty, +\infty)$, descreşte mereu pentru $x < 0$ până în origine $(0, 0)$, unde este tangentă axei Ox; de acolo, creşte mereu până la $(+\infty, +\infty)$.

Curba $y = x^m$ întâlneşte curba $y = a^{n(e^x-1)}$ într'un singur punct cu abscisa negativă, astfel că ecuaţia (1) are *numai în acest caz*, (m par), o singură rădăcină negativă.

In toate celelalte cazuri pentru p, ecuaţia (1) poate avea numai rădăcini pozitive. Pentru a preciza dacă sunt sau nu, observăm că, deoarece $x > 0$, putem înlocui ecuaţia (1) prin

$$(2) \qquad e^x - 1 = k\mathrm{L}x \quad , \quad k = \frac{p}{\mathrm{L}a},$$

a cărei rezolvare revine la semnul funcţiei

$$f(x) = e^x - k\mathrm{L}x - 1.$$

Vom deosebi două cazuri, după semnul lui k.

1°. $k > 0$. Derivata

$$f'(x) = e^x - \frac{k}{x}$$

se anulează pentru o valoare x_1, cuprinsă între 0 şi k, aşa că este negativă pentru $x < x_1$ şi pozitivă pentru $x > x_1$, deci funcţia $f(x)$ descreşte dela $+\infty$ până la valoarea *minimă* $f(x_1)$, apoi creşte nemărginit.

Dacă valoarea minimă $f(x_1)$ este pozitivă, $f(x)$ rămâne mereu pozitivă, aşa că ecuaţia (2), deci şi (1), nu are nicio rădăcină pozitivă.

Dacă $f(x_1)$ este negativă, $f(x)$ schimbă cel puţin de două ori de semn, aşa că ecuaţia (1) are cel puţin două rădăcini pozitive. Este de observat că nu pot fi mai mult de două rădăcini pozitive, deoarece curbele $y = e^x - 1$ şi $y = k\mathrm{L}x$ au convexitatea, prima în jos, iar a doua în sus, astfel că ele se pot întâlni în cel mult două puncte.

2°. $k < 0$. Derivata $f'(x) = e^x - \frac{k}{x}$ este mereu pozitivă, deci funcţia $f(x)$ creşte mereu dela $-\infty$ la $+\infty$, traversând o singură dată axa Ox deci, sigur, o rădăcină pozitivă.

Rezumând, putem spune:

Ecuația (1) are totdeauna o singură rădăcină pozitivă când $\frac{p}{La} < 0$, cel mult două când $\frac{p}{La} > 0$ și o rădăcină negativă când p este rațional, de forma $p = \frac{2r}{n}$, n fiind întreg impar.

Notă. La această problemă a dat o soluție D-l G. G. CONSTANTINESCU, pe când era student, considerând numai cazul când p este întreg.

M. G.

PROBLEMA 4281. *Să se determine* α *și* β, *așa că, dacă* $N = 3^{\alpha} . 5^{\beta}$, *să avem:*

$$\sum_{1}^{n} \varphi_i = N$$

unde φ_i *înseamnă indicatorul de ordinul* i *a lui* N.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

1. Dacă α și β sunt mai mari sau egali cu n, sau dacă numai unul din ei sunt mai mari sau egali cu n, atunci suma cerută este pară, pe când N este impar, deci nu avem soluție.

2. Dacă α și β sunt inferiori lui N atunci știm („*Teoria Indicatorilor*", pag. 57) că:

$$\varphi_1 < \sum_{1}^{n} \varphi_i \leqslant 2\varphi_1 - \varphi_n .$$

Cum, în acest caz, avem: $\varphi_n = 1$, atunci:

$$2 . \varphi_1 - \varphi_n = 2^4 . 3^{\alpha-1} . 5^{\beta-1} - 1.$$

Deci trebue să avem:

$$3^{\alpha} . 5^{\beta} \leqslant 2^4 . 3^{\alpha-1} . 5^{\beta-1} - 1$$

Sau: $$1 \leqslant 3^{\alpha-1} . 5^{\beta-1}.$$

De unde rezultă $\alpha = 1$ și $\beta = 1$, adică $N = 15$.

I. L.

PROBLEMA 5392. *In orașul București, pentru a chema un abonat la o convorbire telefonică, trebue format un număr de cinci cifre. Admițând că un abonat neatent greșește o cifră cerând una alăturată, în câte moduri un abonat chemat la telefon poate fi plictisit de aceia cari nu dau toată atenția la chemare? Se va presupune succesiv că se fac 1, 2, 3, 4, sau 5 greșeli.*

Primele două cazuri mi s'au întâmplat mie și sunt deci reale; celelalte pot fi numai teoretice.

I. IONESCU.

La Bucureşti, la data propunerii problemei, prima cifră a numerelor telefonice date poate fi numai 1, 2, 3, 4 sau 5; celelalte pot fi oarecare din cele 10 cifre. Ele se găsesc înşirate în ordinea 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, pe un arc de cerc în sens opus mişcării acelor unui ceasornic. Arcul de cerc are cam 270° şi începe dela mijlocul cercului despre dreapta mergând în sus spre stânga, apoi în jos pe la stânga şi apoi în jos spre stânga, până la punctul cel mai de jos unde este 0. De aci rezultă că cifrele 1 şi 0 nu pot fi greşite decât cu 2 sau cu 9, iar celelalte cu câte două cifre alăturate cu 1 în minus sau în plus. Prin urmare, confuziile de o cifră care se pot face în număr de $[2 + 2(10 - 2)] = 18$. Combinând aceste greşeli câte două avem $C_{18}^2 = 153$ greşeli duble. Greşeli triple sunt $C_{18}^3 = 816$, greşelile cuadruple sunt $C_{18}^4 = 3060$; şi în fine greşeli cuintuple sunt $C_{18}^5 = 8568$. Numărul greşelilor posibile este suma acestor cinci numere, şi adică

$$18 + 153 + 816 + 3060 + 8568 = 12615.$$

Evident că la acest număr se pot adăuga încă foarte numeroase cazuri de greşeli repetate.

Soluţia aceasta exactă nu a fost dată de niciun corespondent.

Prin diferite interpretări date enunţului, au dat 242 soluţii D-l C. BAKONYI (liceul Diaconovici Loga din Timişoara); 31 soluţii D-l MARIN GH. POPESCU (Clasa a VI-a Liceul din Piteşti); 1610 soluţii D-l V. D. PĂLĂCEANU (Elev clasa a VII-a Liceul militar Mihai Viteazul din Timişoara). D-l ION C. NEGRESCU (Liceul Spiru Haret din Bucureşti), nu a sumat totalul soluţiilor.

I. I.

PROBLEMA 5505. a) *Să se scrie ecuaţia focală a parabolelor* (P) *de mărime constantă, cu parametrul egal cu* p *în raport cu axele de coordonate perpendiculare* Ox, Oy. b) *Să se găsească condiţiile ca parabolele* (P) *să fie tangente la* Ox *şi* Oy. c) *Să se afle locul focarelor.* d) *Insemnând cu* A *şi* B *punctele de contact ale unei parabole* (P) *cu axele* Ox *şi* Oy, *să se afle locul punctului* I *de intersecţie ale normalelor în* A *şi* B. e) *Să se afle înfăşurătoarea cercului de diametru* AB.

N. ABRAMESCU.

Soluție dată de D-l D. RIPIANU.

a) Fie $F(\alpha, \beta)$ focarul și $x + ty + n = 0$ directoarea. Ecuația parabolelor (P) este

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{(x+ty+n)^2}{1+t^2},$$

cu condiția

$$(2) \qquad \frac{(\alpha+t\beta+n)^2}{1+t^2} = p^2,$$

care exprimă că distanța dela focarul (α, β) la directoarea $x + ty + n = 0$ este egală cu parametrul p dat al parabolei (P) de mărime constantă.

b) Punctele de intersecție ale parabolei (1) cu axele Ox și Oy se obțin făcând $y = 0$ și $x = 0$ și avem

$$(3) \qquad \begin{aligned} &y=0, \; m^2x^2 - 2[\alpha(1+t^2)+n]x + (\alpha^2+\beta^2)(1+t^2) - n^2 = 0, \\ &x=0, \quad y^2 - 2[\beta(1+t^2)+tx]y + (\alpha^2+\beta^2)(1+t^2) - n^2 = 0. \end{aligned}$$

Pentru ca parabolele (P) să fie tangente la axe, trebue ca aceste ecuații să aibă câte o rădăcină dublă. Deci

$$(4) \qquad \alpha^2 - \beta^2t^2 + 2\alpha n + n^2 = 0, \quad \alpha^2 - \beta^2t^2 - 2\beta tn - n^2 = 0.$$

Scăzând aceste relații, avem

$$(5) \qquad n(\alpha + t\beta + n) = 0.$$

De unde $n = 0$, și ecuația directoarei este $x + ty = 0$, care arată că trece prin origine. Aceasta trebuia, căci tangentele duse din originea O la parabola (P) fiind axele Ox și Oy, care sunt perpendiculare, acest punct O este pe directoarea parabolei. Din (5) nu putem avea $\alpha + t\beta + n = 0$, căci condiția (2) ar deveni imposibilă. Deci $n = 0$, iar din (4) și (2) rezultă

$$\alpha = t\beta \quad , \quad (\alpha + t\beta)^2 = p^2(1+t)^2.$$

$$(6) \qquad \alpha = p\sqrt{1+t^2} \quad , \quad \beta = \frac{p}{t}\sqrt{1+t^2}.$$

c) Eliminând pe t între aceste ecuații, unde punem x și y în loc de α și β, avem ecuația locului focarelor

$$p^2(x^2+y^2)=4x^2y^2.$$

Curba e simetrică în raport cu originea, axele și bisectoare. Avem

$$y=\frac{px}{\sqrt{4x^2-p^2}},\quad y'=-\frac{p^3}{(4x^2-p^2)^{3/2}},\quad y''=\frac{12p^3x}{(4x^2-p^2)^{5/2}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$		∞
y'		$-$			$-$	
y''		$-$			$+$	
y	$-\frac{p}{2}$		$-\infty$	∞	$\searrow$	$\frac{p}{2}$

d) Din (3), care au câte o rădăcină dublă, avem coordonatele punctelor de contact A și B. Observând (6), acelea ale lui İ sunt

$$x=\frac{1+t^2}{t}\alpha=\frac{p}{2t}(1+t^2)^{3/2},\quad y=(1+t^2)\beta=tx.$$

Eliminând pe t locul lui İ este $4x^4y^4=p^2(x^2+y^2)^3$, sau în coordonate polare $r=\frac{2p}{\sin^2 2\theta}$. Avem

$$r'=\frac{dr}{d\theta}=-\frac{8p\cos 2\theta}{\sin^3 2\theta},\quad \operatorname{tg}v=\frac{r}{r'},\quad E=\frac{1}{r}+\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}=$$

$$=\frac{1+15\cos 4\theta}{4p};\quad \cos u=-\frac{1}{15}.$$

θ	0		$\frac{\pi-u}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi+u}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dr}{d\theta}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
r	∞	$\searrow$			$2p$	$\nearrow$			∞
Puncte	P				Q				R
E		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$
$\operatorname{tg}v$	0				∞				0

Asimptotele sunt aruncate la infinit (fig. 1), căci

$$\left| \lim_{\theta \to 0} r \sin\theta \right| = \left| \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right| \to \infty.$$

Avem $r(\theta) = r(\pi - \theta) = r(\pi + \theta) = r(2\pi - \theta)$, deci toată curba se obține luând simetricele ramurii construite față de axe.

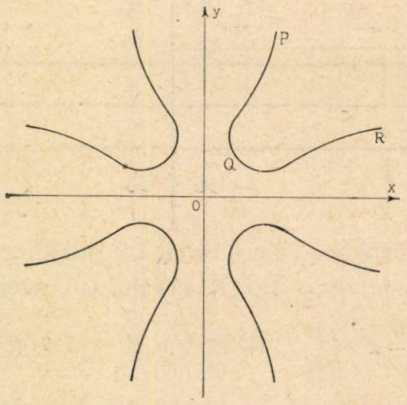


Fig. 1.

e) Cercul de diametru AB are ecuația

$$x^2 + y^2 - \frac{p}{2}\frac{(1+t^2)^{3/2}}{t^2}\,x - \frac{p}{2}\frac{(1+t^2)^{3/2}}{t}\,y = 0.$$

Egalând cu zero derivata în raport cu t, avem

$$y = \frac{2 - t^2}{t(-1 + 2t^2)}\,x, \tag{7}$$

de unde

$$\begin{cases} x = \dfrac{p}{2}\dfrac{(-1+2t^2)(1+t^2)}{4 - 7t^2 + 4t^4}\sqrt{1+t^2}, \\ y = \dfrac{p}{2}\dfrac{(2 - t^2)(1 + t^2)}{t(4 - 7t^2 + 4t^4)}\sqrt{1+t^2}, \end{cases} \tag{8}$$

care sunt coordonatele punctului de contact ale cercului cu înfășurătoarea.

Avem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{2}\, t\, \frac{(-5+4t^2)(2-11t^2+2t^4)}{(4-7t^2+4t^4)^2}\sqrt{1+t^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p}{2}\, \frac{(-4+5t^2)(2-11t^2+2t^4)}{t^2(4-7t^2+4t^4)^2}\sqrt{1+t^2},$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t^3}\,\frac{4-5t^2}{5-4t^2}, \quad \frac{dm}{dt} = -15\,\frac{4-7t^2+4t^4}{t^4(5-4t^2)^2}.$$

t	$\frac{dm}{dt}$	$\frac{dx}{dt}$	x	$\frac{dy}{dt}$	y	$\frac{dy}{dx}$	Puncte
0	...	...	$-\frac{p}{8}$	...	∞	∞	C
	−	−	. . . . .	−			
$\frac{1}{2}\sqrt{11-\sqrt{105}}$	...	0	$-\frac{p}{4}\sqrt{\frac{75-7\sqrt{105}}{10}}$	0	$\frac{p}{4}\sqrt{\frac{75+7\sqrt{105}}{10}}$	...	E
	−	+	. . . . .	+	+		
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	...	0	...	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	...	F
	−	+	. . . . .	+	+		
$\frac{2}{\sqrt{5}}$	...	...	$\frac{27p}{16\sqrt{5}}$	0	$\frac{27}{16}p$	0	G
	−	+	. . . . .	−	−		
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	...	0	$\frac{27p}{16}$	...	$\frac{27p}{16\sqrt{5}}$	∞	H
	−	−	. . . . .	−	−		
$\sqrt{2}$	...	...	$\frac{3\sqrt{3}}{4}p$	...	0		N
	−	−	. . . . .	−	−	...	
$\frac{1}{2}\sqrt{11+\sqrt{105}}$	...	0	$\frac{p}{4}\sqrt{\frac{75+7\sqrt{105}}{10}}$	0	$-\frac{p}{4}\sqrt{\frac{75-7\sqrt{105}}{10}}$	...	P
	−	+	. . . . .	+	+		
∞	...	...	∞	...	$-\frac{p}{8}$	0	Q

Curba (fig. 2) e simetrică în raport cu originea, axele, bisectoarea şi se ia simetricele celei construite.

Ecuaţia înfăşurătoarea cercului de diametru AB se obţine din (8), şi avem

$$x^2+y^2=\frac{p^2}{4}\,\frac{\left(\frac{1+t^2}{t}\right)^4}{4\left(\frac{1+t^2}{t}\right)^2-15},$$

$$\frac{1+t^2}{t}=\frac{\sqrt{2}}{p}\sqrt{4(x^2+y^2)+\sqrt{(x^2+y^2)[16(x^2+y^2)-15p^2]}}=u,$$

$$t=\frac{u+\sqrt{u^2-4}}{2}.$$

Introducând în (7), obţinem

$$\frac{y}{x}=\frac{u(-15+4u^2)+(9-4u^2)\sqrt{u^2-4}}{2(9-2u^2)}.$$

Izolând $\sqrt{u^2-4}$ şi ridicând la patrat, avem

$$(9)\qquad (9-2u^2)\left[\frac{x^2+y^2}{x^2}(9-2u^2)+u\,\frac{y}{x}(15-4u^2)\right]=0.$$

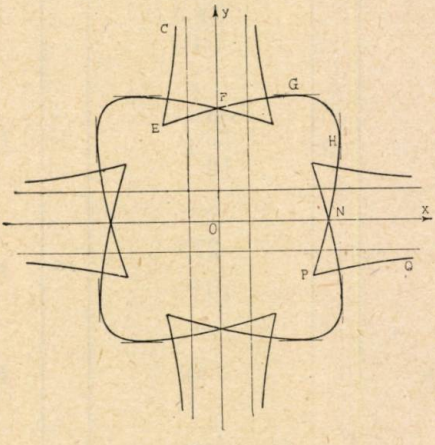


Fig. 2.

Nu putem lua $9=2u^2$, căci ar conduce la cercul $x^2+y^2=\frac{27}{16}p^2$, care nu face parte din înfăşurătoare. Notând $16(x^2+y^2)=15p^2v^2$, avem

$$u=\sqrt{\frac{15}{2}v(v+\sqrt{v^2-1})}$$

şi din (9), relaţia

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=u\,\frac{-15+4u^2}{9-2u^2}$$

dă

$$\frac{3}{16}\,\frac{p^2v^2}{xy}=\sqrt{\frac{15}{2}v(v+\sqrt{v^2-1})}\,\frac{-3+v^2+v\sqrt{v^2-1}}{9-5v^2}.$$

Ridicând la patrat, însemnând cu $\frac{3}{138}\,\frac{p^4}{x^2y^2}=w$, izolând $\sqrt{v^2-1}$ şi ridicând la patrat, avem

$$(10)\quad (9-5v^2)[w^2(9-5v^2)^2v^6-10w(15-15v^2+4v^4)v^4+25]=0.$$

Nu putem lua $9 = 5v^2$, căci ne conduce la cercul $x^2 + y^2 = \frac{27}{16} p^2$ exclus din loc. Inlocuind pe v şi w cu valorile lor, în paranteza din (10) egalată cu zero, avem ecuaţia înfăşurătoarei

$$16384x^2y^2(x^2+y^2)^4 - 256p^2(x^2+y^2)^5 - 57600p^2x^2y^2(x^2+y^2)^3 + 864p^4(x^2+y^2)^4 +$$
$$54000p^4x^2y^2(x^2+y^2)^2 - 337500p^4x^4y^4 - 729p^6(x^2+y^2)^3 = 0.$$

Soluţia a fost dată de D-l D. RIPIANU, care a mai aflat şi înfăşurătoarea dreptei AB. Au mai dat soluţii D-nii P. P. DRĂGHICESCU şi E. WEGENER.

N. A.

PROBLEMA 5753. *Să se arate că dacă avem:*

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{1+y}{1-y} + \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y} \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

avem şi:

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{y^2}{(1+y^2)^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^2} + 4\frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{4}.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: GEORGE M. NICOLAE (Colegiul Naţional „Carol I", Craiova) şi MIRCEA I. PĂTRĂSCIOIU (clasa a VII-a, Buzău).

Din relaţiunea de condiţie obţinem:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-yz}{1+yz}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{1+x^2} = \frac{(1-y^2)(1-z^2) - 4yz}{2(1+y^2)(1+z^2)}. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, din relaţiunea a doua, privită ca o ecuaţiune de gradul al 2-lea în $\frac{x}{1+x^2}$ obţinem:

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{-4yz \pm (1-y^2)(1-z^2)}{2(1+y^2)(1+z^2)}$$

Relaţiunea a doua este prin urmare verificată când x, y şi z verifică relaţiunea (1).

Soluţie dată de D-nii: B. BEREANU, M. D. COTARIU (Brăila), J. MAHRENHOLZ, G. M. NICOLAU (Craiova), ADRIAN POPESCU (elev-inginer S. P. T.), S-lt aviator M. D. STOENESCU.

Punem: $x = \operatorname{tg}\alpha\ ,\ y = \operatorname{tg}\beta\ ,\ z = \operatorname{tg}\gamma.$

Prima relaţiune devine:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma = k\pi+\frac{\pi}{4}. \qquad (1)$$

Relaţiunea 2-a devine acum:

$$\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma+2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma = 1.$$

Această ultimă relaţiune este evident verificată, când relaţiunea (1) este verificată, fiindcă în acest caz, unghiurile:

$$\frac{\pi}{2}-2\alpha\ ,\ \frac{\pi}{2}-2\beta\ ,\ \frac{\pi}{2}-2\gamma$$

sunt unghiurile unui triunghiu rectiliniu.

Observare. D-l GEORGE M. NICOLAE indică şi următoarea soluţiune.

Punem: $\dfrac{1+x}{1-x}=u\ ,\ \dfrac{1+y}{1-y}=v\ ,\ \dfrac{1+z}{1-z}=w.$

$$\therefore\ \frac{2x}{1+x^2}=\frac{u^2-1}{u^2+1}=\mathrm{X},\ \text{etc.}$$

Condiţia este: $u+v+w=uvw$ şi trebue să demonstrăm relaţiunea:

$$\sum \mathrm{X}^2+2\mathrm{XYZ}=1.$$

Se formează ecuaţiunea având ca rădăcini pe u, v şi w şi apoi se calculează expresiunlle $\sum \mathrm{X}^2$ şi XYZ în funcţie de coeficienţii ecuaţiunii.

PROBLEMA 5754. *Să se discute ecuaţia*

$$x^5-10x^3+10x^2+\lambda=0$$

şi să se rezolve pentru $\lambda=-1$ *şi* $\lambda=-100.$

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: G. GH. DONŢU (Liceul de Aplicaţie, Iaşi); E. N. WEGENER (Bucureşti); AL. ŢIGĂNOIU (Bacalaureat, Brăila); I. MAHRENHOLZ (Cottbus); VL. GH. JURIST (Colegiul Naţional „N. Filipescu" Predeal); I. I. MARINESCU (Liceul Militar, Iaşi); CĂPITAN E. ŞT. IACOB; M. D. COTARIU (Brăila); N. V. IONESCU (Bacalaureat); GR. NADOLU, A. H. CUBAT (Politechnica, Bucureşti).

Insemnând cu $f(x)$ membrul întâi al ecuaţiei date, avem:

$$f'(x) = 5x(x^3 - 6x + 4) = 0$$

care admite rădăcinile

$$x_1' = -1 - \sqrt{3} \; ; \; x_2' = 0 \; ; \; x_3 = -1 + \sqrt{3} \; , \; x_4' = 2.$$

Ducând aceste valori în $f(x)$, obţinem:

$$f(x_1) = \lambda + 4(16 + 9\sqrt{3}) \; ; \; f(x_2') = \lambda \; ;$$
$$f(x_3') = \lambda + 4(16 - 9\sqrt{3}) \; ; \; f(x_4') = \lambda - 8.$$

Cu aceste valori şi aplicând teorema lui ROLLE, discuţia ecuaţiei date, se cuprinde în tabelul următor:

λ	$f(-\infty)$	$f(-1-\sqrt{3})$	$f(0)$	$f(-1+\sqrt{3})$	$f(2)$	$f(+\infty)$	Rezultatele
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	1 răd. reală 4 imagine.
$-4(16+9\sqrt{3})$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	$+$	3 răd. reale din care una dublă, 2 imagine.
	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	3 răd. reale, 2 imagine.
$-4(16-9\sqrt{3})$	$-$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	5 răd. reale din care una dublă.
	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	5 răd. reale.
0	$-$	$+$	0	$+$	$-$	$+$	5 răd. reale din care una dublă.
	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	3 răd. reale, 2 imaginare.
8	$-$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	3 răd. reale din care una dublă, 2 răd. imagine.
	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	1 răd. reală, 4 imagine.
$+\infty$							

Când $\lambda = -1$, ecuația dată devine

$$f(x) = (x-1)\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-9\right] = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt $x_1 = 1$ și acelea date de

(1) $$y^2 + y - 11 = 0$$

în care

(2) $$y = x + \frac{1}{x}.$$

Avem din (1) $$y = \frac{-1 \pm \sqrt{45}}{2}$$

care duse în (2) dau pentru x valorile

$$x_{2,3} = -1+3\sqrt{5} \pm \sqrt{6(5-\sqrt{5})}\ ,\ x_{4,5} = -1-3\sqrt{5} \pm \sqrt{6(5+\sqrt{5})}.$$

Când $\lambda = -100$ ecuația dată devine

(3) $$f(x) = x^5 - 10x^3 + 10x^2 - 100 = (x^2-10)(x^3+10) = 0$$

ale cărei rădăcini sunt

$$x_{6,7} = \pm\sqrt{10}\ ;\ x_{8,9,10} = -\sqrt[3]{10}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right),\ (k=0,1,2)$$

așa că în definitiv rădăcinile ecuației (3) sunt

$$-\sqrt[3]{10}\ ,\ -\sqrt{10}\ ,\ \sqrt{10}\ ,\ (1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\ \text{și}\ (-1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{5}{4}}.$$

Notă. 1°. D-l P. P. DRĂGHICESCU a rezolvat problema foarte bine și concis calculând, pentru aplicațiunile numerice, rădăcinile reale cu 5 zecimale exacte. Astfel pentru $\lambda = -1$, d-sa a găsit.

$x_1 = -3{,}57432$; $x_2 = -0{,}27977$; $x_3 = -0{,}40898$; $x_4 = 1$; $x_5 = 2{,}44525$.

2°. D-nii FL. D. CĂRUNTU, GH. T. PUCHIU (Liceul Militar Iași), deși au rezolvat bine problema, nu au dat valorile numerice la ecuația (3).

3°. D-l A. GH. ANDREI (Liceul Militar, Iași) a dat soluția exactă numai pentru cazul general și $\lambda = -1$.

4°. Am compus problema, ca urmare a observației 4° dela pag. 99, Vol. XLV, dela finele soluției problemei 4708. Arătam în acel loc cum se rezolvă pe cale grafică discuția unor ecuații parametre. De atunci s'au mai publicat în *Gazeta Matematică* două studii interesante asupra aceleiași metode și anume: *Asupra studiului variației unei funcțiuni* de GH. TH. GHEORGHIU, la pag. 181, Vol. XLV și *Aplicații ale geometriei la discuția și separarea rădăcinilor unei ecuații* de N. ABRAMESCU, la pag. 395 Vol. XLVIII.

Reiau deci metoda pe care am dat-o la pag. 99, Vol. XLV.

Este vorba de rezolvat și discutat ecuația

$$x^5 - 10x^3 + 10x^2 + \lambda = 0.$$

Rădăcinile ecuației sunt abscisele punctelor de intersecție ale curbei

$$y = x^5 - 10x^3 + 10x^2 \qquad (1)$$

cu dreapta

$$y = \lambda \qquad (2).$$

Se găsește ușor din (1) că y se anulează pentru

$x_1 = -3{,}58\ldots$; $x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = 1{,}16\ldots$; $x_5 = 2{,}42\ldots$

Derivând pe (1) avem

$$y' = 5x^4 - 30x^2 + 20x = 5x\,(x-2)\,(x^2 + 2x - 2)$$

care se anulează pentru

$$x_6 = -2{,}73\ldots \ ; \ x_7 = 0 \ ; \ x_8 = 0{,}73\ldots \ ; \ x_9 = 2$$

Derivata a doua $y'' = 20x^3 - 60x + 20 = 20\,(x^3 - 3x + 1)$

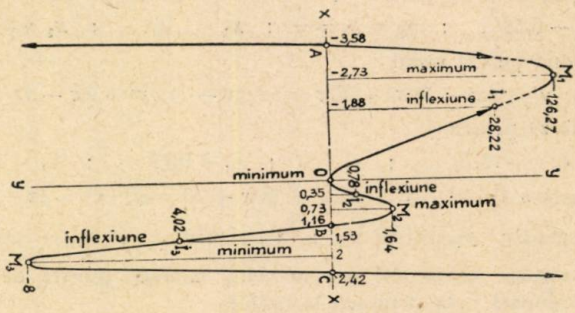
se anulează pentru $y_{10} = 1{,}88\ldots$; $x_{11} = 0{,}35\ldots$; $x_{12} = 1{,}53\ldots$

Prin urmare curba (1) are maxime, minime, puncte de inflexiune, puncte de ordonată nulă și puncte la infinit.

Ducând pe x_i ($i = 6, 7, \ldots 12$) în (1) se găsesc valorile corespunzătoare ale lui y. Cu valorile găsite se construiește următorul tabel al variației lui y.

x	y'	y''	y și natura punctelor particulare de pe figură
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	+	—	Crește
—3,58...	+	—	0 Punctul A
	+	—	Crește
—2,73...	0	—	126,27... Punctul M_1. *Maxim*
	—	—	Scade
—1,88...	—	0	28,22... Punctul I_1. *Inflexiune*
	—	+	Scade
0	0	+	0 Punctul 0. Punct dublu. *Minim*
	+	+	Crește
0,35...	+	0	0,78... Punctul I_2. *Inflexiune.*
	+	—	Crește
0,73...	0	—	1,64... Punctul M_2. *Maxim*
	—	—	Scade
1,16...	—	—	0 Punctul B.
	—	—	Scade
1,53...	—	0	4,02... Punctul I_3. *Inflexiune*
	—	+	Scade
2	0	+	— 8. Punctul M_3. *Minim*
	+	+	Crește
2,42...	+	+	0 Punctul C.
			Crește
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Cu elementele acestui tabel se găsesc uşor ecuaţiile tangentelor în punctele de inflexiune I_1, I_2, I_3 şi se construeşte curba (1) aşa cum este în figură. Intersecţia acestei curbe cu ori care din dreptele (2) dau numărul şi valoarea rădăcinilor ecuaţiei propuse.



Se vede pe figură că, bună oară dacă $126{,}27 < \lambda$ sau $\lambda < -8$ ecuaţia nu are decât o rădăcină reală. Dacă $0 < \lambda < 1{,}64\ldots$ ecuaţia are toate rădăcinile reale, etc.

5º. Foarte bună soluţie grafică dela D-l GH. D. VASILIU (Lic. Militar, Iaşi). Soluţii bune: EUGEN CARAMALĂU (Lic. Traian, T.-Severin); S. LT. C. PANTELIMON.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5811. *Două fire* AB *şi* CD *inextensibile, de greutate neglijabilă, de lungime* l *sunt fixate de capetele superioare* A *şi* C *de două inele situate pe aceeaşi orizontală la distanţa* a, *iar în capetele inferioare* B *şi* D *prind o bară* BD *orizontală de lungime* b *şi greutate* P.

O placă patrată EFGH, *de latură* a *şi greutate* Q *poate luneca cu muchiile verticale* EH *şi* FG *în lungul firelor.*

Să se determine lungimea l *astfel încât lăsând placa să cadă liber din poziţia când muchia orizontală superioară* EF *este în* AC, *să ajungă cu muchea orizontală inferioară* GH *peste bara* BD, *fără ca să lovească această bară.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de D-l EMIL MODÂLCĂ (elev al Şcoalei Politehnice din Bucureşti).

Vom aplica *teorema energiei cinetice.* Observând că sistemul celor două corpuri, *bară* şi *placă* pleacă din repaos şi la sfârşit

se opresc fără să se lovească, rezultă că energia cinetică *inițială* cât și energia cinetică *finală* sunt nule.

Conform *teoremei energiei cinetice*, trebuieşte în acest caz ca lucrul mecanic total să fie nul.

Lucrul mecanic al plăcii este însă egal cu *greutatea sa înmulțită cu diferența de nivel* și este un lucru mecanic *motor*, întru cât placa se coboară.

Avem:

$$L_p = Q\left[\left(l - \frac{b}{2}\right) - \frac{a}{2}\right] = Q\left(l - \frac{b+a}{2}\right).$$

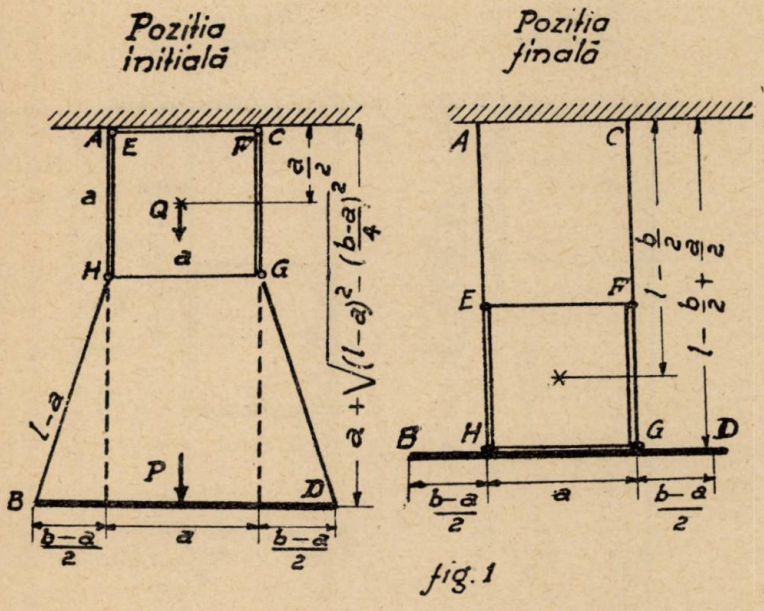


fig. 1

Pentru bară, lucrul mecanic este *rezistent* întru cât bara se urcă.

Obținem analog:

$$L_B = -P\left[\left(a + \sqrt{(l-a)^2 - \frac{(b-a)^2}{4}}\right) - \left(l - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)\right].$$

Deci:

$$L_B = -P\left[\sqrt{(l-a)^2 - \frac{(b-a)^2}{4}} - l + \frac{b+a}{2}\right].$$

Conform *teoremei energiei cinetice:*

$$L_P + L_B = 0.$$

Adică:

$$Q\left(l - \frac{b+a}{2}\right) = P\left(\sqrt{(l-a)^2 - \frac{(b-a)^2}{4}} - l + \frac{b+a}{2}\right).$$

De unde:

$$(P+Q)^2\left(l - \frac{b+a}{2}\right)^2 = P^2\left(l - \frac{b+a}{2}\right)\left(l + \frac{b-3a}{2}\right).$$

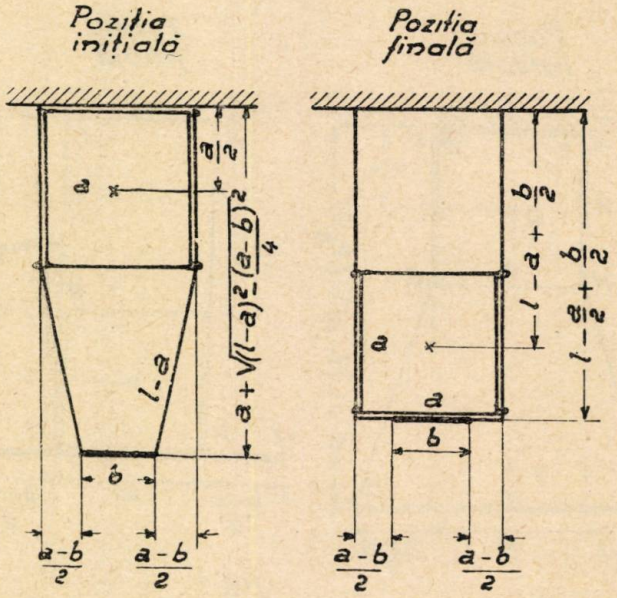


fig. 2

Din rezolvarea acestei ecuații, obținem *soluția banală* evidentă:

$$l = \frac{b+a}{2}$$

și soluția cerută:

$$l = \frac{a+b}{2} + (b-a)\frac{P^2}{(P+Q)^2 - P^2}$$

In cele de mai sus s'a presupus $b > a$.

In cazul $b < a$, problema se rezolvă absolut identic şi se obţine:

$$L_P = Q\left[\left(l - a + \frac{b}{2}\right) - \frac{a}{2}\right] = Q\left(l - \frac{3a-b}{2}\right)$$

$$L_B = -P\left[\left(a + \sqrt{(l-a)^2 - \frac{(a-b)^2}{4}}\right) - \left(l - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\right]$$

$$L_B = -P\left[\sqrt{(l-a)^2 - \frac{(a-b)^2}{4}} - l + \frac{3a-b}{2}\right].$$

Din ecuaţia analoagă:

$$L_P + L_B = 0$$

rezultă soluţia banală:

$$l = \frac{3a-b}{2}$$

şi soluţia:

$$l = \frac{3a-b}{2} + (a-b)\frac{P^2}{(P+Q)^2 - P^2}$$

La această problemă s'a primit o *foarte bună* soluţie dela D-l DAN S. ŞTEFĂNESCU (elev Politechnica din Bucureşti).

D-sa ajunge la aceleaşi rezultate pe o altă cale şi anume prin aplicarea *principiului echilibrului dinamic* (principiul lui D'ALEMBERT) fiecărui din cele două corpuri.

S'a mai primit o soluţie bună dela Domnul EUGEN CARAMALĂU (Lic. Traian, Turnu-Severin).

AL. ST.

PROBLEMA 5812. *Un vas de tablă are forma unui paralelipiped dreptunghic şi e plin cu apă. Se înclină vasul spre a se scurge apa. Care este minimum de înclinare la care începe să se vază fundul vasului?*

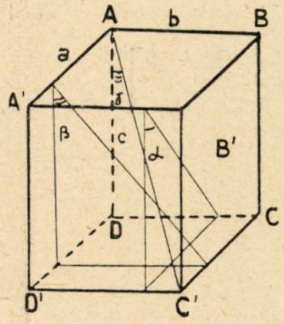
I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Poiana Ţapului).

Fie ABCDA'B'C'D' vasul paralelipipedic, CDD'C' fiind baza lui, iar $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$.

1. Inclinăm vasul, muchia C'D' rămânând pe pământ. Fundul vasului începe să se vază când planul A'B'CD a ajuns orizontal. Aşa dar unghiul minim de înclinare la care începe să se vază fundul vasului este

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{c}.$$



Rezultatul este acelaşi dacă înclinăm vasul pe muchia CD egală cu C'D'.

2. Inclinăm vasul după muchia CC' sau DD'.

Se vede imediat că unghiul minim de înclinare la care începe să se vază fundul vasului este

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{b}{c}.$$

3. In fine, dacă înclinăm vasul lăsând fix numai unul din punctele C, C', D, D', unghiul de înclinare minim la care începe să se vază fundul este

$$\gamma = \operatorname{arctg} \sqrt{b^2 + a^2}/c.$$

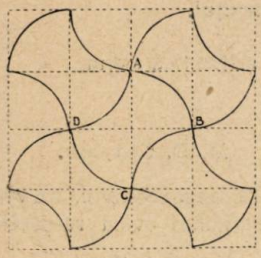
Au dat soluţii bune şi D-nii: A. H. CUBAT (Politechnica, Bucureşti), G. M. NICOLAE (Colegiul Naţional, Craiova), OCTAV C. GHEORGHIU (Bacalaureat).

PROBLEMA 5837. *Pentru pardosirea camerelor se întrebuinţează nişte pavele mici de ciment cu feţele paralele, limitate la două laturi opuse cu cilindre convexe egale şi la alte două laturi opuse cu cilindre concave egale, care se pot alipi de celelalte aşa ca să acopere planul complect. Rosturile acestor pavele, numite pişcoturi, sunt racordate la întâlnirea lor. Să se determine feţele lor laterale. Cilindrele sunt circulare.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: M. BÂRZESCU (Liceul militar, Iaşi), M. C. MIRCEA şi RADU P. VOINEA (Studenţi-Ingineri, Bucureşti).

Planul este împărţit ca în figură. Fie AB şi CB două arce convexe şi BC şi AD celelalte două arce opuse concave. Din cauză că aceste pişcoturi trebue să acopere planul, rezultă că cele patru arce circulare de mai sus sunt egale şi au acelaşi unghiu la centru. Intr'un punct B se întâlnesc rosturile racordându-se şi pavelele fiind egale rezultă că în B sunt 4 pavele.



Prin urmare un pişcot este înscris într'un patrat cu latura a. Arcele ABCD au razele $\frac{1}{2}a$ şi centrul în vârful patratului, iar celelalte două arce BC şi AB au raza $\frac{1}{2}a$ însă centrele lor în alte două vârfuri opuse ale patratului.

EXERCIŢII

19. Să se găsească numărul de 4 cifre $abcd$ şi cifrele e, f, g ştiind că

$$abcd = eb \times fg \quad ; \quad a+b+c+d = ag;$$

$$e+b+f+g = aa+ad = ec \quad ; \quad a \times b \times c \times d = e \times b \times f;$$

$$\frac{b}{d} = \frac{f}{e} = \frac{d}{a} = \frac{a+5}{c} = 3.$$

Cpt. E. St. Iacob.

R. Din ultimele rapoarte se scoate

d	1	2	3
b	3	6	9

cu $a \times b = d^2$ numai pentru

$$a = 1 \quad , \quad b = 9 \quad , \quad d = 3.$$

Ducând în celelalte relaţii se găseşte

$$abcd = 1943 \text{ iar } e = 2 \quad ; \quad f = 6.$$

20. Patratele numerelor de forma $5 \times (2n+1)$ se termină cu 025, 225 sau 625.

C. I. Staicu.

R. Avem

$$N^2 = 5^2 \times (2n+1)^2 = 100 \times n\,(n+1) + 25.$$

Se vede că cifra miilor lui N^2 este tot una cu cifra unităţilor produsului $n(n+1)$.

Ori se găseşte uşor, prin verificare, că produsul a 2 cifre consecutive nu se termină decât cu 0,2 sau 6, ceea ce verifică enunţul.

21. Intr'un triunghiu cu laturile în progresie aritmetică avem

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=3.$$

M. D. COTARIU.

R. In exerciţiul 12, pag. 236 şi în exerciţiul 19, pag. 380, Vol. XLVIII *Gazeta Matematică*, s'a arătat că în astfel de triunghiuri avem respectiv

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{B}{2} \quad \text{şi} \quad 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}.$$

Impărţind membru cu membru aceste egalităţi se găseşte egalitatea din enunţul exerciţiului de faţă.

22. Să se demonstreze relaţia

$$\sum\frac{h_a+h_b}{h_a h_b}\left(h_a^2+h_b^2-h_c^2\right)=\frac{ab+bc+ca}{R}.$$

A. H. CUBAT.

R. Se verifică cu ajutorul identităţii

$$2\sum a=\sum\frac{a+b}{ab}\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

şi ţinând seamă de

$$h_a=bc\frac{\sin A}{a}=\frac{bc}{2R}$$

23. Să se demonstreze identitatea:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha+\cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\delta \\ \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta+\cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma & \cos\beta\cos\delta \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \sin\gamma+\cos^2\gamma & \cos\gamma\cos\delta \\ \cos\alpha\cos\delta & \cos\beta\cos\delta & \cos\gamma\cos\delta & \sin\delta+\cos^2\delta \end{vmatrix} =$$

$$=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\,(1+\sum\cos\alpha\operatorname{cotg}\alpha).$$

TUDOR STOICESCU.

R. Dacă notăm determinantul dat cu Δ, desvoltarea lui conduce la:

$$\Delta=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta+\cos^2\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta+\cos^2\beta\sin\alpha\sin\gamma\sin\delta+$$
$$+\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin\delta+\cos^2\delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

care prin darea în factor pe $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$ şi înlocuirea

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{cotg}\alpha$$

conduce la membrul al doilea de demonstrat.

Dacă în acest determinant se înlocuesc *cosinusurile* prin *sinusuri* şi *sinusurile* prin *cosinusuri* se găseşte relaţia:

$$\Delta_1 = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta\,(1 + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha + \sin\beta\,\mathrm{tg}\beta + \sin\gamma\,\mathrm{tg}\gamma + \sin\delta\,\mathrm{tg}\delta).$$

24. Să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt razele cercurilor exînscrise unui triunghiu şi ai cărei coeficienţi sunt exprimaţi în funcţie de laturile acelui triunghiu.

A. H. CUBAT.

R. Se ştie că

$$\sum r_a = 4R + r \quad ; \quad \sum r_a r_b = p^2 \quad ; \quad r_a r_b r_c = p^2 r$$

$$4RS = abc \quad \text{şi} \quad S = pr.$$

Cu aceste elemente, ecuaţia cerută este

$$pSx^3 - (pabc + S^2)\,x^2 + Sp^2x - S^2p^2 = 0$$

unde

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \quad \text{şi} \quad 2p = a + b + c.$$

25. Se dă cercul O, diametrul PP_1 (punctul P la dreapta lui O) şi coarda P_1P_2 făcând unghiul φ cu diametrul P_1P. Din P_2 se duce paralela P_2P_3 la P_1P, din P_3 se duce paralela P_3P_4 la P_1P_2 şi aşa mai departe. Notând $R_1, R_2\ldots$ punctele de intersecţie ale perpendicularei din O pe coarda P_1P_2 cu corzile P_1P_2, $P_2P_3, \ldots$; $S_1, S_2\ldots$ punctele de intersecţie ale diametrului perpendicular pe diametrul dat, cu corzile de mai sus; $P_2', P_3\ldots$ proiecţiile punctelor $P_2, P_3\ldots$ pe P_1P, P_1P_2, $P_2P_3\ldots$; se cere să se calculeze sumele:

$$S' = P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots$$

$$S'' = OR_1 + OS_2 + OR_3 + OS_4 + \ldots$$

$$S''' = \text{aria } P_1P_2P' + \text{aria } P_2P_3P_3' + \ldots$$

Aplicaţie pentru cazul când $\varphi = 30^0$.

A. H. CUBAT.

R. Din triunghiurile dreptunghice

$$PP_2P_1,\ OP_2S_2,\ OP_3R_3, \ldots$$

avem respectiv

$$P_1P_2 = 2r\cos\varphi \quad , \quad P_2P_3 = 2r\cos 2\varphi \quad , \quad P_3P_4 = 2r\cos 3\varphi, \ldots$$

De asemenea

$$OR_1 = r\sin\varphi \quad , \quad OS_2 = r\sin 2\varphi \quad , \quad OR_3 = r\sin 3\varphi, \ldots;$$

iar pentru arii

$$P_1P_2P_2' = r^2\sin 2\varphi\cos^2\varphi \quad , \quad P_2P_3P_3 = r^2\sin 2\varphi\cos^2 2\varphi,$$

$$P_3P_4P' = r^2\sin 2\varphi\cos^2 3\varphi, \ldots$$

Trecând la însumări se obţine:

$$S' = 2r(\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots) = 2r\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\left[\varphi + (n-1)\frac{\varphi}{2}\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$S'' = r(\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots) = r\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\left[\varphi + (n-1)\frac{\varphi}{2}\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$S''' = r^2 \sin 2\varphi(\cos^2\varphi + \cos^2 2\varphi + \cos^2 3\varphi + \ldots) =$$

$$= r^2 \sin 2\varphi\left\{\frac{\sin n\varphi\cos[2\varphi + (n-1)\varphi]}{2\sin\varphi} + \frac{n}{2}\right\}.$$

Pentru cazul $\varphi = 30^0$ avem:

$$S' = r(1+\sqrt{3}) \quad , \quad S'' = \tfrac{1}{2}r(1+\sqrt{3}) \quad \text{şi} \quad S''' = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot r^2.$$

PROBLEME PROPUSE

5920. Să se găsească două numere, unul îndoitul celuilalt, astfel ca la ele să se întrebuinţeze pentru scriere toate cifrele o singură dată fiecare.

I. IONESCU.

5921. Care sunt ultimele 9 cifre dela dreapta unui număr al cărui patrat se termină cu 987654321 ?

I. V. MĂTIEŞ.

5922. Dacă $s(i)$ reprezintă suma divizorilor numărului i, atunci avem

$$s(n!) < (n+1)\cdot s[(n-1)!].$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

5923. Să se stabilească relaţiile

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & (r_a + r_1)(r_a + r_2)\ldots(r_a + r_s) = \text{Mult. } p+2 \\ (II) & (n_a + n_1)(n_a + n_2)\ldots(n_a + n_s) = \text{Mult. } p-2\end{array}\right\} s \text{ impar}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(III) & (r_a + n_1)(r_a + n_2)\ldots(r_a + n_s) = \text{Mult. } p+2 \\ (IV) & (n_a + r_1)(n_a + r_2)\ldots(n_a + r_s) = \text{Mult. } p-2\end{array}\right\} s \text{ par,}$$

unde $r_1, r_2, \ldots, r_s$ sunt reziduurile patratice şi $n_1, n_2, \ldots, n_s$ nonreziduurile patratice ale numărului prim $p = 2s + 1$.

(In cazul particular $r_a = 1$, relaţiile (I) şi (III) au fost stabilite de STIELTJES în *Mathesis 1910*, după cum arată D-l KRAITCHIK în *Recherches sur la théorie des nombres*, vol. I. Problema de faţă generalizează teoremele stabilite acolo).

IOAN B. FLORESCU.

5924. Să se demonstreze, că funcţia

$$f(x, y, z) \equiv \frac{(a^2 - yz)\sqrt{a^2 + x^2} + x\sqrt{(a^2 + y^2)(a^2 + z^2)}}{(y + z)\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{(a^2 + y^2)(a^2 + z^2)}}$$

este simetrică în raport cu variabilele sale.

GH. D. SIMIONESCU.

5925. Să se discute rădăcinile ecuaţiei

$$[(a^2 + c^2 + 1)x^2 + 2(ab + cd)x + b^2 + d^2]$$
$$[(a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)x + b^2 + d^2]^2 =$$
$$= [(Aa^2 + Bb^2)x^2 + 2(Aab + Bcd)x + Ab^2 + Bd^2]^2,$$

unde a, b, c, d, A, B sunt constante date, A şi B fiind pozitive.

M. GHERMĂNESCU.

5926. Să se arate, că

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ 4 & 3\alpha + \beta & 2\alpha^2 + 2\alpha\beta & \alpha^3 + 3\alpha^2\beta & 4\alpha^3\beta \\ 6 & 3\alpha + 3\beta & \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 & 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 & 6\alpha^2\beta^2 \\ 4 & \alpha + 3\beta & 2\alpha\beta + 2\beta^2 & 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & 4\alpha\beta^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)^{10}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

5927. Studiind natura rădăcinilor unei ecuaţii algebrice

$$f(z) = 0 \qquad (1)$$

cu ajutorul teoremei lui ROLLE, după aşezarea în plan a punctului $P(x, y)$, se obţin curbele separatoare

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0 \text{ (C)}; \quad x^2 + \lambda y^2 - 1 = 0 \text{ (E)}; \quad x^2 - \lambda y^2 - 1 = 0 \text{ (H)},$$

în care λ este un parametru real. Se cere:

1°. Să se determine ecuaţia (1) de gradul cel mai mic, ştiind că prima sa derivată admite o rădăcină identic nulă.

2°. Să se arate, că există totdeauna trei ecuaţii care răspund problemei.

3°. Să se studieze natura rădăcinilor acestor ecuaţii pentru o valoare dată a parametrului λ.

4°. Parametrul λ variind să se studieze variaţia naturii rădăcinilor ecuaţiilor (1). Cazuri particulare importante.

5°. Să se compare rezultatele determinându-se regiunile din plan, pentru care cele trei ecuaţii (1) sau numai două, au rădăcinile de aceeaşi natură. Cazuri particulare interesante.

G. G. CONSTANTINESCU.

5928. Pe o dreaptă dată Δ se consideră punctele fixe A, B şi punctul mobil C. Fie MN tangenta comună exterioară la cercurile (O_1) şi (O_2) de diametre AB şi BC, punctul M fiind pe primul cerc. Tangenta în C la (O_2) se taie cu O_2N în P.

Să se determine poziţia punctului C în următoarele condiţii:

1°. O_1P să treacă prin mijlocul lui MN.

2°. A, M, P să fie colineare.

Aceste condiţii pot fi împlinite simultan?

G-L GH. BUICLIU.

5929. In triunghiul ABC cu înălţimile AA', BB', CC' şi ortocentrul H, se consideră mijloacele E_a, E_b, E_c ale razelor OA, OB, OC (O centrul cercului ABC) şi simetricele acestora E'_a, E'_b, E' faţă de centrul cercului lui EULER (E).

1°. Cercurile cu centrele E_a, E_b, E_c şi razele $\overline{E_a A'}$, $\overline{E_b B'}$, $\overline{E_c C'}$ taie laturile triunghiului A'B'C' în punctele K, L, M, N, P, Q, astfel că:

a) Dreptele KL, MN, PQ sunt perpendiculare pe EA, EB, EC.

b) aria KNQ = aria LMP $= \dfrac{4S}{\cos A \cos B \cos C}\left(\dfrac{1}{R^2}\sum \dfrac{ab}{\cos C} - 1\right)$.

2°. Cercurile cu centrele E'_a, E'_b, E'_c şi razele $\overline{E'_a A'}$, $\overline{E'_b B'}$, $\overline{E'_c C'}$ sunt egale şi taie laturile triunghiului A'B'C' în punctele K', L', M', N', P', Q' astfel că:

a) Dreptele K'L', M'N', P'Q' sunt paralele.

b) Aria K'N'Q' + aria L'M'P' = 4 S cosA cosB cosC.

3°. Cercurile (O) şi (E_a); (O) şi (E_b); (O) şi (E_c) se întretaie pe B'C', C'A', A'B'.

4°. Cercurile (E_a), (E_b), (E_c), (E'_a), (E'_b), (E'_c) au acelaşi centru radical.

S-LT. M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

5930. Să se demonstreze identitatea

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\cos(2a+b)\cos(2b+c)\cos(2c+a) - \cos(2a+c)\cos(2b+a)\cos(2c+b)}{\sin(2a+c)\sin(2b+c)\sin(2c+b) - \sin(2a+b)\sin(2b+c)\sin(2c+a)}$$

a, b, c fiind arce oarecare.

MIRCEA ADAM.

5931. M fiind un punct pe curba (C), iar O, un punct arbitrar din planul acelei curbe, se notează cu N punctul comun normalei în M, la (C) cu perpendiculara în O, pe dreapta OM. Paralela cu o direcţie arbitrară (δ) dusă prin N, întâlneşte dreapta OM în punctul P.

Se cere: 1°. Să se determine curba (C) astfel ca segmentul PM să aibă o lungime l, dată.

2°. Să se arate, că proiecţia segmentului OP, pe direcţia (δ), are aceeaşi lungime pentru toate punctele unei curbe (C).

3°. Să se arate, că simetricul Q, al punctului M, în raport cu P se găseşte pe aceeaşi curbă (C), iar normala în Q, trece de asemeni prin N.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5932. Să se calculeze integrala $I = \int x \left(\frac{x}{a-x}\right)^n dx$

și să se deducă suma $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{a-x}\right)^k}{(n+k)(n+k+1)(n+k+2)}$.

ION S. ANTONIU.

5933. Pe o stradă merg în aceiași direcție pe aceiași linie două tramvaie cu o viteză de 21,6 km/oră.

Lungimea tramvaielor este 8 m, iar lățimea 2 m.

Distanța între cele două tramvaie este de 7 m.

O mașină urmează un drum paralel cu linia tramvaielor având o viteză de 28,8 km/oră. Lungimea mașinei este 4 m, iar lățimea 2 m. Distanța între centrul mașinei și mijlocul liniei tramvaielor este 10 m, iar distanța între centrul primului tramvai și centrul mașinei proiectată pe linia tramvaiului este de 30 m. Raza de giratie a mașinei 4 m. Mașina păstrând viteza constantă și același drum va putea trece printre cele două tramvaie numai printr'o întoarcere de 90°?

CPT. C. V. COSTĂCHESCU.

5934. Două corpuri de greutăți P și Q sunt așezate respectiv pe două plane AB și AC înclinate cu unghiurile α și β pe planul orizontal BC. Cele două corpuri sunt legate printr'un fir paralel cu linia de cea mai mare pantă a planelor respective și trece peste un mic scripete de greutate neglijabilă situat în vârful A. Când *sistemul de plane* ABC *se află în repaus*, corpurile date *nu sunt în echilibru.* Să se determine *accelerația orizontală* cu care trebuește *deplasat* sistemul ABC, pentru ca acele două corpuri să *rămână în repaus* pe planele corespunzătoare.

Frecările și rezistența aerului se vor neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ 1°. La numărătorul formulei, care precede formula (2) dela pag. 221, se înlocuește semnul + prin semnul ×.

2°. La pag. 310, XLIX, înainte de „pentru $u = a$" se va adăoga „Dacă $a = 1$", și în loc de $v = \frac{1}{\alpha}$, se va scrie $v = 1 - \frac{1}{\alpha}$.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbu A. I. (4053, 5862, 69, 77, 906, 07, 09, 16); *Cantuniar Cr.* (5536, 842, 94, 98); *Caramalău E.* (5778); *Columbeanu D. P.* (5871, 79, 80, 907); *Constantinescu N. I.* (5907); *Constantinescu R. Mihai* (5840, 56, 70, 71, 77, 98, 907, 09, E, P); *Cotariu D. M.* (5871, 96, 907, E); *Damian V. Şt.* (5865); *Dimitriu D. Tigran* (5840, 48, 64, 71); *Drăghicescu P. P.* (4184, 234, 45, 520, 25, 58, 5911, 12, 16); *Florescu B. I.* (P); *George M. Nicolae* (5849, 79, 98); *Gheorghe A. Grigore* (5102, 862, 70, 77, 906, 09); *Guţu C.* (5898); *Heytmanek C.* Cpt. (IV); *Ieşan Al.* (5536); *Iliescu C. C.* (5877, 91); *Ionescu I. Andrei* (5879); *Ionescu F. P.* (4102, 5730, 65, 907, 09); *Jurist Gh. Vlad* (5547, 778, 91, 98, 886); *Leon A. M.* (5849, 71); *Manolache C. M.* (5830, 77, 88); *Manoliu Sp. M.* (5854, 65, 94, 98); *Marinescu Marinel* (5871, 80, 98, 916); *Marinescu C. Stelian* (5870, 71, 96, 98); *Mihăilescu I. Şt.* (5842); *Mustăcescu V. Tr.* (5894, 96); *Pălacianu D. V.* (5453); *Pătrăscioiu I. Mircea* (4022, 102, 894, 5852, 70, 75, 98, P); *Popescu M. Stelian* (5870, 71, 96); *Postelnicu P.* (N); *Prisecaru M.* (5871, 96, 98); *Rogoz V. I.* (5649, 801, 96, 907, 08); *Scumpia A. M.* (5890); *Silişteanu D. D.* (5896); *Staicu I. C.* (5841, 64, 71, 86, 96, 98, 907); *Teodorescu St. I.* (5656, 95, 774, 815, P); *Ţincu I. C.* (5740, 907, 09); *Văduva F. M.* (5669, 849, 905, 07, 09, 17, 19); *Vrânceanu Gh. Gh.* (3713, 913, 4277, 81, 362, 5453, 877, 78, 91, 907, 08); *Wegener N. E.* (5662, 898).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. ***Foile vor avea format de sfert de coală,*** iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ"

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 22.858

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ ACADEMIA REPUBLICII

SUMARUL

1. Formule pentru calculul suprafeţelor laterale ale solidelor rezultate din tăierea unui con circular drept cu un plan . *Ing. O. S. Ianculescu.*
2. Asupra unei clase de identităţi algebrice. *N. T. Donciu.*
3. Generalizarea cubicei lui Darboux . . . *Ioan A. Ilie.*
4. Asupra unor asocieri de linii şi suprafeţe. *C. Ionescu-Bujor.*
5. Concursul „Gazetei Matematice" . . . *Delegaţia Societăţii.*
6. Premiul „Inginer Alexandru Roşu" . . *Comisiunea pentru premii.*
7. **Note matematice:** 31 — 35.
8. Chestiuni de examen.
9. **Bibliografie.**
10. **Cereri:** 329.
11. **Diverse.**
12. **Probleme rezolvate:** 3546, 4070, 4693, 5288, 5532, 5546, 5552, 5611, 5637, 5711, 5723, 5726, 5833.
13. **Exerciţii:** 26—29.
14. **Probleme propuse:** 5935 — 5949.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*“, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **9**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:
Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică“. Lei 60,
A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

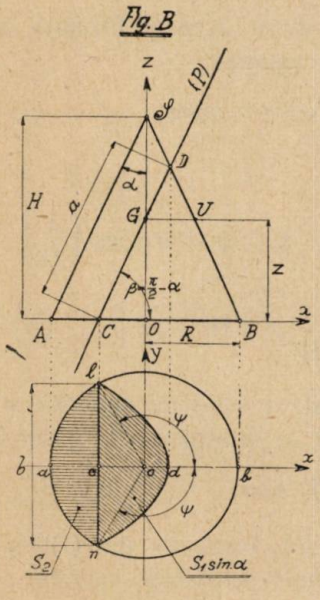
FORMULE PENTRU CALCULUL SUPRAFEȚELOR LATERALE ALE SOLIDELOR REZULTATE DIN TĂIEREA UNUI CON CIRCULAR DREPT CU UN PLAN

(Urmare dela pag. 396)

Cazul B. $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$. Intersecția planului (P) cu conul SAB este o parabolă, căci planul (P) este paralel cu generatoarea SA a conului. Notăm cu S_1 suprafața acestei parabole având înălțimea a și baza b. După cele ce știm, această suprafață este dată de formula:

$$S_1 = \frac{2}{3} \times a \times b.$$

Rămâne să stabilim formulele care ne dau pe a, b în funcție de datele conului: H, R și z. Ne referim la (Fig. B). Din asemănarea triunghiurilor SAB și DCB, avem:



$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$$

unde

$\overline{CB} = \overline{CO} + \overline{BO}$ iar $\overline{CO} = \overline{GO} \times \operatorname{tg}\alpha$.

Cu notațiile noastre, avem:

$\overline{AB} = 2R$; $\overline{AS} = \sqrt{H^2 + R^2}$;

$\overline{CD} = a$; $\overline{BO} = R$; $\overline{GO} = z$.

Deci: $\frac{\sqrt{H^2 + R^2}}{2R} = \frac{a}{R + z \times \operatorname{tg}\alpha}$.

Introducând aci, pe $\operatorname{tg}\alpha = R/H$, găsim:

$$a = \frac{H + z}{2H} \times \sqrt{H^2 + R^2}.$$

De altă parte din triunghiurile dreptunghice *ocl* și OCG, avem:

$\overline{ln} = 2\overline{cl} = 2\sqrt{\overline{lo}^2 - \overline{co}^2}$ unde $\overline{co} = \overline{CO} = \overline{GO} \times \operatorname{tg}\alpha$.

Cu notaţiile noastre avem:

$$\overline{ln} = b \quad ; \quad \overline{lo} = R \quad ; \quad \overline{GO} = z.$$

Deci: $b = 2\sqrt{R^2 - z^2} \times tg^2\alpha$.

Ducând aci, pe $tg\alpha = R/H$, găsim:

$$b = 2 \times \frac{R}{H} \times \sqrt{H^2 - z^2}.$$

Introducând pe a şi b cu valorile lor în expresia lui S_1, obţinem suprafaţa secţiunii CD în mărime şi semn:

$$S_1 = \frac{2}{3} \times \frac{R}{H^2} \times (H + z) \times \sqrt{(H^2 + R^2)(H^2 - z^2)}. \qquad (I)'''$$

Notăm cu S_2 suprafaţa secţiunii AC care este un segment de cerc în proiecţie ($\overset{\frown}{lan}$) cu raza R şi cu unghiul la centru $\overset{\frown}{lon} = 2(\pi - \psi)$. rad. şi observăm că avem aceeaşi formulă a suprafeţei ca şi în cazul A, subcazul *a)*, anume:

$$S_2 = R^2 \times (\pi - \psi) + R^2 \times \sin\psi \times \cos\psi.$$

Unde, dacă înlocuim

$$\cos\psi = -\frac{z}{H} \quad ; \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{H^2 - z^2}}{H} \quad ; \quad \pi - \psi = \arccos\left(\frac{z}{H}\right)$$

avem $$S_2 = R^2\left[\arccos\left(\frac{z}{H}\right) - \frac{z}{H^2} \times \sqrt{H^2 - z^2}\right]. \qquad (II)'''$$

Notăm cu S_3 suprafaţa laterală ASD a solidului superior şi urmând acelaşi raţionament ca în cazul A, subcazul *a)*, găsim:

$$S_3 = (S_2 + S_1 \times \sin\alpha) : \sin\alpha.$$

Inlocuind pe S_1 şi S_2 cu valorile lor, respectiv din $(I)'''$ şi $(II)'''$ în expresia lui S_3, obţinem formula suprafeţei laterale a solidului superior în mărime şi semn:

$$S_3 = R\sqrt{H^2 + R^2}\left[\arccos\left(\frac{z}{H}\right) + \frac{2H - z}{3H^2} \times \sqrt{H^2 - z^2}\right] \quad III'''$$

Observaţiuni. Formulele suprafeţelor S_1, S_2 şi S_3 din cazul B se pot obţine şi direct din formulele suprafeţelor respectiv S_1, S_2, S_3 din cazul A, subcazul *a)*, făcând pe β să tindă către $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Acest calcul constitue un exerciţiu frumos de algebră.

In adevăr expresia suprafeţei S_1 se poate pune sub forma:

$$S_1 = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}.$$

Pentru $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, găsim $S_1 = \frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui HOSPITAL şi notând tot cu S_1 această limită, avem:

$$S_1 = \lim_{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \lim_{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)}.$$

Urmează să calculăm pe $f'(\beta)$ şi $g'(\beta)$ etc.

Cazul C. $\frac{\pi}{2} - \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Intersecţia planului (P) cu conul SAB va fi evident o iperbolă. Acest caz principal se împarte în trei cazuri secundare, după cum:

a) $0 < z < H$; *b)* $H < z$; *c)* $z < 0$.

Subcazul a): $0 < z < H$. Notăm cu S_1 suprafaţa segmentului cu semi-axa reală a şi semi-axa imaginară b unde $a > b$[1]). Ne propunem să stabilim mai întâi formula generală a suprafeţei segmentului de iperbolă şi apoi să calculăm mărimea acestei suprafeţe pentru cazul nostru. Repetăm raţionamentul dela cazul A, subcazul *a)* pentru ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

şi avem succesiv:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

---

1) Această condiţie nu este neapărat necesară, deoarece:

Conul SAB poate fi cu unghiul la vârf ascuţit când $90^0 > 2\alpha > 0$.
" " " " " " " " drept " $2\alpha = 90^0$.
" " " " " " " " obtus " $180^0 > 2\alpha > 90^0$.

Am putea avea deci inafară de condiţia $a > b$ şi $a = b$ sau $a < b$.

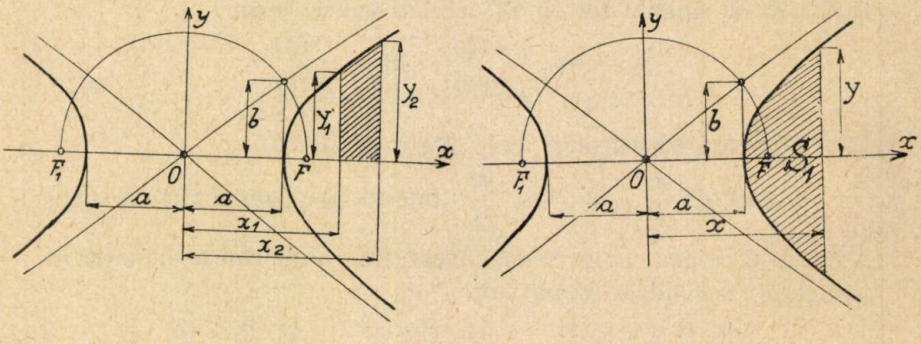
Unde

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2} \times \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \times \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C \text{ [1)]}.$$

Deci:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2} \times \frac{a}{b} \times \left[x \times y - ab \log\left(x + \frac{a}{b} \times y\right)\right] + C$$

căci $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (Rădăcina negativă nu interesează).



Introducând în expresia lui S şi luând limitele, găsim:

$$S = \frac{1}{2}(x_2 y_2 - x_1 y_1) - \frac{1}{2} ab \log\left(\frac{bx_2 + ay_2}{bx_1 + ay_1}\right)$$

cu condiţiile:

$$x_2 > x_1 > a > b \quad \text{şi} \quad y_2 > y_1.$$

In cazul Fig. C pag. 469 suprafaţa de evaluat este cuprinsă între ordonata y_2 arcul superior şi inferior al iperbolei.

Deci:

$$x_1 = a \;\; ; \;\; y_1 = 0 \;\; ; \;\; x_2 = x \;\; ; \;\; y_2 = y.$$

Aşa dar

$$S_1 = x \times y - a \times b \times \log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

---

1) Simbolul log. însemnând logaritm neperian.

Dacă u este un număr real, pozitiv și mai mare sau cel mult egal cu unitatea, avem relațiunea cunoscută:

$$\text{Arg}\, c.h.\, u = \log\left(u \pm \sqrt{u^2 - 1}\right) \quad (u \geqslant 1).$$

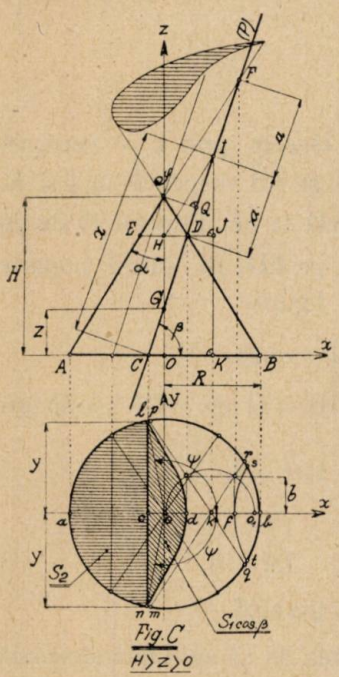
Folosind această relație, deducem pentru cazul nostru formula suprafeței segmentului de iperbolă:

$$S_1 = x \times y - a \times b \times \text{Arg}\, c.h.\left(\frac{x}{a}\right)^{1)}$$

cu condițiile:

$$x \geqslant a > b \quad ; \quad y \geqslant 0.$$

Rămâne să stabilim formulele semi-axelor a și b precum și a mărimilor x și y. Ne referim la (Fig. C).



Excentricitatea iperbolei în cazul de față se scrie:

$$\varepsilon = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad (\varepsilon > 1).$$

Dacă în triunghiul SDF ducem înălțimea $\overline{SQ} \perp$ pe baza $\overline{DF}$, obținem două triunghiuri dreptunghice anume: QDS și QFS, de unde:

$$\overline{DQ} = \overline{SQ} \times \text{tg}\,(\beta - \alpha)$$

iar

$$\overline{FQ} = \overline{SQ} \times \text{tg}\,[\pi - (\alpha + \beta)]$$

de oarece

$$\widehat{DSQ} = \hat{\beta} - \hat{\alpha}$$

iar

$$\widehat{FSQ} = \pi - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}).$$

Din triunghiul dreptunghic QSG, avem:

$$\overline{SQ} = \overline{SG} \times \cos\beta = (H - z) \times \cos\beta \quad ; \quad \widehat{QSG} = \hat{\beta}.$$

---

1) Formula generală a suprafeței S_1 scrisă sub această formă apare mai condensată ca cealaltă formulă precedentă exprimată cu logaritmul natural. Arg $c.h.u.$ = argument al cărui cosin hiperbolic este u. ($u \geqslant 1$).

Cu aceste elemente calculate, semi-axa reală a iperbolei se scrie

$$a = \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{1}{2} \times (\overline{DQ} + \overline{FQ}) = \frac{1}{2} \times \overline{SQ}\,[\mathrm{tg}\,(\beta - \alpha) - \mathrm{tg}\,(\alpha + \beta)].$$

Sau $$a = (-1)(H - z) \times \sin\alpha \times \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)\cos(\beta - \alpha)}.$$

De unde, procedând ca la cazul A, subcazul *a)*, avem semi-axa reală a iperbolei

$$a = \frac{HR\,(H - z)}{(R^2 \mathrm{tg}^2\beta - H^2)\cos\alpha}.$$

Introducând această valoare, în expresia excentricității, găsim semi-axa imaginară a iperbolei

$$b = \frac{R\,(H - z)}{\sqrt{R^2 \mathrm{tg}^2\beta - H^2}}.$$

Fie I mijlocul segmentului $\overline{DF}$. Ducem prin I o verticală până ce taie segmentele orizontale $\overline{ED}$ și $\overline{AB}$ respectiv în J și K. Apoi să ducem din I dreapta $\overline{IH}$ paralelă la $\overline{EF}$. Punctul H de pe axa de simetrie a conului se află și pe $\overline{ED}$, pe care-l împarte evident în două părți egale. Avem din figură:

$$\overline{CK} = \overline{CO} + \overline{KO} = \overline{CI} \times \cos\beta.$$

Unde: $\overline{CO} = \overline{GO} \times \mathrm{cotg}\beta$ iar $\overline{KO} = \overline{HJ} = \overline{IJ}\,\mathrm{tg}\alpha = \overline{DI} \times \sin\beta\,\mathrm{tg}\alpha$.

deoarece: $\widehat{HIJ} = \hat{\alpha}$ iar $\widehat{ICK} = \widehat{IDJ} = \hat{\beta}$.

Cu notațiile noastre, avem:

$$\overline{CI} = x \quad ; \quad \overline{GO} = z \quad ; \quad \overline{DI} = a.$$

Deci: $$x\cos\beta = z\,\mathrm{cotg}\beta + a\,\mathrm{tg}\alpha\sin\beta.$$

Unde introducând pe a cu valoarea sa și apoi ținând seamă că $\mathrm{tg}\alpha = R/H$, obținem:

$$x = \frac{H}{\sin\beta} \times \left(\frac{Hz - R^2\mathrm{tg}^2\beta}{H^2 - R^2\mathrm{tg}^2\beta}\right).$$

Din triunghiurile dreptunghice *ocl* și OCG, avem:

$$\overline{cl} = \sqrt{\overline{lo}^2 - \overline{co}^2} \quad \text{unde} \quad \overline{co} = \overline{CO} = \overline{GO} \times \mathrm{cotg}\beta.$$

Cu notaţiile noastre, avem:

$$\overline{cl} = y \quad ; \quad \overline{lo} = R \quad ; \quad \overline{GO} = z,$$

deci: $$y = \sqrt{R^2 - z^2 \operatorname{cotg}^2\beta}.$$

Introducând pe a, b, x şi y cu valorile găsite în expresia lui S_1 şi efectuând toate reducerile posibile, obţinem suprafaţa segmentului de iperbolă în mărime şi semn:

$$S_1 = \frac{H(Hz - R^2\operatorname{tg}^2\beta)\sqrt{R^2\operatorname{tg}^2\beta - z^2}}{\sin\beta \operatorname{tg}\beta (H^2 - R^2\operatorname{tg}^2\beta)} - \frac{HR^2(H-z)^2}{\cos\beta \sqrt{(R^2\operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times$$

$$\times \operatorname{Arg} c.h. \left[\frac{R^2\operatorname{tg}^2\beta - Hz}{R(H-z)\operatorname{tg}\beta}\right] \qquad (I)'''$$

Notăm cu S_2 suprafaţa secţiunii AC a solidului superior. Formula suprafeţei este identică cu cea calculată în cazul A, subcazul *a)*, deoarece pentru ambele cazuri folosim în (Fig. A) şi (Fig. C), aceleaşi notaţiuni, observând că obţinem aceleaşi relaţiuni, deci avem aceeaşi formulă. Prin urmare suprafaţa AC a solidului superior în mărime şi semn este:

$$S_2 = R^2 \times \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{z}{R\operatorname{tg}\beta}\right) - \frac{z}{\operatorname{tg}^2\beta} \times \sqrt{R^2\operatorname{tg}^2\beta - z^2}. \qquad (II)'''$$

Notăm cu S_3 suprafaţa laterală ASD a solidului superior Această suprafaţă este conică. Vom calcula pe S_3 în funcţie de suprafeţele plane S_1 şi S_2 cunoscute.

Proecţiile suprafeţelor S_1 şi S_2 pe planul bazei conului, sunt respectiv:

$$S_1 \times \cos\beta \quad \text{şi} \quad S_2.$$

Suma algebrică a acestor suprafeţe reprezintă proiecţia suprafeţei laterale a solidului superior, pe planul bazei conului: ca şi cum conul SAB ar fi tăiat cu două plane, anume planul (P) şi planul bazei sale xOy. Aplicăm deci relaţiile (1) respectiv (16) din capitolul I, cu condiţiile arătate acolo, pentru (Fig. C). Avem prin urmare

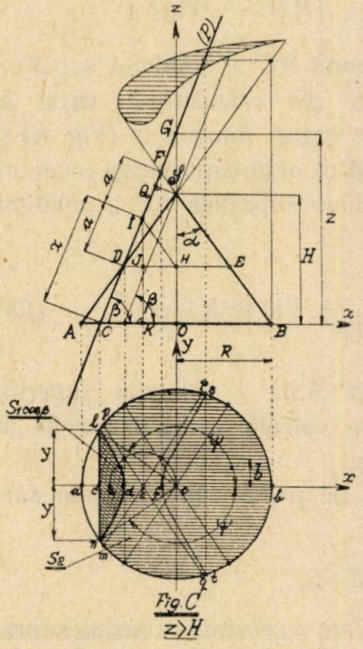
$$S_3 = (S_2 + S_1\cos\beta) : \sin\alpha.$$

Introducând pe S_1 și S_2 cu valorile lor, respectiv din (I)‴ și (II)‴ în expresia lui S_3, obținem formula suprafeței laterale a solidului superior în mărime și semn:

$$S_3 = R\sqrt{H^2 + R^2} \times \arccos\left(\frac{z}{R\,tg\beta}\right) - \frac{HR(H-z)^2\sqrt{H^2+R^2}}{\sqrt{(R^2\,tg^2\beta - H^2)^3}} \times$$

$$\times \left[\operatorname{Arg}c.h.\left(\frac{R^2tg^2\beta - Hz}{R(H-z)\,tg\beta}\right) - \frac{1}{H(H-z)} \times\right.$$

$$\left. \times \sqrt{(R^2\,tg^2\beta - H^2)(R^2\,tg^2\beta - z^2)}\right]. \qquad (III)'''$$



Observațiuni. Formulele suprafețelor (I)‴, (II)‴ și (III)‴ din cazul C, subcazul *a)*, sunt aceleași cu formulele suprafețelor (I), (II) și (III) din cazul A, subcazul *a)*, căci ele se pot obține unele din altele, însă suprafețele ca mărime sunt evident diferite, de oarece $\sphericalangle\,\beta$ nu este același pentru ambele cazuri.

In adevăr fie u un număr real, pozitiv și mai mare sau cel mult egal cu unitatea, atunci formulele care ne dau transformarea dintr'un caz în celălalt, sunt date de relațiile:

$$\left\{\begin{array}{ll} \arccos u = i\operatorname{Arg} ch\, u & u \geqslant 1 \\ ch\, y = \cos iy = u & ch\, y \geqslant 1 \end{array}\right\}$$

$ch\,y$ = cosin hiperbolic de y

$(i = \sqrt{-1})$.

Cu aceste considerente, suntem îndreptățiți a admite că formulele suprafețelor S_1, S_2 și S_3 date respectiv de relațiile (I), (II) și (III) din cazul A sau C, subcazul *a)*, *sunt generale, indiferent dacă secțiunea planului* (P) *cu conul* SAB *va fi elipsă, parabolă* sau *iperbolă.*

Subcazul b). $H < z$. Dacă plecăm dela cazul C, subcazul *a*), deplasând planul (P) paralel cu el însuşi, astfel ca $H < z$ formulele suprafeţelor S_1, S_2 şi S_3 se schimbă. Intr'adevăr păstrând aceleaşi notaţiuni pentru ambele subcazuri *a*) şi *b*) şi urmând acelaşi raţionament, găsim următoarele formule:

$$a = \frac{HR(z-H)}{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)\cos\beta} \quad ; \quad b = \frac{R(z-H)}{\sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2}}$$

$$x = \frac{H}{\sin\beta} \times \left(\frac{Hz - R^2 \operatorname{tg}^2\beta}{H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta}\right) \quad ; \quad y = \sqrt{R^2 - z^2 \operatorname{cotg}^2\beta}.$$

Formulele lui x, y sunt aceleaşi pentru ambele subcazuri *a*) şi *b*), pe când formulele lui a şi b sunt însă diferite.

Formulele suprafeţelor S_1, S_2 şi S_3 a solidului superior vor fi deci în mărime şi semn, respectiv:

$$S_1 = \frac{H(Hz - R^2\operatorname{tg}^2\beta)\sqrt{R^2\operatorname{tg}^2\beta - z^2}}{\sin\beta \operatorname{tg}\beta (H^2 - R^2\operatorname{tg}^3\beta)} - \frac{H R^2 (z-H)^2}{\cos\beta \sqrt{(R^2\operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times$$

$$\times \operatorname{Arg} c.h. \left[\frac{R^2\operatorname{tg}^2\beta - Hz}{R(z-H)\operatorname{tg}\beta}\right]. \qquad (I)_1$$

$$S_2 = R^2 \arccos\left(-\frac{z}{R\operatorname{tg}\beta}\right) + \frac{z}{\operatorname{tg}^2\beta}\sqrt{R^2\operatorname{tg}^2\beta - z^2} \qquad (II)_1$$

$$S_3 = R\sqrt{H^2 + R^2} \arccos\left(-\frac{z}{R\operatorname{tg}\beta}\right) + \frac{HR(z-H)^2\sqrt{H^2+R^2}}{\sqrt{(R^2\operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times$$

$$\left[\operatorname{Arg} c.h. \left(\frac{R^2\operatorname{tg}^2\beta - Hz}{R(z-H)\operatorname{tg}\beta}\right) + \frac{1}{H(z-H)} \times\right.$$

$$\left. \times \sqrt{(R^2\operatorname{tg}^2\beta - H^2)(R^2\operatorname{tg}^2\beta - z^2)}\right]. \qquad (III)_1$$

Remarcăm că pentru acest caz, formula suprafeţei laterale a solidului superior este dată de relaţia uşor de stabilit:

$$S_3 = (S_2 - S_1 \times \cos\beta) : \sin\alpha.$$

Subcazul c). $z < 0$. Dacă plecăm dela cazul C, subcazul *a*), deplasând planul (P) paralel cu el însuşi, astfel ca $z < 0$, formulele suprafeţelor S_1, S_2 şi S_3 se schimbă. Intr'adevăr păstrând aceleaşi notaţiuni pentru toate subcazurile *a*), *b*) şi *c*), şi urmând acelaşi raţionament, găsim următoarele formule:

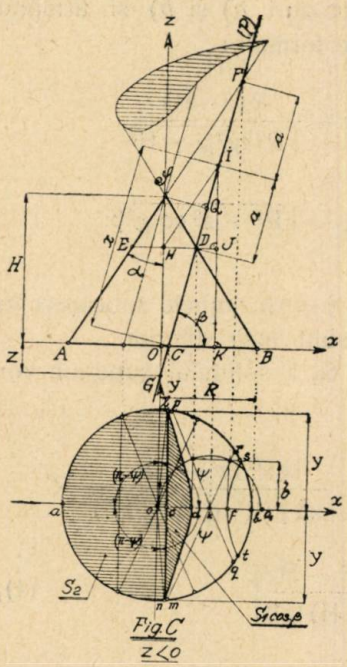


Fig C
$z < 0$

$$a = \frac{HR(H+z)}{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)\cos\beta},$$

$$b = \frac{R(H+z)}{\sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2}}$$

$$x = \frac{H}{\sin\beta} \times \left(\frac{R^2 \operatorname{tg}^2\beta + Hz}{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2}\right),$$

$$y = \sqrt{R^2 - z^2 \operatorname{cotg}^2\beta}.$$

Formulele lui *a*, *b* şi *x* sunt diferite faţă de celelalte cazuri, numai expresia lui *y* se păstrează neschimbată.

Formulele suprafeţelor S_1, S_2 şi S_3 ale solidului superior vor fi deci în mărime şi semn respectiv:

$$S_1 = \frac{H(R^2 \operatorname{tg}^2\beta + Hz)\sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2}}{\sin\beta \operatorname{tg}\beta (R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)} - \frac{HR^2(H+z)^2}{\cos\beta \sqrt{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times$$

$$\times \operatorname{Arg} c.h. \left[\frac{R^2 \operatorname{tg}^2\beta + Hz}{R(H+z)\operatorname{tg}\beta}\right]. \qquad (I)_2$$

$$S_2 = R^2 \arccos\left(-\frac{z}{R \operatorname{tg}\beta}\right) + \frac{z}{\operatorname{tg}^2\beta} \times \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2} \qquad (II)_2$$

$$S_3 = R\sqrt{H^2 + R^2} \arccos\left(-\frac{z}{R \operatorname{tg}\beta}\right) - \frac{HR(H+z)^2\sqrt{H^2+R^2}}{\sqrt{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times$$

$$\times \left[\operatorname{Arg} c.h. \left(\frac{R^2 \operatorname{tg}^2\beta + Hz}{R(H+z)\operatorname{tg}\beta}\right) - \frac{1}{H(H+z)} \times\right.$$

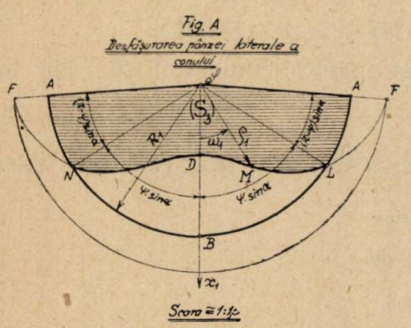
$$\left. \times \sqrt{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2)}\right]. \qquad (III)_2$$

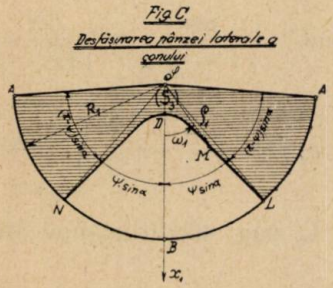
Observaţiune. Dacă în formulele lui a, b, x şi y precum şi în formulele lui S_1, S_2 şi S_3 din cazul C, subcazul *a)*, substituim peste tot $(-z)$ cu $(+z)$ obţinem formulele $(I)_2$, $(II)_2$ şi $(III)_2$.

CAPITOLUL III

Altă metodă pentru calculul suprafeţelor conice

In cazurile A, B şi C, am folosit o metodă simplă pentru calculul mărimii suprafeţelor conice S_3 în funcţie de mărimea suprafeţelor plane S_1 şi S_2. Această metodă cere cunoaşterea mărimii suprafeţelor plane S_1 şi S_2 precum şi posibilitatea aplicării relaţiilor (1) şi (16) din capitolul I ce se referă la suprafeţe plane, pentru calculul unor anumite suprafeţe conice.





In cele ce urmează vom folosi pentru calculul mărimii suprafeţelor conice o metodă directă şi generală, zisă a desfăşurărilor.

Tăiem pânza conului SAB cu un plan, după generatoarea $\overline{SA}$ şi o aşternem apoi pe un plan orizontal. Obţinem (Fig. A) şi (Fig. C) alăturată cu desfăşurarea pânzei conului, respectiv pentru cazul A şi C, subcazul *a)*. Observăm că aceste figuri au aceleaşi notaţii. Vom dovedi mai întâi că curba $\overset{\frown}{(NDL)}$ din ambele figuri, are aceeaşi ecuaţie. De altă parte, segmentul de cerc $\overset{\frown}{ANBLA}$ cu raza R_1 din ambele figuri, are evident aceeaşi ecuaţie. Deasemeni unghiul la vârf $\overset{\frown}{ASA} = 2\pi \times \sin\alpha$. rad. este acelaşi pentru ambele figuri. Rezultă că şi suprafaţa: S_3 = Supr. (SANDLA) pentru ambele figuri, trebue să aibă pentru calculul mărimii, evident aceeaşi formulă. Singura deosebire este că mărimea suprafeţelor este diferită pentru cele două figuri, deoarece $\sphericalangle\, \beta$ este diferit.

Profităm de faptul că segmentul curb de elipsă ($\widehat{ndl}$) (Fig. A, pag. 392) cu segmentul curb de iperbolă ($\widehat{ndl}$) (Fig. C) au aceeaşi ecuaţie (5) dela pag. 384.

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \times \cos\omega}$$

unde p şi ε sunt respectiv parametrul şi excentricitatea conicei ($\widehat{ndl}$).

Relaţiile între coordonatele polare ale unui punct m de pe conica ($\widehat{ndl}$) faţă de punctul M corespunzător de pe curba ($\widehat{NDL}$) le-am stabilit la pag. 383, iar ecuaţia curbei ($\widehat{NDL}$) pentru ambele figuri A şi C, din desfăşurarea suprafeţei laterale a pânzei conului, a fost ecuaţia (7) dela pag. 384. Vom putea deci scrie pentru calculul suprafeţei S_3

$$S_3 = 2 \times \text{Supr. (SAN)} + \text{Supr. (SNDL)}$$

deoarece am făcut tăietura prin pânza conului SAB, aşa fel că arc ($\widehat{AN}$) = arc ($\widehat{AL}$). Dar:

$$\begin{cases} \text{Supr. (SAN)} = \dfrac{1}{2} \times R_1 \times \text{arc}\,(\widehat{AN}) = \dfrac{1}{2} R_1^2 \times (\pi - \psi) \times \sin\alpha, \\ \text{Supr. (SNDL)} = \dfrac{1}{2} \times \displaystyle\int_{-\psi \times \sin\alpha}^{+\psi \times \sin\alpha} \rho_1^2 \times d\omega_1, \end{cases}$$

iar:

$$R_1 = \sqrt{H^2 + R^2} \quad ; \quad \text{tg}\alpha = \frac{R}{H} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}} = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}.$$

Deci S_3 devine: $S_3 = R\,(\pi - \psi)\sqrt{H^2 + \quad^2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\psi \sin\alpha}^{+\psi \sin\alpha} \rho_1^2\, d\omega_1$.

Din Fig. A, pag. 392 sau Fig. C, pag. 469, triunghiul dreptunghic *col* ne dă:

$$\overline{co} = \overline{ol} \times \cos\,(\pi - \psi) = R \times \cos\,(\pi - \psi) = -R \times \cos\psi.$$

Din triunghiul dreptunghic COG avem de asemenea

$$\overline{CO} \quad \overline{GO} \times \text{cotg}\beta = z \times \text{cotg}\beta = \frac{z}{\text{tg}\beta}.$$

Cum însă $\overline{co} = \overline{CO}$, rezultă:

$$z\,\text{cotg}\beta = R\cos\,(\pi - \psi) = -R\cos\psi.$$

De unde deducem pentru ambele figuri A sau C, aceleaşi relaţii, anume:

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi = -\frac{z}{R\,tg\beta} \quad ; \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{R^2\,tg^2\beta - z^2}}{R\,tg\beta}; \\ \pi - \psi = \arccos\left(\frac{z}{R\,tg\beta}\right). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Substituind în (23) pe ρ_1 din (7) precum şi pe $(\pi - \psi)$ din (24), găsim:

$$S_3 = R\sqrt{H^2+R^2}\arccos\left(\frac{z}{R\,tg\beta}\right) + \frac{p^2}{2\sin^2\alpha} \times \int_{-\psi\sin\alpha}^{+\psi\sin\alpha} \frac{d\omega_1}{\left[1+\varepsilon\cos\left(\frac{\omega_1}{\sin\alpha}\right)\right]^2} \quad (25)$$

Facem substituţia:

$$\frac{\omega_1}{\sin\alpha} = \varphi, \quad \text{deci} \quad d\omega_1 = \sin\alpha\, d\varphi \qquad (\alpha = \text{const.}) \qquad (26)$$

şi remarcând că ω_1 variază dela $(-\psi\sin\alpha \sim +\psi\sin\alpha)$ rad., iar în acelaşi timp după relaţia (26), φ variază dela $(-\psi \sim +\psi)$ rad., avem:

$$S_3 = R\sqrt{H^2+R^2}\arccos\left(\frac{z}{R\,tg\beta}\right) + \frac{p^2}{2\sin\alpha} \times \int_{-\psi}^{+\psi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}. \quad (27)$$

Rămâne să calculăm integrala:

$$Y = \int_{-\psi}^{+\psi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} \qquad (\varepsilon \lesssim 1). \qquad (28)$$

Pentru integrare, considerăm un unghiu ajutător γ, definit de:

$$\cos\gamma = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad (\varepsilon \lesssim 1) \qquad (29)$$

Din (29) deducem, următoarele relaţii:

$$1+\varepsilon\cos\varphi = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\times\cos\gamma} \quad ; \quad \sin\gamma = \frac{\sin\varphi}{1+\varepsilon\times\cos\varphi} \times \sqrt{1-\varepsilon^2};$$

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\times\cos\gamma} \times d\gamma. \qquad (30)$$

Remarcăm însă, când φ variază dela $(-\psi \sim +\psi)$, după relaţia (29), γ variază dela $(-\gamma \sim +\gamma)$. Deci integrala (28) cu substituţiile (30) se scrie succesiv:

$$Y = \int_{-\psi}^{+\psi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\gamma}\right) d\gamma}{\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\gamma}\right)^2} = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{1-\varepsilon\cos\gamma}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} \times d\gamma =$$

$$= \left| \frac{\gamma - \varepsilon\sin\gamma}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} \right|_{-\gamma}^{+\gamma} \quad (\varepsilon \lesssim 1). \tag{31}$$

Dar după relaţia (29) şi relaţia a doua din (30), unde înlocuind pe φ cu ψ, avem:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\cos\psi+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\psi}\right) \text{ iar } \sin\gamma = \frac{\sin\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} \times \sqrt{1-\varepsilon^2} \quad (\varepsilon \gtrless 1) \tag{32}$$

Inlocuind relaţiile (32) în integrala Y din (31) obţinem:

$$Y = \int_{-\psi}^{+\psi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{2}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} \times \left[\arccos\left(\frac{\cos\psi+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\psi}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} \times \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \right] \quad (\varepsilon \lesssim 1). \tag{33}$$

Substituind această integrală cu valoarea sa în formula suprafeţei (27), obţinem:

$$S_3 = R\sqrt{H^2+R^2}\arccos\left(\frac{z}{R\,\mathrm{tg}\beta}\right) + \frac{p^2}{\sin\alpha\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} \times$$

$$\times \left[\arccos\left(\frac{\cos\psi+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\psi}\right) - \frac{\sin\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} \times \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} \right]. \tag{34}$$

Aceasta este formula generală a suprafeţei laterale a solidului superior când conul SAB este tăiat cu un plan (P), ale cărui secţiuni sunt eliptice pentru $(\varepsilon < 1)$, iperbolice pentru $(\varepsilon > 1)$.

Remarcăm însă că formula (34) a fost dedusă numai pentru cazul general $(\varepsilon \lesssim 1)$; ea este valabilă însă şi pentru cazul particular $(\varepsilon = 1)$, deoarece acest caz particular se obţine din cele precedente prin rotaţia planului (P) în jurul axei proiectate în punctul G. In momentul când acest plan devine paralel cu generatoarea $\overline{SA}$, avem $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ şi deci $(\varepsilon = 1)$. Observăm însă, că dacă în

(34) facem $\varepsilon = 1$, obţinem la început evident o nedeterminare, care se va înlătura uşor aplicând regula lui HOSPITAL.

Urmează să precizăm valoarea parametrului p şi a excentricităţii ε pentru elipsa, parabola şi iperbola $\widehat{(ndl)}$ respectiv din figurile A, B şi C.

a) *Calculul parametrului p.* 1°. *Cazul parabolei.* (Fig. B). Parametrul p al parabolei $\widehat{(ndl)}$ este dat de dublul mărimii segmentului $\overline{od}$, astfel: $p = 2 \times \overline{od}$. Triunghiurile SAB, DCB şi DGU sunt asemenea, având unghiurile dela vârfuri corespunzătoare egale şi laturile corespunzătoare paralele. Verticala lui D împarte segmentul $\overline{GU}$ în două părţi egale, rezultă deci:

$$p = 2\,\overline{od} = \overline{GU} = \overline{SG} \times \operatorname{tg}\alpha = (H - z) \times \operatorname{tg}\alpha$$

$$\therefore \qquad p = (H - z) \times \operatorname{tg}\alpha = (H - z) \times \frac{R}{H}. \qquad (35)$$

2°. *Cazul Elipsei şi Iperbolei* (Fig. A) şi (Fig. C). Subcazul *a*). Parametrul p al conicei $\widehat{(ndl)}$ pentru elipsă şi iperbolă are aceeaşi expresie cunoscută:

$$p = b'^2 : a' \qquad (36)$$

Unde semi-axele a', b' se referă la conica $\widehat{(ndl)}$. Aceste semi-axe le exprimăm în funcţie de semi-axele a, b ale conicei reale conţinută în planul (P). Avem:

$$a' = a \times \cos\beta \quad \text{iar} \quad b' = b. \qquad (37)$$

Deci: $$p = b'^2 : a' = b^2 : a \times \cos\beta. \qquad (38)$$

Dar semi-axele a, b le-am calculat în cazul A şi C, subcazul *a*. Luându-le de acolo şi substituindu-le în (38), obţinem pentru elipsa şi iperbola $\widehat{(ndl)}$ aceeaşi formulă (35) ca şi pentru parabolă.

b) *Calculul excentricităţii* ε. Excentricitatea ε a conicei $\widehat{(ndl)}$ are ca expresie respectiv:

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sqrt{a'^2 - b'^2}}{a'} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b'}{a'}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a\cos\beta}\right)^2} \ldots \\ \varepsilon = \dfrac{\sqrt{a'^2 + b'^2}}{a'} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{b'}{a'}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{b}{a\cos\beta}\right)^2} \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon < 1 \ \textit{(Elipsă)} \\ \varepsilon = 1 \ \textit{(Parabolă)} \\ \varepsilon > 1 \ \textit{(Iperbolă).} \end{cases} \qquad (39)$$

Introducând pe a şi b cu formulele lor din cazurile respective, deducem pentru elipsa şi iperbola $\widehat{(ndl)}$ aceeaşi formulă:

$$\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha \times \operatorname{tg}\beta = \frac{R}{H} \times \operatorname{tg}\beta. \qquad (40)$$

Această formulă este valabilă şi pentru parabolă, deoarece pentru $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ găsim $\varepsilon = 1$. Formula (40) este deci generală.

Rezultă aşa dar, că parametrul p şi excentricitatea ε din (34) sunt date respectiv de relaţiile generale (35) şi (40), indiferent dacă intersecţia conului SAB cu planul (P) ne va da în proiecţie pe planul bazei conului, elipsă, parabolă sau iperbolă.

Observaţiuni. 1°). Relaţiile (35) şi (40), ne definesc, următoarea remarcă importantă: Conica (ndl) din proiecţia orizontală a secţiunii conului, are permanent acelaşi focar „o" fix, situat în centrul bazei conului, indiferent că intersecţia conului SAB cu planul (P), ne dă ca secţiune elipsă, parabolă sau iperbolă.

2°. Dacă în formula generală (34) substituim pe $\cos\psi$ şi $\sin\psi$ cu valorile lor din (24) iar p şi ε le substituim cu valorile lor respectiv din (35) şi (40), obţinem direct formula (III) din cazul A, subcazul *a)*.

3°. Tot din formula generală (34) dacă substituim pe $\cos\psi$ şi $\sin\psi$ cu valorile din (24) iar p şi ε le substituim cu valorile lor respectiv din (35) şi (40), grupând apoi termenii convenabil, obţinem expresia:

$$S_3 = \Bigg\{ \underbrace{R^2 \arccos\left(\frac{z}{R\,tg\beta}\right) - \frac{z}{tg^2\beta}\sqrt{R^2 tg^2\beta - z^2}}_{S_2} + \frac{H(Hz - R^2 tg^2\beta)\sqrt{R^2 tg^2\beta - z^2}}{tg^2\beta\,(H^2 - R^2 tg^2\beta)} + \frac{H R^2 (H-z)^2}{\sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)^2}} \times \arccos\left[\frac{R^2 tg^2\beta - Hz}{R(H-z)tg\beta}\right] \Bigg\} : \underbrace{S_1 \times \cos\beta}_{} : \underbrace{\frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}}_{\sin\alpha}.$$

Sau: $S_2 = (S_2 + S_1 \times \cos\beta) : \sin\alpha.$

Formulă care ne este cunoscută şi care ne dă mărimea suprafeţei laterale a conului S_3 în funcţie de mărimea suprafeţelor plane S_1 şi S_2.

(Va urma)

ING. OCTAVIAN S. IANCULESCU
Direcţia Technică. „Astra Română" — Câmpina.

ASUPRA UNEI CLASE DE IDENTITĂȚI ALGEBRICE

In cele ce urmează îmi propun să găsesc o clasă de identități algebrice cunoscute, pornind dela proprietățile fundamentale ale funcțiunilor holomorfe.

1. Consider funcțiunea de variabilă complexă

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Această funcțiune este holomorfă în domeniul multiplu conex exterior cercurilor cu centrele în punctele $z = a$, $z = b$ și $z = c$.

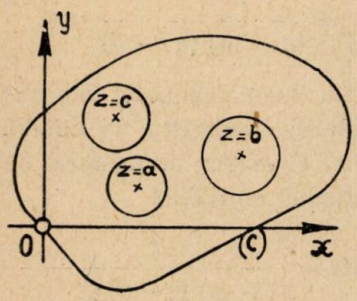


Fig. 1.

Atunci conform teoremei fundamentale a lui CAUCHY avem:

$$(1) \qquad \int_{(C)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0.$$

(C) fiind o curbă închisă trasată în interiorul domeniului de holomorfie.

Insă conform teoremei reziduurilor avem:

$$(2) \qquad \int_{(C)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 2\pi i (R_1 + R_2 + R_3)$$

R_1, R_2 și R_3 fiind reziduurile relative la polii simpli $z = a$, $z = b$ și $z = c$.

Atunci avem

$$R_1 = \left[\frac{1}{(z-b)(z-c) + (z-a)(z-c) + (z-a)(z-b)}\right]_{z=a}.$$

De unde:

$$R_1 = \frac{1}{(a-b)(a-c)}.$$

Analog vom avea:

$$R_2 = \underset{z=b}{\left[\frac{1}{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}\right]}.$$

$$\therefore \quad R_2 = \frac{1}{(b-a)(b-c)}.$$

$$R_3 = \underset{z=c}{\left[\frac{1}{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}\right]}.$$

$$\therefore \quad R_3 = \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Ţinând seamă de relaţiunile (1) şi (2) avem:

$$\int_{(C)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 2\pi i (R_1 + R_2 + R_3) = 0.$$

Inlocuind pe R_1, R_2 şi R_3 cu valorile lor căpătăm:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

Identitate cunoscută sub numele de identitatea lui EULER.

2. Consider funcţiunea de variabilă complexă

$$f(z) = \frac{1}{z(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

holomorfă în domeniul multiplu conex exterior cercurilor cu centrele în punctele

$z = 0$; $z = a$; $z = b$ şi $z = c$.

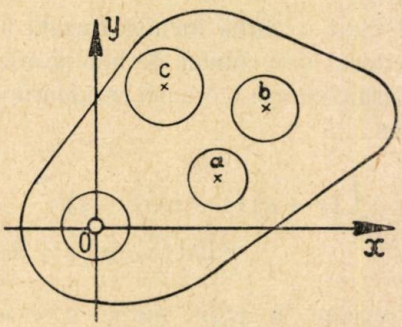


Fig. 2.

Atunci după teorema lui CAUCHY avem:

$$(3) \qquad \int_{(C)} \frac{dz}{z(z-a)(z-b)(z-c)} = 0.$$

Insă după teorema reziduurilor avem:

$$(4) \qquad \int_{(C)} \frac{dz}{z(z-a)(z-b)(z-c)} = 2\pi i (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

Atunci:

$$R_1 = \underset{x=0}{\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)+z(z-b)(z-c)+z(z-a)(z-c)+z(z-a)(z-b)}\right]}.$$

$$\therefore \quad R_1 = -\frac{1}{abc}.$$

Pentru reziduurile R_2, R_3 şi R_4 avem:

$$R_2 = \underset{z=a}{\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)+z(z-b)(z-c)+z(z-a)(z-c)+z(z-a)(z-b)}\right]}.$$

$$\therefore \quad R_2 = \frac{1}{a(a-b)(a-c)}.$$

In mod analog găsim că:

$$R_3 = \frac{1}{b(b-a)(b-c)} \quad \text{şi} \quad R_4 = \frac{1}{c(c-a)(c-b)}.$$

Ţinând seamă de relaţiunile (3) şi (4) vom avea:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0.$$

Inlocuind reziduurile cu valorile lor găsim

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} - \frac{1}{abc} = 0.$$

De unde:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$$

3. Consider funcţiunea de variabilă complexă

$$f(z) = \frac{z-(a+b+c)}{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

holomorfă în domeniul multiplu conex, exterior cercurilor cu centrele în punctele $z=a$, $z=b$ şi $z=c$. Atunci conform teoremei fundamentale a lui CAUCHY avem:

$$(5) \qquad \int_{(C)} \frac{[z-(a+b+c)]\,dz}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0.$$

Insă conform teoremei reziduurilor vom avea:

$$(6)\quad \int_{(C)} \frac{[z-(a+b+c)]\,dz}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 2\pi i(R_1+R_2+R_3).$$

Să calculăm reziduurile şi vom avea:

$$R_1 = \underset{z=a}{\left[\frac{z-(a+b+c)}{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}\right]}.$$

$$\therefore\quad R_1 = -\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}.$$

Analog avem:

$$R_2 = \underset{z=b}{\left[\frac{z-(a+b+c)}{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}\right]}$$

$$\therefore\quad R_2 = -\frac{a+c}{(b-a)(b-c)}$$

$$R_3 = \underset{z=c}{\left[\frac{z-(a+b+c)}{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}\right]}$$

$$\therefore\quad R_3 = -\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}.$$

Conform relaţiunilor (5) şi (6) deducem identitatea:

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a+c}{(b-a)(b-c)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}=0.$$

4. Fie funcţiunea de variabilă complexă:

$$f(z)=\frac{abc}{z^2(z-a)(z-b)(z-c)}$$

holomorfă în domeniul multiplu conex exterior cercurilor cu centrele în punctele $z=0$; $z=a$; $z=b$ şi $z=c$.

Atunci avem conform teoremei fundamentale a lui CAUCHY:

$$(7)\quad \int_{(C)} \frac{abc\,dz}{z^2(z-a)(z-b)(z-c)} = 0.$$

După teorema reziduurilor avem

$$(8)\quad \int_{(C)} \frac{abc\,dz}{z^2(z-a)(z-b)(z-b)} = 2\pi i(R_1+R_2+R_3+R_4).$$

Vom calcula acum reziduurile relative la polii $z=0$; $z=a$; $z=b$ şi $z=c$. Punctul $z=0$ este un pol de ordinul II. In vecinătatea punctului $z=0$ funcţiunea se poate pune sub forma:

$$\frac{abc}{z^2(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+P(z).$$

Inmulţind cu z^2 avem:

$$\frac{abc}{(z-a)(z-b)(z-c)} = A+B.z+z^2P(z).$$

Derivând în raport cu z şi făcând $z=0$ avem:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{abc}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right]_{z=0} = B = R_1.$$

Atunci:

$$R_1 = \frac{d}{dz}\left[\frac{abc}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right].$$

Avem:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{abc}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right] =$$

$$= \frac{-abc\,[(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)]}{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}.$$

Atunci:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{abc}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right]_{z=0} =$$

$$= \frac{-abc(bc+ac+ab)}{a^2b^2c^2} = -\frac{bc+ac+ab}{abc}.$$

Deci

$$R_1 = -\frac{ab+bc+ca}{abc}.$$

Reziduurile relative la polii simpli $z=a$; $z=b$ şi $z=c$ vor fi date de formulele:

$$R_{\substack{2\\z=a}}=\left[\frac{abc}{2z(z-a)(z-b)(z-c)+z^2(z-b)(z-c)+z^2(z-a)(z-c)+z^2(z-a)(z-b)}\right].$$

$$\therefore \quad R_2=\frac{abc}{a^2(a-b)(a-c)}=\frac{bc}{a(a-b)(a-c)}$$

$$R_{\substack{3\\z=b}}=\left[\frac{abc}{2z(z-a)(z-b)(z-c)+z^2(z-b)(z-c)+z^2(z-a)(z-c)+z^2(z-a)(z-b)}\right].$$

$$\therefore \quad R_3=\frac{abc}{b^2(b-a)(b-c)}=\frac{ac}{b(b-a)(b-c)}.$$

Pentru R_4 se găseşte:

$$R_4=\frac{ab}{c(c-a)(c-b)}.$$

Conform relaţiilor (7) şi (8) avem:

$$R_1+R_2+R_3+R_4=0$$

sau:

$$-\frac{ab+bc+ca}{abc}+\frac{bc}{a(a-b)(a-c)}+$$

$$+\frac{ac}{b(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{c(c-a)(c-b)}=0.$$

De unde:

$$\frac{bc}{a(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{b(b-a)(b-c)}+$$

$$+\frac{ab}{c(c-a)(c-b)}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$$

5. Fie funcţiunea de variabilă complexă:

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-a)(z-b)(z-c)}$$

holomorfă în domeniul multiplu conex exterior cercurilor cu centrele în punctele $z=0$; $z=a$; $z=b$ şi $z=c$.

Conform teoremei fundamentale a lui CAUCHY avem:

$$(9)\quad \int_{(C)} \frac{dz}{z^2(z-a)(z-b)(z-c)} = 0$$

(C) fiind o curbă închisă trasată în interiorul domeniului de holomorfie. Analog cazurilor precedente avem:

$$(10)\quad \int_{(C)} \frac{dz}{z^2(z-a)(z-b)(z-c)} = 2\pi i(R_1+R_2+R_3+R_4)$$

$$\therefore \qquad (11) \qquad R_1+R_2+R_3+R_4 = 0.$$

Calculând reziduurile vom avea:

$$R_1 = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right]_{z=0}.$$

De unde:

$$R_1 = -\left[\frac{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}\right] = -\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2c^2}.$$

La fel

$$R_2 = \left[\frac{1}{2z(z-a)(z-b)(z-c)+z^2(z-b)(z-c)+z^2(z-a)(z-c)+z^2(z-a)(z-b)}\right]_{z=a}.$$

$$\therefore \qquad R_2 = \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}.$$

Analog găsim:

$$R_3 = \frac{1}{b^2(b-a)(b-c)} \quad \text{și} \quad R_4 = \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}.$$

După relațiunea (11) rezultă că:

$$\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c^2(c-a)(c-b)} = \frac{ab+bc+ca}{a^2b^2c^2}$$

6. Consider funcţiunea de variabilă complexă:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 (z-a)(z-b)(z-c)}$$

holomorfă în domeniul multiplu conex exterior cercurilor cu centrele în punctele $z=0$; $z=a$; $z=b$ şi $z=c$. Dacă (C) este o curbă închisă trasată în domeniul de holomorfie, găsim succesiv

$$(12) \quad \int_{(C)} \frac{dz}{z^3 (z-a)(z-b)(z-c)} = 0$$

$$(13) \quad \int_{(C)} \frac{dz}{z^3 (z-a)(z-b)(z-c)} = 2\pi i(R_1+R_2+R_3+R_4) = 0$$

$$R_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right].$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right] = -\frac{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right] = -\frac{d}{dz}\frac{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)}{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}\right] =$$

$$= \frac{2[(z-a)+(z-b)+(z-c)](z-a)(z-b)(z-c)-2[(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)]^2}{(z-a)^3(z-b)^3(z-c)^3} = 0.$$

Rezultă că:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\right] = -\frac{2[(z-a)+(z-b)+(z-c)](z-a)(z-b)(z-c)-2[\sum (z-b)(z-c)]^2}{(z-a)^3(z-b)^3(z-c)^3}$$

$$R_1 = -\frac{1}{2}\frac{2\{[(z-a)+(z-b)+(z-c)](z-a)(z-b)(z-c)-[(z-b)(z-c)+(z-a)(z-c)+(z-a)(z-b)]^2\}}{(z-a)^3(z-b)^3(z-c)^3}.$$

$z=0$

Deci

$$R_1 = \frac{(a+b+c)\,abc-(ab+bc+ca)^2}{a^3b^3c^3}.$$

$$R_2 = \lim_{z=a}\left[\frac{1}{3z^2(z-a)(z-b)(z-c)+z^3(z-b)(z-c)+z^3(z-a)(z-c)+z^3(z-a)(z-b)}\right].$$

$$\therefore \quad R_2 = \frac{1}{a^3\,(a-b)\,(a-c)}.$$

Analog se găseşte:

$$R_3 = \frac{1}{b^3\,(b-a)\,(b-c)} \quad \text{şi} \quad R_4 = \frac{1}{c^3\,(c-a)\,(c-b)}.$$

Inlocuind în (13), găsim

$$\sum \frac{1}{a^3\,(a-b)\,(a-c)} = \frac{(ab+bc+ca)^2-(a+b+c)\,abc^2}{a^3b^3c^3}.$$

7. Să considerăm funcţia raţională, de variabila complexă z,

$$f(z) = \frac{z^n}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m)}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt diferiţi între ei şi $n \leqq m-1$.

Funcţia are în planul complex polii simpli $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Suma rezidurilor[1]) acestei funcţii relativ la aceşti poli şi la punctul infinit este zero, adică

$$\sum_{j=1}^{m} R_j + R_\infty = 0$$

unde R_j şi R_∞ sunt respectiv reziduurile polului a_j şi punctului $z=\infty$

Avem

$$R_j = \frac{a_j^n}{(a_j-a_1)\ldots(a_j-a_{j-1})\,(a_j-a_{j+1})\ldots(a_j-a_m)}$$

iar în vecinătatea punctului $z=\infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^{m-n}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{a_1}{z}\right)\left(1-\frac{a_2}{z}\right)\ldots\left(1-\frac{a_m}{z}\right)} = \frac{1}{z^{m-n}}\left(1+\frac{\alpha}{z}+\ldots\right)$$

---

1) Vezi TH. ANGHELUŢĂ : Curs de Algebră Superioară, Funcţii Analitice, pag. 172.

deci R_∞ este egal cu -1 sau zero, după cum $n = m-1$ sau $n < m-1$, căci el se află luând coeficientul cu semn schimbat a lui $\frac{1}{z}$ din desvoltarea funcţiei în vecinătatea punctului dela infinit.

Avem astfel identităţile lui EULER [1]).

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{a_j^n}{(a_j-a_1)\ldots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\ldots(a_j-a_m)} = \begin{matrix} 1 \text{ pentru } n=m-1 \\ 0 \text{ pentru } n>m-1. \end{matrix}$$

8. Să considerăm funcţia raţională

$$f(z) = \frac{1}{z^n(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m)}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt diferiţi între ei şi diferiţi de zero.

Procedând analog ca la 7, găsim că reziduul punctului dela infinit este nul. Reziduul corespunzător polului de ord. n $z=0$ se găseşte din desvoltarea, valabilă în vecinătatea, lui $z=0$,

$$f(z) = \frac{(-1)^m}{a_1 a_2 \ldots a_m z^n}\left(1+\frac{z}{a_1}+\frac{z^2}{a_1^2}+\ldots\right)\ldots\left(1+\frac{z}{a_m}+\frac{z^2}{a_m^2}+\ldots\right)$$

căutând coeficientul lui $\frac{1}{z}$, se găseşte

$$R_0 = \frac{(-1)^m}{a_1 a_2 \ldots a_m} S_{n-1}$$

unde am notat cu S_{n-1} polinomul omogen de gradul $n-1$ a inverselor literelor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ cu coeficienţii unitari şi cu convenţia $S_0 = 1$.

Avem atunci identităţile

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{a_j^n(a_j-a_1)\ldots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\ldots(a_j-a_m)} + \\ + \frac{(-1)^m}{a_1 a_2 \ldots a_m} S_{n-1} = 0.$$

In mod analog se mai pot stabili şi alte clase de identităţi algebrice.

N. T. DONCIU
Profesor la Colegiul Naţional Militar „N. Filipescu".

1) Vezi TH. ANGHELUŢĂ, Curs de Algebră Superioară p. I, pag. 20.

GENERALIZAREA CUBICEI LUI DARBOUX

1. *Fie* A', B', C' *proiecţiile unui punct* M *din planul triunghiului* ABC *pe laturile acestuia ;* M_a, M_b, M_c *punctele care împart în raportul* k *segmentele* MA', MB', MC'. *Locul lui* M *astfel ca* AM_a, BM_b, CM_c *să fie concurente este o cubică* Γ_k.

Să determinăm punctele M ale locului de pe o dreapta oarecare Δ din plan.

Pentru aceasta fie A_0, B_0, C_0 intersecţiile dreptei Δ cu laturile BC, CA, AB; A_∞, B_∞, C_∞ punctele dela infinit ale direcţiilor perpendiculare pe aceste laturi; Δ_a dreapta care trece prin A_0, astfel ca raportul anarmonic $(\Delta, BC, \Delta_a, A_0A_\infty) = k$, iar Δ_b, Δ_c drepte analoage. Punctele M_a, M_b, M_c se găsesc respectiv pe dreptele Δ_a, Δ_b, Δ_c.

Punctul M_a, fiind dat pe Δ_a, se obţine punctul M intersectând pe Δ cu perpendiculara $A_\infty M_a$ pe BC. Perpendiculara MB_∞ pe CA taie pe Δ_b în M_b. Punctul M_b, obţinându-se printr'un număr finit de proiecţiuni şi secţiuni, se deduce că diviziunile (M_a) şi (M_b) sunt proiective. Rezultă că fascicolele (AM_a) şi (BM_b) sunt tot proiective. Prin analogie fascicolele (AM_a) şi (CM_c) sunt de asemenea proiective.

Ceva mai mult, proiectivităţile definite între fascicole nu sunt perspectivităţi pentru Δ şi k oarecari, cum am presupus.

Conicele descrise de punctele (AM_a, BM_b) şi (AM_a, CM_c) au un punct comun A. In acest punct ele nu au aceeaşi tangentă, dacă elementele Δ şi k sunt generale. Urmează că cele două conice mai au trei puncte comune, care corespund la trei puncte M de pe Δ, pentru care dreptele AM_a, BM_b, CM_c sunt concurente. Pe o dreaptă oarecare sunt trei puncte ale locului; locul geometric al lui M este deci o cubică Γ_k, care trece evident prin vârfurile A, B, C, ortocentrul H al triunghiului şi — după teorema lui KARIYA — prin centrele cercurilor tritangente I, I_a, I_b, I_c.

2. Dacă concepem pe k variabil, cubicele Γ_k trec prin opt puncte, dintre care patru nu sunt în linie dreaptă, nici şapte pe aceeaşi conică. Ele mai au deci un al noulea punct comun. Acest punct este intersecţia tangentelor din A şi H, diferite de AH, la conica S înscrisă în patrulaterul BCI $I_aI_bI_c$ şi tangentă dreptei AH (CHARLES MICHEL: *Compléments de Géométrie moderne*, p. 308).

Involuția tangentelor din A la conicele înscrise în patrulaterul BC I $I_a I_b I_c$ cuprinde ca elemente omoloage pe AB, AC și AI_b, AI_c. A, I_b, I_c fiind colineare, bisectoarea exterioară a lui A este o dreaptă unită a involuției, cealaltă fiind bisectoarea interioară. Rezultă că tangentei AH la S, îi corespunde isogonala sa AO, O fiind centrul cercului circumscris. Dreapta AO este deci tangentă la S. Al noulea punct comun cubicelor Γ_k se găsește pe AO. Prin permutări circulare asupra literelor A, B, C rezultă că punctul semnalat se găsește și pe BO și CO, deci este chiar punctul O.

Astfel prin punctele A, B, C, I, I_a, I_b, I_c, O, H *trec o infinitate de cubic* Γ_k.

3. Dela primul alineat se deduce că unui număr $k \neq 0,1$ îi corespunde o cubică Γ_k. In particular pentru $k = \infty$ se obține cubica lui DARBOUX Γ_∞.

Reciproc, o cubică Γ_k determină un număr k.

In adevăr fie M un punct pe cubică, diferit de cele nouă puncte remarcabile. Există un singur număr $k \neq 0,1$ pentru care AM_a, BM_b, CM_c sunt concurente. El corespunde punctului al patrulea comun conicelor ce trec prin A, C, M, H, (AB′, CC′) de o parte și A, B, M, H, (AA′, BB′) de altă parte. Urmează că:

Dacă A′, B′, C′ *sunt proiecțiile unui punct* M *oarecare în planul triunghiului* ABC, *iar* M_a, M_b, M_c *punctele care împart în raport* $k \neq 0,1$ *dreptele* MA′, MB′, MC′, *există în general o singură valoare a lui* k, *pentru care dreptele* AM_a, BM_b, CM_c *sunt concurente. Această valoare a lui* k *este cea care corespunde cubicei* Γ_k *ce trece prin* M.

4. Deoarece toate cubicele Γ_k trec prin O, rezultă că pentru punctul O, k este susceptibil de orice valoare, adică oricare ar fi raportul k, dreptele AM_a, BM_b, CM_c sunt concurente într'un punct N. Se regăsește astfel, pe o cale neașteptată, *teorema lui* FRANKE. Se poate arăta ușor că punctul N este pe dreapta lui EULER a triunghiului.

5. *Cubicele* Γ_k *sunt invariante în inversiunea isogonală relativă la triunghiul* ABC.

Fie M un punct oarecare în planul triunghiului și M′ isogonalul său. Cubica Γ_k, care trece prin M, trece și prin M′. Dar s'a arătat că al noulea punct comun cubicelor ce trec prin A, B, C,

I, I_a, I_b, I_c, H este O şi în demonstraţie nu s'a folosit decât faptul că O şi H sunt puncte isogonale. Analog al noulea punct comun cubicelor care trec prin A, B, C, I, I_a, I_b, I_c, M este M'. Astfel cubica Γ_k, ce trece prin M, trecând şi prin punctele A, B, C, I, I_a, I_b, I_c, trece şi prin M'.

6. Cum unui punct M îi corespunde o cubică Γ_k, urmează proprietatea:

Fie M, M' *două puncte isogonale în planul triunghiului* ABC; $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *triunghiurile lor podare;* M_a, M_b, M_c *punctele care împart în raportul* k *dreptele* $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$; M'_a, M'_b, M'_c *puncte analoage pentru* M'.

Dacă dreptele AM_a, BM_b, CM_c *sunt concurente, atunci dreptele* AM'_a, BM'_b, CM'_c *sunt de asemenea concurente.*

IOAN A. ILIE.

ASUPRA UNOR ASOCIERI DE LINII ŞI SUPRAFEŢE

1°. Fie două curbe plane

$$(C_1)\quad y = f_1(x) \qquad \text{şi} \qquad (C_2)\quad y = f_2(x).$$

Numim *secantă* $f_2(x)$ *a curbei* (C_1) dreapta S_2

$$(1)\qquad Y - f_1(x) = f_2(x)\,(X - x),$$

x şi $f_1(x)$ fiind coordonatele carteziene rectangulare ale unui punct M_1 al curbei C_1.

Această secantă reprezintă analitic o extindere a tangentei la curba C_1.

In adevăr, intersectând-o cu

$$Y = f_1(X),$$

găsim

$$f_1(X) - f_1(x) - f_2(x)\,(X - x) = 0,$$

ecuaţie care trebue să admită $X = x$ ca rădăcină dublă pentru ca (1) să taie curba în două puncte confundate, deci trebue să aibă rădăcina x comună cu

$$f'_1(X) - f_2(x) = 0,$$

de unde

$$f_2(x) = f'_1(x).$$

Aşa dar, tangenta în punctul $[x, f_1(x)]$ la curba $y = f_1(x)$ este o secantă $f_1'(x)$ a curbei (C_1).

Câteva proprietăţi ale secantelor (1) au fost date în *Gazeta Matematică*, vol. XLVI, pag. 245.

In prezentul articol le vom continua şi vom extinde noţiunea în spaţiul cu 3 dimensiuni.

2°. Fie S_1 secanta $f_1(x)$ a curbei (C_2); ecuaţia dreptei S_1 este

$$(2) \qquad Y - f_2(x) = f_1(x)(X - x),$$

$x, f_2(x)$ fiind coordonatele punctului M_2 al curbei C_2.

Numim *secante reciproce* ale curbelor C_1, C_2 dreptele S_1, S_2 definite mai sus. Punctul lor de întâlnire este $M[x+1, f_1(x)+f_2(x)]$.

Locul geometric al punctului M, când x variază, este curba

$$(3) \qquad Y = f_1(X - 1) + f_2(X - 1).$$

Cazuri particulare:

a) Locul geometric al intersecţiei secantelor reciproce a două drepte este o dreaptă.

b) Locul geometric al intersecţiei secantelor reciproce a două parabole este o parabolă.

c) Locul geometric al intersecţiei secantelor reciproce a două hiperbole echilateră este o hiperbolă echilateră.

3°. Să considerăm perpendiculara (N_2) pe dreapta S_2 în M_1:

$$(4) \qquad X - x + f_2(x)[Y - f_1(x)] = 0$$

pe care să o numim *normala generalizată* $f_2(x)$ a curbei (C_1). Fie şi (N_1) normala generalizată $f_1(x)$ a curbei (C_2):

$$(5) \qquad X - x + f_1(x)[Y - f_2(x)] = 0.$$

Să numim dreptele (N_1) şi (N_2) *normale generalizate reciproce* ale curbelor (C_2) şi (C_1). (N_1) şi (N_2) se intersectează în punctul $N(x + f_1(x) f_2(x), 0]$. Deci:

Normalele generalizate reciproce a două curbe se întâlnesc pe axa x'x.

4°. Dacă

$$f_2(x) = \frac{1}{f_1(x)},$$

$N[x + 1, 0]$. Deci normalele generalizate ale curbelor plane în raport cu curbele ce au ordonatele inverse, formează un fascicol.

Cum razele a două normale generalizate reciproce ale acestui fascicol descriu pe dreapta $X = x$ două diviziuni involutive, rezultă că:

„Fascicolul normalelor generalizate ale tuturor curbelor unui plan în raport cu curbele de ordonate inverse, pentru aceeași abscisă, este transformatul prin involuție al fascicolului normalelor generalizate reciproce. Razele duble trec prin punctele $D_1(x, 1)$, $D_2(x, -1)$".

5°. *Fie* S_2, S_3, S_1 *secantele* $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_1(x)$ *ale curbelor* C_1, C_2, C_3 $[y = f_3(x)]$ *pentru aceeași valoare a lui* x.

Oricare ar fi curbele C_1, C_2, C_3 *de ordonate diferite, dreptele* S_1, S_2, S_3 *nu sunt concurente.*

Avem

$$(S_2)\quad Y - f_2(x)\,X + x f_2(x) - f_1(x) = 0,$$
$$(S_3)\quad Y - f_3(x)\,X + x f_3(x) - f_2(x) = 0,$$
$$(S_1)\quad Y - f_1(x)\,X + x f_1(x) - f_3(x) = 0.$$

Cum determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2(x) & x f_2(x) - f_1(x) \\ 1 & f_3(x) & x f_3(x) - f_2(x) \\ 1 & f_1(x) & x f_1(x) - f_3(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_2(x) & f_1(x) \\ 1 & f_3(x) & f_2(x) \\ 1 & f_1(x) & f_3(x) \end{vmatrix}$$

$$= f_1^2(x) + f_2^2(x) + f_3^2(x) - f_1(x) f_2(x) - f_2(x) f_3(x) - f_3(x) f_1(x)$$

$$= \frac{1}{2}[(f_1(x) - f_2(x))^2 + (f_2(x) - f_3(x))^2 + (f_3(x) - f_1(x))^2] > 0$$

dreptele S_1, S_2, S_3 nu sunt concurente.

6°. Se dau suprafețele

$$(S_1)\quad Z = f_1(x, y)\quad,\quad (S_2)\quad Z = f_2(x, y)\quad,\quad (S_3)\quad Z = f_3(x, y).$$

Numim plan *secant* $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ în punctul $M_1[x, y, f_1(x, y)]$ al suprafeței (S_1), planul $S_{2,3}$:

$$(6)\quad Z - f_1(x, y) = f_2(x, y)(X - x) + f_3(x, y)(Y - y).$$

Când

$$f_2(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x}\quad,\quad f_3(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y},$$

(6) este planul tangent în M_1 la (S_1).

Să considerăm şi planele secante

$$(S_{31}) \quad Z - f_2(x,y) = f_3(x,y)(X-x) + f_1(x,y)(Y-y)$$

$$(S_{12}) \quad Z - f_3(x,y) = f_1(x,y)(X-x) + f_2(x,y)(X-y).$$

Vom spune că planele S_{12}, S_{23}, S_{31} formează *ciclul planelor secante* ale suprafeţelor S_3, S_1, S_2 respectiv în raport cu (S_1, S_2), (S_2, S_3), (S_3, S_1).

„Locul geometric al intersecţiei unui ciclu de plane secante a trei suprafeţe oarecare este o dreaptă perpendiculară pe planul xoy“.

Rezolvând sistemul format de ecuaţiile planelor S_{12}, S_{23}, S_{31}, se găseşte punctul intersecţiei

$$M[x+1,\ y+1,\ f_1(x,y)+f_2(x,y)+f_3(x,y)].$$

Când x, y variază, M descrie suprafaţa

$$(7) \quad Z = f_1[X-1, Y-1] + f_2[X-1, Y-1] + f_3[X-1, Y-1]$$

Când x, y variază legate prin relaţia

$$y = \varphi(x),$$

M descrie pe (7) curba de intersecţie a suprafeţei cu cilindrul

$$Y = \varphi(X-1) + 1.$$

In particular, când x, y sunt legate linear,

$$y = mx + n,$$

M descrie pe (7) o curbă plană.

7°. Fie suprafeţele

$$(S_1) \quad Z = f_2(x,y) - f_3(x,y)$$

$$(S_2) \quad Z = f_3(x,y) - f_1(x,y)$$

$$(S_3) \quad Z = f_1(x,y) - f_2(x,y).$$

Planele secante ale acestor suprafeţe, formând un ciclu, se întâlnesc într'un punct, al cărui loc geometric este planul *xoy*.

8°. Considerând punctul $M_1[x, y, f_1(x,y)]$ pe suprafaţa S_1, să numim *normală generalizată* $f_2(x,y)$, $f_3(x,y)$ a suprafeţei S_1 dreapta (N_{23}) de ecuaţii

$$\frac{X-x}{f_2(x,y)} = \frac{Y-y}{f_3(x,y)} = \frac{Z-f_1(x,y)}{-1},$$

perpendiculară pe planul secant S_{23}. Analog se obțin dreptele

$$(N_{31}) \quad \frac{X-x}{f_3(x,y)} = \frac{Y-y}{f_1(x,y)} = \frac{Z-f_2(x,y)}{1-1},$$

$$(N_{12}) \quad \frac{X-x}{f_1(x,y)} = \frac{Y-y}{f_2(x,y)} = \frac{Z-f_3(x,y)}{-1}.$$

Dreptele (N_{12}), (N_{13}), (N_{23}) *care formează ciclul normalelor generalizate ale suprafețelor* S_1, S_2, S_3, *nu sunt în același plan, oricare ar fi aceste suprafețe.*

In adevăr, (N_{23}) întâlnește planul *xoy* în punctul

$$P_1[x+f_1(x,y)f_2(x,y),\ y+f_1(x,y)f_3(x,y),\ 0].$$

Dreptele (N_{31}), (N_{12}) întâlnesc planul *xoy* în punctele

$$P_2[x+f_2(x,y)f_3(x,y),\ y+f_2(x,y)f_1(x,y),\ 0],$$

$$P_3[x+f_3(x,y)f_1(x,y),\ y+f_3(x,y)f_2(x,y),\ 0],$$

Aceste puncte nu sunt colineare, deoarece determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+f_1(x,y)f_2(x,y) & y+f_1(x,y)f_3(x,y) & 1 \\ x+f_2(x,y)f_3(x,y) & y+f_2(x,y)f_1(x,y) & 1 \\ x+f_3(x,y)f_1(x,y) & y+f_3(x,y)f_2(x,y) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_2(x,y)[f_3(x,y)-f_1(x,y)] & f_1(x,y)[f_2(x,y)-f_3(x,y)] \\ f_1(x,y)[f_3(x,y)-f_2(x,y)] & f_3(x,y)[f_2(x,y)-f_1(x,y)] \end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma f_1^2(x,y)\, f_2^2(x,y) - f_1(x,y)\, f_2(x,y)\, f_3(x,y)\, \Sigma f_1(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2}\{f_1^2(x,y)[f_2(x,y)-f_3(x,y)]^2 + f_2^2(x,y)[f_3(x,y)-f_1(x,y)]^2 +$$

$$+ f_3^2(x,y)[f_1(x,y)-f_2(x,y)]^2\} > 0,$$

ceea ce dovedește că *normalele generalizate ciclice nu sunt coplanare.*

9°. *Oricare ar fi ciclul de normale generalizate, notând* $P_1P_2P_3$ *triunghiul intersecțiilor lor cu planul* xoy, *raportul dintre aria acestui triunghiu și suma patratelor laturilor sale, este constant.*

In adevăr, aria $P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\Delta$, iar

$$\Sigma \overline{P_1P_2}^2 = \Sigma\{f_2^2(x,y)[f_3(x,y)-f_1(x,y)]^2 + f_1^2(x,y)[f_2(x,y)-f_3(x,y)]^2\}$$

$$= 8 \text{ aria } P_1P_2P_3.$$

10°. Dacă se consideră în planul *xoy* punctul $P(x, y, o)$, coeficientul unghiular al dreptei PP_1 este

$$m_1 = \frac{f_1(x, y)\, f_3(x, y)}{f_1(x, y)\, f_2(x, y)} = \frac{f_3(x, y)}{f_2(x, y)}.$$

Produsul coeficienților unghiulari ai dreptelor PP_1, PP_2, PP_3 *este egal cu* 1, *oricare ar fi suprafețele* S_1, S_2, S_3.

La fel se găsește că:

Produsul coeficienților unghiulari ai laturilor triunghiului $P_1P_2P_3$ *este* 1.

11°. Noțiunile definite pentru spațiile cu două și trei dimensiuni se pot extinde la un spațiu cu *n* dimensiuni, iar proprietățile stabilite își află corespondentele.

C. IONESCU-BUJOR.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

Din cauza întreruperii cursurilor școalelor secundare și superioare la 1 Aprilie 1944, concursul *Gazetei Matematice*, anunțat pentru data de 20 Aprilie 1944, nu va mai avea loc.

DELEGAȚIA.

PREMIUL „INGINER ALEXANDRU ROȘU"

Subsemnații, membri în Comisiunea pentru decernarea premiului « ING. ALEXANDRU ROȘU », cercetând volumul XLVIII al *Gazetei Matematice* pentru alegerea celui mai harnic corespondent al *Gazetei*, elev de liceu, am constatat următoarele:

In cursul volumului XLVIII hărnicia corespondenților *Gazetei*, elevi de liceu, încearcă o discontinuitate.

Obișnuiți în ultimii ani să găsim în Tabloul numelor la tabla de materie a *Gazetei Matematice*, șiruri întregi de numere, care să ne conducă la alegerea corespondentului care să merite cu adevărat numele de cel mai harnic, anul acesta am avut o

mare supriză. Şirurile impresionante de numere, nu mai întovărăşeau ca altădată numele elevilor de liceu. Pentru aceştia, volumul XLVIII al *Gazetei Matematice* a fost se pare mai puţin ospitalier. Astfel încât, dacă regulamentul nu ar fi pretins decernarea anuală a premiului, anul acesta am fi opinat ca premiul să nu se mai acorde. Totuşi, trebuind să facem o alegere, cercetând volumul XLVIII, am constatat că, din slaba activitate depusă de elevii de liceu, aceea a D-lui VASILIU GH. DUMITRU, elev clasa a VII-a liceul Militar din Iaşi, a fost puţin mai spornică.

Astfel D-sa a rezolvat un număr de 19 probleme, dintre care soluţia problemei 5720, merită a fi remarcată, împreună cu soluţiile date problemelor 2647, 5562 şi 5679.

De asemenea, D-l VASILIU GH. DUMITRU, a propus în cursul volumului XLVIII problema 5724 şi exerciţiul Nr. 16.

Pe coperta numerelor volumului XLVIII, D-l VASILIU GH. DUMITRU, figurează cu 29 probleme rezolvate, trimise spre publicare.

Faţă de cele de mai sus, propunem ca premiul « ING. ALEXANDRU ROŞU », să se acorde pentru anul XLVIII, D-lui VASILIU GH. DUMITRU, azi elev clasa a VIII-a liceul Militar Iaşi.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. ALEXANDRU ROŞU"

Ing. I. CHIŢULESCU, ALEXANDRU AL. ROŞU, Ing. D. STOICA.

Aprobat de Adunarea generală din 9 Februarie 1944.

(ss) AL. BUNESCU, I. CHIŢULESCU, AL. PANTAZI.

NOTE MATEMATICE

31. *Redacţionale.* Printre rezolvitorii problemei 5652 se va considera şi D-l Sublt. C. PANTELIMON a cărui soluţie ne-a parvenit în timpul când redijarea problemei era la cules.

M. G.

32. *Asupra problemei 4111.* Unii corespondenţi îmi cer să dau oarecare explicaţii la enunţul problemei 4111 care se prezintă cam misterios. Acel enunţ este:

Care sunt persoanele care îşi pot serba ziua naşterii în aceeaşi zi a lunii?

Tot misterul stă în aceea că eu am avut în vedere la această problemă anul adevărat, astronomic care e mai mare ca anii ordinari civili şi mai mic decât cei bisericeşti aşa că ora de naştere a unei persoane se schimbă dela un an la altul şi poate trece din o zi în alta. Sper că cu aceasta am făcut să dispară misterul.

I. IONESCU.

33. *Cuvântul vector.* In ziarul *Universul* din 23 Februarie 1944, D-l General ST. BURILEANU publică următoarea notiţă:

„Iată un cuvânt din Geometrie al cărui plural după o recomandaţie a Academiei, ar fi vectori, deci un vector, doi vectori.

In anul 1899 am publicat o carte de Cinematică *în care printre primii, făceam cunoscută la noi în ţară teoria vectorului, eu am scris:* un vector, două vectoare, *căci aşa îmi suna mie mai bine la ureche.*

Şi dacă îmi suna astfel este că eram obişnuit să aud: un sector, două sectoare; un raportor, două raportoare; un motor, două motoare, un radiator, două radiatoare *şi aşa mai departe.*

Numai pentru fiinţele însufleţite avem şi singularul şi pluralul masculin; astfel un doctor, doi doctori; un croitor, doi croitori, *etc. Cuvântul crăpător face pluralul* doi crăpători *când e vorba de oameni cari crapă lemnele, însă* un crăpător, două crăpătoare, *când e vorba de lopeţile acelea rotunde de lemn cu care se bagă mălaiul sub ţest.*

Atunci cum e mai bine de zis: un vector, doi vectori *sau* un vector, două vectoare *?*

In ceea ce mă priveşte eu am zis un vector, două vectoare *în prima mea carte de* Cinematică *când mai nimeni nu ştia la noi în ţară ce este un vector şi tot astfel zic şi în cărţile mele actuale de Mecanică, regretând că sub acest raport nu pot fi de acord cu Academia noastră“.*

Gazeta Matematică a urmat totdeauna modul de scriere recomandat de Academia Română, şi acelaşi lucru îl facem şi acum, mai ales că cuvântul *vectori* era în uz când D-l General ST. BURILEANU a scris Cinematica sa. Eu am făcut Mecanica raţională la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti în anul 1892 cu Profesorul GHEORGHE KIRILOV, care începea cursul său

de Mecanică cu Teoria vectorilor, pe care îi folosea la reprezentarea mărimilor mecanice dirijate, ca *iuţeli, acceleraţii, forţe*, etc. Acel curs l-am redijat şi litografiat eu în 1892, şi a doua oară în 1894, unde pluralul cuvântului *vectori* era folosit încă de câţiva ani înainte. Deci Academia Română a fost de acord cu forma care era în uz înainte de 1899.

I. IONESCU.

34. *Extinderi în legătură cu indicatorii.* Fie $I_x(n)$ şi $S_x(n)$ respectiv numărul şi suma numerelor prime cu n conţinute de şirul de numere:

$$1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ldots(x-1)\,;\ x \qquad (A)$$

şi fie a un număr întreg mai mic decât n $(a < n)$.

Observăm că dacă $\alpha < n$ este un număr prim cu n şi $(n-\alpha)$ este prim cu n, deci şirul de numere:

$$a+1\,;\ a+2\,;\ \ldots\ (n-1) \qquad (B)$$

conţine atâtea numere prime cu n, câte conţine şi şirul:

$$1\,;\ 2\,;\ \ldots\,;\ n-a-1\,; \qquad (C)$$

prin urmare, ţinând seama de definiţiile de mai sus:

$$I_a(n) + I_{n-a-1}(n) = I_{n-1}(n) = I_n(n) = \varphi(n)$$

$$\therefore\ I_a(n) = \varphi(n) = I_{n-a-1}(n). \qquad (1)$$

Analog se stabileşte relaţia:

$$I_{tn+a}(n) = t\varphi(n) + I_a(n) \qquad (2)$$

în care t este un număr întreg şi pozitiv.

In (1) dăm lui a, toate valorile dela 1 până la $(n-2)$ şi adunăm:

$$\therefore\ \sum_1^{n-2} I_i(n) = (n-2)\varphi(n) - \sum_1^{n-2} I_i(n)$$

sau

$$\sum_1^{n-2} I_i(n) = \frac{n-2}{2}\varphi(n).$$

Deci

$$\sum_1^{n} I_i(n) = \sum_1^{n-2} I_i(n) + I_{n-1}(n) + I_n(n) = \sum_1^{n-2} I_i(n) + 2\varphi(n)$$

$$\therefore\ \sum_1^{n} I_i(n) = \frac{n+2}{2}\varphi(n). \qquad (3)$$

Plecând dela (2) printr'un procedeu asemănător, se stabileşte relaţia:

$$\sum_{1}^{n} I_{tn+i}(n) = nt\varphi(n) + \frac{n+2}{2}\varphi(n)$$

din care rezultă:

$$\sum_{1}^{tn} I_i(n) = \frac{t^2 n + 2t}{2}\varphi(n). \qquad (4)$$

Fie $\alpha_1 = 1$; α_2; ...; α_r, $r = I_{n-a-1}$, numerele prime cu n conţinute de şirul (C), şirul (B) conţine în acest caz, următoarele I_{n-a-1} numere prime cu n:

$$(n-1);\ (n-\alpha_2);\ \ldots\ (n-\alpha_r)$$

şi deci

$$S_a(n) + n\, I_{n-a-1}(n) - S_{n-a-1} = S_n(n) = \sigma(n)$$

$$\therefore\ S_a(n) = \sigma(n) - n\,[\varphi(n) - I_a] + S_{n-a-1}$$

$$= n\, I_a + S_{n-a-1} - \frac{n\varphi(n)}{2}$$

deci

$$S_a(n) = n\, I_a + S_{n-a-1} - \sigma(n) \qquad 5)$$

La fel se stabileşte

$$S_{tn+a}(n) = S_{tn}(n) + tn\, I_a(n) + S_a(n)$$

$$\therefore\ S_{tn+n}(n) = S_{tn}(n) + tn\varphi(n) + \sigma(n) = S_{tn}(n) + (2t+1)\,\sigma(n)$$

deci:

$$S_{tn}(n) = \sigma(n) + 3\sigma(n) + \ldots + (2t-1)\,\sigma(n) = \frac{t^2 n}{2}\varphi(n)$$

şi prin urmare

$$S_{tn+a}(n) = t^2\,\sigma(n) + tn\, I_a(n) + S_a(n) \qquad (6)$$

Din cele mai sus, rezultă:

$$S_{tn} = t^2\,\sigma(n) = \frac{t^2 n\varphi(n)}{2} = \frac{tn\, I_{tn}(n)}{2}$$

care generalizează relaţia clasică:

$$\sigma(n) = \frac{n\varphi(n)}{2}.$$

Vom calcula acum suma: $\sum_{1}^{n} S_i(n)$.

Pentru aceasta observăm cu un număr α prim cu n n a mic decât el figurează în sumele:

$$S_\alpha(n) \; ; \; S_{\alpha+1}(n) \ldots S_n(n)$$

deci în suma $\sum_1^n S_i(n)$ se găseşte de $(n+1-\alpha)$ ori, prin urmare

$$\sum_1^n S_i(n) = \Sigma(n+1-\alpha)\alpha$$

unde suma din membrul al II-lea se întinde asupra tuturor numerelor α prime cu n şi mai mic ca el

$$\therefore \sum_1^n S_i(n) = (n+1)\Sigma\alpha - \Sigma^2$$

ori:

$$\Sigma\alpha = \sigma(n) = \frac{n\varphi(n)}{2}$$

şi

$$\Sigma\alpha^2 = \frac{1}{6} n\,[2n\varphi(n) + (-1)^s \varphi(p \,.\, q \,.\, r \ldots)]$$

unde p, q, $r\ldots$ sunt cei s factori primi cari intră în compunerea lui n, relaţie stabilită de mine şi care formează prima parte a problemei 3733, rezolvată la pag. 465, vol. XLVII, G. M.

Deci:

$$\sum_1^n S_i(n) = \frac{1}{6} n\,[(n+3)\varphi(n) - (-1)^s \varphi(p \,.\, q \,.\, r \ldots)] \quad (7)$$

Ţinând seamă de (7) avem încă:

$$\sum_1^n S_{tn+i}(n) = \frac{1}{6} n\,[(3t^2n+3tn+6t+n+3)\varphi(n) - (-1)^s \varphi(p.q.r\ldots)]$$

şi

$$\sum_1^{tn} S_i(n) = \frac{tn}{6}\left[\left(\frac{n(t-1)(2t-1)}{2} + \frac{3(n+2)(t-1)}{2} + n + 3\right)\varphi(n) - (-1)^s \varphi(p \,.\, q \,.\, r \ldots)\right].$$

Am stabilit aceste relaţii, pentrucă cele asemănătoare precum şi marea majoritate a celorlalte, conţinute în articolul publicat în G. M. vol. XLV, pag. 20 şi u., sunt incorecte. Eroarea de acolo, cum uşor se poate controla, provine dintr'o confuzie de indici.

I. B. FLORESCU.

35. *Asupra problemei 3041* [1]). Punem: $x = n + 1$ şi avem

$$P(x) \equiv x^{n^2+2n+1} - x^{n^2+n+2} + x^{n^2+n+1} - x^{n^2+n}$$

$$- x^{2n+2} + x^{n+3} - x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

Vom presupune că n dela exponent este independent de $n + 1 = x$.

Observăm acum lesne că:

$$P(1) = 0.$$

Deci polinomul se împarte exact cu $x - 1 = n$.

Observăm apoi că prima derivată a polinomului în raport de x şi pentru $x = 1$, are valoarea:

$$P'(1) = (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + n + 2) + (n^2 + n + 1)$$

$$- (n^2 + n) - (2n + 2) + (n + 3) - 3 + 4 - 2 = 0.$$

Deci şi prima derivată a lui $P(x)$ se împarte cu $x - 1 = n$.

De asemenea, observăm că:

$$P''(1) = (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 2n) - (n^2 + n + 2)(n^2 + n + 1)$$

$$+ (n^2 + n + 1)(n^2 + n) - (n^2 + n)(n^2 + n - 1)$$

$$- (2n + 2)(2n + 1) + (n + 3)(n + 2) - 6 + 4.$$

Inlăturând termenii divizibili cu n, ne rămâne:

$$-(n^2+n+2)(n^2+n+1)-(2n+2)(2n+1)+(n+3)(n+2)-2=Mn.$$

Prin urmare şi derivata a doua a polinomului se împarte exact cu $n = x - 1$.

Păstrând acum din derivata a treia numai termeni nedivizibili cu n (pentru $x = 1$), avem:

$$(n + 3)(n + 2)(n + 1) - 6 = Mn.$$

Deci şi derivata a 3-a se împarte exact cu $n = x - 1$.

Produsul $(n + 3)(n + 2)(n + 1)$ din derivata a 3-a ne arată că şi derivatele 4, 5, 6 vor fi divizibile cu $n = x - 1$.

Aşa dar expresia dată se divide cu n^6.

---

1) A se vedea soluţia dela pag. 267 şi nota dela pag. 300, Vol. XLVIII, *Gazeta Matematică*.

In general putem afirma că o expresie de forma:

$$E = \sum_{1}^{k} A_i (n+1)^{\alpha_i \cdot n + \beta_i} + B$$

se divide cu n^p dacă avem:

$$\sum_{1}^{k} \beta_i \cdot (\beta_i - 1)(\beta_i - 2) \ldots (\beta_i - p) \cdot A_i = Mn.$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Politechnica din Bucureşti. Facultăţile de: Construcţii, Electro-mecanică şi Mine

Examenul de admitere. Octombrie 1943. Lucrări scrise

Geometrie plană. Printr'un punct I situat pe bisectoarea unui unghiu cu vârful în A se duce o dreaptă variabilă care taie laturile unghiului în punctele M şi N. Perpendiculara pe bisectoare taie aceleaşi laturi respectiv în B şi C. Prin I se duce şi o paralelă la AB care taie pe AC în P.

Să se arate:

1. Că din asemănarea triunghiurilor AMN şi PIN rezultă:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{IP} = \text{constant.}$$

2. Că:

$$\frac{\text{aria triungh. AMN}}{AM \times AN} = \text{constant} = \frac{AI \times IC}{AB^2}.$$

3. Dacă unghiul A este de 60° avem:

$$AC = 2\,IC.$$

Să se construiască în acest caz dreapta MN care trece prin I, astfel că aria triunghiului AMN să fie dublul ariei triunghiului ABC. Se va observa că suma şi produsul segmentelor AM şi AN sunt cunoscute. Să se facă exact construcţia pentru cazul AI = 4 cm.

Geometrie în spaţiu. In cercul de bază al unui con circular drept se înscrie un patrat ABCD ale cărui vârfuri se unesc cu vârful V al conului.

1. Să se afle volumul piramidei VABCD ştiind că suprafaţa laterală a conului se desfăşoară după un semicerc de rază dată R.

2. Se consideră sfera cu centrul în V şi care trece prin cercul de bază a conului. Să se afle, în acelaşi caz, suprafaţa calotei sferice mărginite de acest cerc.

Algebră. Se consideră funcţiunea:

$$y = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2px + q}$$ şi se cere:

1°. Să se determine parametrii a, b, p şi q astfel încât funcţiunea să aibă pentru $x = -1$ o valoare maximă egală cu 2, şi pentru $x = +1$ o valoare minimă egală cu 4.

2°. Să se reprezinte apoi grafic variaţia funcţiunii ce satisface la condiţiile de mai sus.

3°. Să se determine cu trei zecimale exacte abscisa punctului de intersecţie cel mai la stânga, dintre curba reprezentativă a funcţiunii dela punctul 2° şi dreapta $y = x + 5$.

Geometrie analitică. Se dă triunghiul format din dreptele

AB $y - 2x + 1 = 1$, BC $y + x - 5 = 0$, CA $4y + x - 5 = 0$.

1. Să se afle coordonatele vârfurilor A, B, C ale triunghiului, ecuaţia cercului circumscris acestui triunghiu, şi coordonatele punctului M în care înălţimea coborîtă din B taie acest cerc.

2. Să se calculeze coordonatele proiecţiilor A', B', C' ale lui M respectiv pe BC, CA şi AB.

3. Să se verifice că A', B' şi C' sunt în linie dreaptă.

4. Fie A", B", C" simetricele lui M respectiv faţă de dreptele BC, CA şi AB. Să se calculeze coordonatele lui A", B", C" precum şi aria triunghiului A", B", C".

5. Să se explice rezultatele dela Nr. 3) şi 4).

Se vor scrie pe foaie toate calculele.

Mecanica. *A)* **Statica.** 1. Să se găsească poziţia centrului de greutate al unui disc din tablă de fier de rază R având o gaură de diametru R şi tangentă discului.

2. Un om cântărind 70 kg susţine o greutate de 15 kg cu ajutorul unui fir petrecut peste un scripete.

a) Care este reacţiunea omului pe teren când firul este în poziţie verticală?

b) Cum variază reacţiunea când omul se depărtează de scripete şi care este reacţiunea când firul este inclinat cu 45°?

c) Cât de mare trebue să fie pasul omului pentru ca să poată susţine greutatea în cazul firului înclinat cu 45°?

Firul şi picioarele omului sunt în acelaşi plan vertical, iar firul întâlneşte verticala centrului de greutate al omului la 1,20 m deasupra terenului.

B) **Cinematica.** 1. Care este definiţia vitesei şi a acceleraţiei şi care sunt elementele lor caracteristice?

2. Dintr'un robinet pică apă cu cadenţa de 120 picături pe minut. La ce distanţă se va găsi picătura a doua de prima după ce aceasta a parcurs 20 m?

Toate chestiunile sunt obligatorii.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin dela Section scientifique de l'Académie Roumaine. Bucureşti 1944. M. DRĂGANU: Remarques sur les changements d'état adiabatique réversibles. D. BARBILIAN: Topologisches Kennzeichnen. ŞERBAN GHEORGHIU: Sur la théorie de l'équilibre économique.

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXIV. Nr. 1 Martie 1944. I. V. MĂTIEŞ: Contribuţii la rezolvarea congruenţelor de grădul *n* şi ordinul *p*. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

I. LINTEŞ. Le problème de la pénétration des projectiles dans un obstacle et de la perforation des blindages. (Ext. din Bul. de l'Ecole Polytechnique de Buc.).

I. LINTEŞ. Les accélérations du projectile dans l'âme. (Ext din acelaşi Bul.).

G. MIHOC. *Tratat de Matematici actuariale.* Bucureşti 1943. D-l G. MIHOC a predat la Şcoala de Statistică în 1931—1932 un curs de *matematici actuariale* care a fost litografiat de către PAUL MARINI, licenţiat în matematici, iar în anul 1942—1943 un curs la Institutul de Statistică, Actuariat şi Calcul dela Universitatea din Bucureşti de sub Direcţiunea D-lui Profesor OCTAV ONICESCU, curs pe care l-a tipărit D-l G. MIHOC în anul 1943. Prin această carte se îmbogăţeşte literatura matematică română cu o carte care îi lipsea, căci în ea se tratează prin metodele cele mai noi chestiuni teoretice şi practice privitoare la asigurări individuale şi sociale.

Cartea începe cu chestiuni de *Teoria mortalităţii şi studiul funcţiunilor biometrice.* Se presupune cunoscută Teoria probabilităţilor şi matematici superioare ca ecuaţii diferenţiale şi integrale. Pentru alcătuirea Tablelor de mortalitate, bazate pe date statistice cu rezultate discontinui cu goluri care trebuesc împlinite, autorul se ocupă pe larg de metodele de ajustare grafice, mecanice, analitice, printre care şi o metodă nouă a D-lui O. ONICESCU, prin curbe parabolice. Se descriu apoi metodele de interpolaţiune ale lui NEWTON şi LAGRANGE şi alte chestiuni privitoare la interpolaţiuni.

Cap. III se ocupă cu construcţia *Tablelor de mortalitate* şi cu *Studiul funcţiunilor biometrice.* La finele tratatului sunt date Tablele de mortalitate româneşti întocmite de M. SANIELEVICI şi N. PRAPORGESCU pe baza recensământului din 1900 precum şi *tablele de comutaţii* respective pentru procentul 4, apoi tablele de mortalitate făcute de M. SANIELEVICI şi G. MIHOC pe baza recensământului din 1913 cu tablele de comutaţie respective cu 4%. La fine se reproduce şi renumita tablă H a celor 20 de Societăţi de asigurare engleze cu table de comutaţie cu $3\frac{1}{2}\%$.

După aceste preliminări se intră în studiul asigurărilor pe viaţă şi al rentelor viagere cu teoria rezervelor corespunzătoare.

Ultima parte a tratatului are *asigurările sociale:* invalidităţi, pensiuni pentru văduve şi orfani. Autorul nu se ocupă de asigurările care nu se obişnuesc în practica Societăţilor noastre de asigurare ca acelea pentru cazuri

de boală, de căsătorii, de responsabilitatea funcţionarilor, etc. La timp sperăm că autorul va complecta opera sa şi cu chestiuni de această natură pentru a ne da o carte complectă de Teoria asigurărilor.

Cartea D-lui G. MIHOC tratează chestiunile pe baza metodelor celor mai noi şi este un tratat excelent pentru specialişti redactat şi tipărit cu multă îngrijire. Chestiunile sunt lămurite prin exemple numerice şi probleme practice numeroase. Cartea conţine 335 pagine de 250×170 şi costă 2.000 lei. Scump, dar face!

I. IONESCU.

CERERI

329. In legătură cu nota 33 pe care o public în Nr. de faţă, aş dori ca cineva să cerceteze condicele vechi de prezenţă a profesorilor Şcoalei naţionale de Poduri şi Şosele, cu sumarele lecţiunilor făcute, spre a se vedea când a început Profesorul GHEORGHE KIRILOV să facă Teoria vectorilor la începutul cursului său de mecanică. Tot aşa să se cerceteze dacă SPIRU HARET a vorbit de vectori la cursul său de mecanică dela Facultatea de ştiinţă din Bucureşti sau MILTIADE TZONY la Iaşi. Cataloagele vechi ale fostei Şcoale naţionale de Poduri şi Şosele se găsesc depuse la Arhivele Statului.

I. I.

DIVERSE

a) **Adunările Societăţii „Gazeta Matematică"**

In adunarea generală dela 9 Februarie 1944 au fost aleşi membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, D-nii: G. BAZACOV, ING. N. G. CARANFIL, N. NEGOESCU, ING. M. NEICU, ING. C. C. POPOVICI, ING. N. PROFIRI, ING. M. TUDORAN şi PROF. E. VIŞA.

In adunarea generală dela 16 Februarie 1944 au fost aleşi membri ai societăţii noastre D-nii: PROF. C. CÂRLĂNESCU, AL. POPESCU-ZORICA şi ING. I. ŞAUR.

b) **Redacţionale.** 1. Numărul de faţă apare în 72 pagini, graţie contribuţiei D-lui N. T. DONCIU, care suportă costul imprimării plusului peste numărul normal de 56 pagini lunare.

2. Printre rezolvitorii problemei 5753, a cărei soluţie s'a publicat la pag. 447 din numărul trecut mai trebue adăugaţi D-nii: I. B. ANDRONACHE, A. GH. ANDREI, M. BÂRZESCU, I. GR. ENĂCHESCU, D. D. NACHE şi D. GH. VASILIU, ale căror soluţii au fost primite după ce soluţia problemei fusese trimisă la imprimat.

c) **Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"**

MINISTERUL DE RESBEL. Aritmetica 1876. Bucureşti.

P. STEPHAN. Die Technische Mechanik. I. und II. Teil. Leipzig und Berlin 1904. Două volume.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3546. *Se scriu unul după altul toate numerele întregi consecutive începând cu unu şi se obţine un număr de forma*

1234567891011... 100101102...

Se cere să se găsească câte cifre egale cu 0, 1, 2,... 9 *sunt scrise înaintea cifrei de rang* n, *în numărul astfel format.*

G-L GH. BUICLIU.

Insemnăm cu N un număr de k cifre, pe care îl scriem sub forma

$$N = a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} 10 + a_k .$$

Presupunem că cifra de rang n a numărului din enunţ este cifra a_i a numărului N considerat.

Dela $10^{k-1} - 1$ şi până la N inclusiv, toate numerele au k cifre, deci dela $10^{k-1} - 1$ la a_i sunt $k(N - 10^{k-1}) + i$ cifre.

Să căutăm acum numărul cifrelor numărului format, ca în enunţ, cu numerele dela 1 la $10^{k-1} - 1$, exclusiv acesta din urmă.

Procedăm în felul următor:

Dela 1 la $9 = 10 - 1$ sunt $9 = 9 \times 10^0$ cifre.

Dela 10 la $99 = 10^2 - 1$ sunt $2 \times 90 = 9 \times 2 \times 10$ cifre

. . . . . .

Dela $10^{p-1} - 1$ la $10^p - 1$ sunt $9 \times 10^{p-1}$ numere de câte p cifre, deci în total $9 \times p \times 10^{p-1}$ cifre.

. . . . . .

Rezultă, dacă adunăm, că dela 1 până la $10^{k-1} - 1$ sunt

$$S = 9[1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + \ldots + (k-1) 10^{k-2}]$$

cifre. Suma din paranteză se ştie calcula. Ea a fost calculată cu ajutorul derivatelor în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXI, pag. 340 şi Vol. XXXVI, pag. 227 şi pe cale elementară în nota D-lui G-L GH. BUICLIU din *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVI, pag. 330. Avem:

$$1+2.10+3.10^2+\ldots+(k-1)10^{k-2}=\frac{(k-1)\,10^k-k\,10^{k-1}+1}{9^2}$$

aşa că $$S=\frac{(k-1)\,10^k-k10^{k-1}+1}{9}$$

şi prin urmare numărul cifrelor dela 1 la a_i inclusiv este

$$n=\frac{(k-1)\,10^k-k10^{k-1}+1}{9}+k(N-10^{k-1})+i \quad (1)$$

$$\therefore\ n-\frac{(k-1)\,10^k-k10^{k-1}+1}{9}=k(N-10^{k-1})+i>0 \quad (2)$$

Fie $$E(k)=\frac{(k-1)\,10^k-k10^{k-1}+1}{9}$$

Relaţiunea (1) dă posibilitatea de a determina pe N şi i când se cunoaşte n. In adevăr din (1) se vede că împărţind diferenţa $n-E(k)$ prin k se obţine la cât $N-10^{k-1}$ şi la rest i. Deci dacă se cunoaşte k se deduce atât N cât şi i. Pentru aceasta dăm lui k diferite valori până găsim două valori consecutive k_1 şi k_1+1 pentru care

$$E(k_1)<n<E(k_1+1).$$

Cu aceste valori ale lui k_1 se vede din (2) că se determină k deci N şi i.

Problema revine acum la *a găsi de câte ori o cifră dată* 0, 1, 2,...9 *se repetă în numărul*

$$123\ldots91011\ldots100101\ldots(N-1).$$

Această problemă este cunoscută, ea se găseşte la pag. 3 în *Exercices d'Arthmétique* de J. FITZ-PATRICK şi G. CHEVREL. Iată-i soluţia:

Examinez cifrele semnificative, oprindu-mă la cifra 1, pentru restul cifrelor examenul se face la fel.

1°. Dela 1 la 9 cifra 1 se scrie 1 dată.

2°. Dela 10 la 99 cifra 1 se scrie de 10 ori la stânga numerelor 10—19 şi câte 1 dată la unităţi la fiecare decadă. Deci în total dela 1 la 99 de $1 + 19 = 2 \times 10$ ori.

3°. Dela 100 — 999 cifra 1 se scrie de 100 de ori la stânga, la sute, apoi de 90 de ori la zeci şi de 90 de ori la unităţi, în total de 280 de ori.

Total

$$1^0 + 2^0 + 3^0 = 1 + 19 + 280 = 3 \times 10^2$$

Din aproape în aproape se găseşte că în primele $10^{k-1} - 1$ numere cifra 1 sau ori ce altă cifră semnificativă se întâlneşte de $(k-1)^{k-2}$ ori.

Pentru cifra zero numărătoarea se face la fel găsindu-se că în primele $10^{k-1}-1$ cifra zero se repetă de $\frac{(k-1)\,10^k - k10^{k-1} - 1}{9}$.

Cunoscând de câte ori se află o cifră în primele $10^{k-1} - 1$ numere se calculează, ceea ce este uşor, de câte ori se găseşte acea cifră în numerele dela 10^{k-1} la $N - 1$ şi apoi de câte ori se află în numărul N dela a_1 până la a_i, ceea ce este uşor. Rezultatele se totalizează.

Aplicaţie. Fie $n = 13587$. Prin încercări găsim

$$E(4) = 2889 < n < E(5) = 38889$$

$$\therefore \qquad n - E(4) = 10698.$$

$$\therefore \quad 10698 = k[N - 10^{k-1}] + i = 4[N - 1000] + i$$

$$\therefore \qquad 10698 = 4 \times 2674 + 2.$$

De aici se deduce

$$N = 2674 + 1000 = 3674 \quad \text{şi} \quad i = 2$$

şi atunci numărul format ca în enunţ este

$$12\ldots\overset{\leftarrow\!\shortmid}{\underset{\leftarrow\!\shortmid}{999}}1000\ldots3000\ldots367036713672367\overset{\leftarrow\!\shortmid}{\underset{\leftarrow\!\shortmid}{33}}674\ldots$$

$$n = 13587.$$

Trebue calculat de câte ori se găseşte o cifră dată, înaintea cifrei de rang n, încadrată prin săgeţi în rândul de mai sus.

Procedând prin metoda numărătoarei expusă la început se găseşte că până la cifra a 13587-a inclusiv s'a întrebuinţat:

Cifra	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
de un număr de ori egal cu	1027	2138	2138	1813	1137	1137	1112	1031	1027	1027

Numerele din linia de jos adunate dau la sumă 13587.

PROF. GH. CONSTANTINESCU.

Notă. Se mai cunosc probleme asemănătoare. Inafară de cele citate din J. F.-PATRICK şi G. CHEVREL mai citãm pe următoarea: *Care este valoarea cifrei care ocupă un rang determinat în numărul*

12345... 100101102...

propusă şi rezolvată în *Exercices d'Arthmétique* de J. FITZ-PATRICK şi G. CHEVREL pag. 8 sau în *La Mathématique des jeux* de M. KRAITCHIK, pag. 62.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4070. *Excentricitatea orbitei planetei Mercur fiind* $\frac{1}{5}$, *se cere anomalia excentrică şi anomalia medie a planetei, cunoscând anomalia adevărată egală cu* 200^0.

ST. N. MIREA.

Soluţie dată de D-l OCTAVIAN EM. GHEORGHIU.

u şi w fiind respectiv anomalia excentrică şi adevărată, iar e excentricitatea orbitei unei planete, se ştie că avem

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}$$

aşa încât, rezultă

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \frac{2}{\sqrt{6}}\operatorname{tg} 100^0$$

şi deci

$$u = 203^0 57' 2''.$$

Anomalia medie nt este dată de ecuaţia lui KEPLER, care se scrie sub forma

$$nt = u - \frac{e}{206265} \sin u$$

când anomalia excentrică este exprimată în secunde de arc.

Substituind lui e valoarea dată, iar lui u valoarea mai sus găsită, obţinem după efectuarea calculelor, rezultatul

$$nt = 208^0 36' 9''$$

astfel că problema este rezolvată, fiind de observat că se putea prevede faptul că u şi nt vor fi mai mari decât w, deoarece planeta Mercur la 200^0, a depăşit puţin afeliul unde vitesa sa este minimă.

PROBLEMA 4693. *Se dă ecuaţiunea:*

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0. \qquad (1)$$

a) *Să se formeze ecuaţiunea* $F(y) = 0$ *care are ca rădăcini patratele diferenţelor rădăcinilor ecuaţiei* $f(x) = 0$.

b) *Să se arate că ecuaţia* $F(y) = 0$ *are o singură rădăcină negativă, din care să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiunii* $f(x) = 0$.

c) *Să se determine rădăcina negativă a ecuaţiunii* $F(y) = 0$ *prin metoda rădăcinilor întregi, cu ajutorul căreia să se rezolve, apoi complect ecuaţiunea* $f(x) = 0$.

M. GHERMĂNESCU.

Fie: $y^6 + Q_1 y^5 + Q_2 y^4 + Q_3 y^3 + Q_4 y^2 + Q_5 y + Q_6 = 0$

ecuaţia care are ca rădăcini patratele diferenţelor rădăcinilor ecuaţiei de forma:

$$x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0.$$

Calculând coeficienţi $Q_1, Q_2 \ldots$ după metoda clasică obţinem:

$$Q_1 = 8p_2 - 3p_1^2 \; ; \quad Q_2 = 8p_4 - 2p_3p_1 + 22p_2^2 - 16p_2p_1^2 + 3p_1^4;$$

$$Q_3 = 16p_4p_2 - 6p_4p_1^2 + 26p_3^2 - 30p_3p_2p_1 + 8p_3p_1^3 + 28p_2^3 - 24p_2^2p_1^2 + 8p_2p_1^4 - p_1^6;$$

$$Q_4 = -112p_4^2 + 56p_4p_3p_1 + 24p_4p_2^2 - 32p_4p_2p_1^2 + 6p_4p_1^4 + 48p_3^2p_2 - 25p_3^2p_1^2 - 54p_3p_2^2p_1 + 38p_3p_2p_1^3 - 6p_3p_1^5 + 17p_2^4 - 12p_2^3p_1^2 + 2p_2^2p_1^4;$$

$$Q_5 = -192p_4^2p_2 + 72p_4^2p_1^2 + 216p_4p_3^2 - 120p_4p_3p_2p_1 + 18p_4p_3p_1^3 + 32p_4p_2^3 - 6p_4p_2^2p_1^2 - 54p_3^3p_1 + 18p_3^2p_2^2 + 42p_3^2p_2p_1^2 - 9p_3^2p_1^4 - 26p_3p_2^3p_1 + 6p_3p_2^2p_1^3 + 4p_2^5 - p_2^4p_1^2;$$

$$Q_6 = 256p_4^3 - 192p_4^2p_3p_1 - 128p_4^2p_2^2 + 144p_4^2p_2p_1^2 - 27p_4^2p_1^4 + 144p_4p_1^2p_2 - 6p_4p_3^2p_1^2 - 80p_4p_3p_2^2p_1 + 18p_4p_3p_2p_1^3 + 16p_4p_2^4 - 4p_4p_2^3p_1^2 - 27p_3^4 + 18p_3^3p_2p_1 - 4p_3^3p_1^3 - 4p_3^2p_2^3 + p_3^2p_2^2p_1^2.$$

Particularizând pentru cazul problemei, adică punând

$$p_1 = -3 \; , \; p_2 = 6 \; , \; p_3 = -12 \; , \; p_4 = 8;$$

avem ecuaţia cerută de problemă a patratelor diferenţelor rădăcinilor:

$$F(y) = y^6 + 21y^5 + 163y^4 + 1623y^3 + 5936y^2 + 17856y - 25600 = 0. \qquad (2)$$

b) Teorema lui DESCARTES ne arată că ecuaţia $F(y) = 0$ are o singură rădăcină reală pozitivă şi cel puţin una reală negativă sau cel mult cinci reale negative, aşa încât nu ne dă o preciziune cum cere problema, cel puţin aşa s'ar părea. Insă la o rădăcină reală pozitivă a ecuaţiei (2) corespund 2 rădăcini reale pentru ecuaţia (1) şi deci ea nu are decât 2 rădăcini imaginare conjugate, pentru cari corespunde o singură rădăcină reală negativă pentru ecuaţia (2). Deci ecuaţia(2) are o rădăcină reală pozitivă, una reală negativă şi patru rădăcini imaginare conjugate.

c) Incercând cu divizorii negativi al lui 25600 adică cu:

$$-1, \; -2, \; -4, \; -5, \; -8, \; -16 \ldots$$

constatăm cu -16 este rădăcina negativă cerută. Deci

$$y_1 = (x_1 - x_2)^2 = -16$$

unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei (1).

De aci scoatem $\beta = \pm 2$ de unde x_1, $x_2 = \alpha \pm i\beta$, deoarece rădăcinile negative reale ale ecuației (2) nu pot proveni decât din diferența a două rădăcini imaginare conjugate ale ecuației (1). Pentru determinarea lui α, urmăm procedeul clasic de rezolvare a unei ecuații, când admite rădăcini de forma $\alpha \pm 2i$ și obținem $\alpha = 0$.

Deci primul membru al ecuației (1) se divide prin

$$(x + 2i)(x - 2i) = x^2 + 4,$$

rezultând câtul $x^2 - 3x + 2$, ale cărui zeruri sunt 1 și 2, deci rădăcinile ecuației (1) sunt: 1, 2, $+2i$, $-2i$.

O. ENULESCU.

PROBLEMA 5288. *În ce sisteme de numerație, pătratul unui număr de* n *cifre identice, este egal cu diferența dintre un număr de* 2n *cifre și altul de* n *cifre identice, știind că* $n \geqslant 2$.

STELIAN CETĂȚEANU.

Notând prin B baza sistemului de numerație, iar cu a, b, c cifrele identice ale celor trei numere, traducerea algebrică a cerinței enunțului este ecuația

$$c^2\left(\frac{B^n - 1}{B - 1}\right)^2 = b\,\frac{B^{2n} - 1}{B - 1} - a\,\frac{B^n - 1}{B - 1}$$

care se reduce la următoarea

$$(1) \qquad (B^n - 1)[c^2 - b(B - 1)] = (2b - a)(B - 1)$$

după îndepărtarea factorului multiplicativ

$$\frac{B^n - 1}{B - 1}$$

și care nu poate da soluții.

Este de observat, că *în particular*, ecuația (1) este satisfăcută, dacă

$$(2) \qquad 2b = a \quad \text{și} \quad c^2 = b(B - 1)$$

în care caz *soluțiile nu depind de valoarea lui* n, existând o infinitate, anume

$$(3) \qquad B = m^2 b + 1 \quad , \quad c = mb \quad , \quad a = 2b$$

având deci identitatea

$$(4)\qquad \underbrace{(mb\,mb\ldots mb)^2}_{n\text{ cifre }mb} = \underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ cifre }b} - \underbrace{2b\,2b\ldots 2b}_{n\text{ cifre }2b}$$

numerele fiind scrise în sistemul de numeraţie m^2b+1.

Această soluţie este *banală*, valabilă oricare ar fi $n \geqslant 2$, căci ecuaţia (1) scrisă sub forma

$$(2b-a)(B-1) = k(B^n-1)$$

şi observând că maximul primului membru are loc pentru

$$b = B-1 \quad \text{şi} \quad a = 0$$

arată că

$$2(B-1)^2 > B^n - 1$$

ceea ce necesită $n \leqslant 2$.

Să cercetăm acum, dacă înafara acestei soluţii banale, mai există şi altele şi să începem cu cea mai mică valoare admisibilă a lui n.

Cazul $n = 2$. Ecuaţia (1) este în acest caz

$$(5)\qquad bB^2 - c^2B - a + b - c^2 = 0$$

sau

$$(5')\qquad b(B+1)^2 - (c^2+2b)(B+1) + 2b - a = 0$$

care, privită ca o ecuaţie *algebrică* în $B+1$ va avea ambele rădăcini întregi, dacă b divide numerele c^2+2b şi a, condiţia fiind evident numai *necesară* dar nu şi *suficientă*. Ea va fi îndeplinită însă dacă

$$a = \alpha b \quad \text{şi} \quad c = \beta b$$

astfel că ecuaţia (5) se scrie

$$(6)\qquad B^2 - \beta^2 bB - \alpha + 1 - \beta^3 b = 0,$$

iar condiţia *necesară şi suficientă* ca rădăcinile acestei ecuaţii să fie *numere raţionale* este ca numărul

$$(\beta^2 b+2)^2 + 4\alpha - 8$$

să fie patrat perfect.

Aceasta are loc pentru $\alpha = 2$, regăsind soluţia banală (4).

In general însă, pentru ca ecuaţia (5) să fie posibilă în numere întregi şi pozitive, este *necesar* ca

$$2b - a \begin{cases} = 0 \\ = B + 1 \end{cases}$$

deoarece ea poate fi scrisă sub forma

$$bB^2 - a + b = c^2 (B + 1)$$

care evidenţiază această concluzie.

In primul caz avem

$$b (B - 1) = c^2$$

şi deci regăsim soluţia banală (4) în timp ce în al doilea caz, avem

$$b (B - 1) + 1 = c^2$$

rezultând soluţia efectivă

$$B = m^2 b \pm 2m \quad , \quad c = mb \pm 1 \quad , \quad a = 2b - m^2 b \mp 2m - 1$$

m şi b trebuind astfel alese ca a să fie pozitiv.

Spre exemplificare, dacă B = 10, avem soluţia efectivă unică

$$\boxed{88^2 = 7777 - 33}$$

Cazul $n > 2$. Ecuaţia (1) arată că exceptând soluţia particulară dată la început, nu mai există alta, deoarece cea mai mică bază fiind 2, avem evident

$$2^n - 1 > 2b - a$$

căci b poate fi maximum 1, iar a minimum 0. Deci $B > 2$ vom avea totdeauna

$$B^n - 1 > (2b - a)(B - 1)$$

astfel încât ecuaţia (1) nu poate fi satisfăcută, pentru $n > 2$ decât în cazul particular menţionat la început şi deci, *pentru* $n > 2$ *n'avem decât soluţii banale, independente de valoarea lui* n, *menţionate la început.*

Observaţie. 1°. Este de observat că în enunţ nu era necesară specificarea $n \geqslant 2$, ea putându-se demonstra.

2°. Au găsit soluţiile banale (4) D-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi MIRCEA L. RUSU fără a studia însă singurul caz care prezintă într'adevăr interes şi anume cazul $n = 2$. D-l P. P. DRĂGHICESCU a demonstrat că este necesar ca $n > 2$, iar D-l M. L. RUSU a încercat studiul cazului $n = 2$, fără a-l duce la bun sfârşit.

G. G. C.

PROBLEMA 5532. *Considerăm punctele* P, A, B, C *situate în același plan. Fie punctele* α(PA, BC), β(PB, CA), γ(PC, AB) *apoi* U *conjugatul armonic al punctului* A *față de* P *și* α; V *conjugatul armonic al punctului* B *față de* P *și* β; *iar* W *conjugatul punctului* C *față de* P *și* γ. *Să se arate că triplele de drepte* (PA, BW, CV), (PB, CU, AW), (PC, AV, BU) *sunt triple concurente.*

RADU P. VOINEA.

Fie punctele A'(PA, $\beta\gamma$), B'(PB, $\gamma\alpha$), și C'(PC, $\alpha\beta$). Diagonalele CA' și γA ale patrulaterului A'PβC, complectat în A și γ taie diagonala Pβ în două puncte conjugate armonic față de segmentul Pβ. Dar cum Aγ taie pe Pβ în B, rezultă că CA' taie pe BP în V. Deci CV trece prin punctul A'(PA, $\beta\gamma$).

Analog și BW trece prin acest punct, adică dreptele PA, BW, CV, $\beta\gamma$ sunt concurente.

La fel pentru dreptele (PB, CU, AW, $\gamma\alpha$) și (PC, AV, BU, $\alpha\beta$).

P. P. DRĂGHICESCU
(Liceul Militar, Iași).

Observare. 1. *Altă soluție.* Avem

$$C(B\beta VP) = B(C\gamma WP) = -1.$$

Aceste fascicole au raza BC comună deci restul intersecțiilor sunt colineare; anume dreapta AP trece prin (BW, CV).

2. Alte soluții bune date de D-nii: AUREL N. POPA (liceul Militar, Iași); MARIN GH. POPESCU (liceul Pitești); DUMITRU VASILIU (clasa a VI-a, liceul militar, Iași).

N. M.

PROBLEMA 5546. *Să se determine cifrele* a *și* b, *astfel ca expresia:*

$$E = 1941^{1940+a} + 1942^{1941+b}$$

divizată cu 11 să dea restul 3, iar divizată cu 13, să dea restul 1.

Care ar trebui să fie resturile diviziunei prin 11 și 13, pentru ca să avem cel puțin o valoare comună pentru cifrele a *și* b?

COMANDOR I. LINTEȘ.

Față de 11 avem:

$$1941^{x_1} = M11 + r_1 \quad \text{și} \quad 1942^{x_2} = M11 + r_2.$$

Observăm însă că:

x_1	1	2	3	4	5
r_1	5	3	4	9	1

și

x_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_2	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1

Apoi cum: $1940 = 5 \cdot 388$ și $1941 = 10 \cdot 194 + 1$, restul 3 îl vom avea când:

$$E = M11 + 1941^a + 1942^{b+1} = M11 + 3$$

adică pentru:

x_1	1 ; 6	2 ; 7	3 ; 8	4 ; 9	5 ; 10
r_1	5	3	4	9	1
r_2	9	—	10	5	2
x_2	4	—	5	6	9
a	1 ; 6	—	3 ; 8	4 ; 9	5 ; 0
b	3	—	4	5	8

De asemenea avem:

$$1941^{y_1} = M13 + \rho_1 \quad \text{și} \quad 1942^{y_2} = M13 + \rho_2$$

v_1	1	2	3	4	5	6
ρ_1	4	3	12	9	10	1

și

v_2	1	2	3	4
ρ_2	5	12	8	1

$$1940 = 6 \cdot 323 + 2 \quad \text{și} \quad 1941 = 4 \cdot 485 + 1$$

$$E = M13 + 1941^{a+2} + 1942^{b+1} = M13 + 1$$

y_1	1 ; 7	2 ; 8	3 ; 9	4 ; 10	5 ; 11	6 ; 12
ρ_1	4	3	12	9	10	1
ρ_2	—	—	—	5	—	—
y_2	—	—	—	1 ; 5 ; 9	—	—
a	—	—	—	2 ; 8	—	—
b				0 ; 4 ; 8	—	—

Comparând valorile lui a şi b din tablourile obţinute, vedem că avem soluţia: $a = 8$ şi $b = 4$.

Presupunând apoi că $a = b$, atunci avem:

$a = b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_{11}	7	8	10	2	8	6	2	7	6	10
r_{13}	8	11	4	11	6	3	11	0	1	5

Au rezolvat foarte bine problema D-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi SLT. M. AL. VASILESCU-ŞTABU, primul dând o frumoasă soluţie prin congruenţe.

I. L.

PROBLEMA 5552. *Se consideră un punct* M *pe cercul* O, *circumscris triunghiului* ABC. *Fie* P *şi* Q *extremităţile diametrului cercului* O *paralel cu dreapta lui* SIMSON *a punctului* M *în raport cu triunghiul* ABC. *Să se demonstreze:*

1. *Dreptele* MP *şi* MQ *sunt tangentele în* M, *la cele două parabole înscrise în triunghiul* ABC *şi trecând prin* M.

2. *Aceleaşi drepte sunt paralele cu axele conicelor circumscrise patrulaterului* ABCM.

ŞERBAN GHEORGHIU.

1. Fie T_1 şi T_2 punctele unde cele două tangente duse din M la o parabolă (π) înscrisă în triunghiul ABC, întâlnesc a doua oară cercul O. Când parabola (π) variază, tangentele MP_1 şi MT_2 se corespund în involuţie, deci secanta T_1T_2 trece printr'un punct fix. Acest punct este la infinit, cum se obţine particularizând parabola (π) astfel ca focarul său să coincidă cu punctul M. In acest caz particular punctele, T_1 şi T_2 devin punctele ciclice. Secanta T_1T_2 păstrează deci o direcţiune fixă. Vom arăta imediat că dreapta T_1T_2 este perpendiculară pe diametrul PQ.

Fie α, β, γ, punctele unde paralelele duse prin M laturilor BC Ca şi AB întâlnesc din nou cercul O. Printre parabolele (π) se găseşte una redusă la vârful A şi punctul dela infinit al laturii opuse, BC. Pentru această parabolă secanta T_1T_2 devine $A\alpha$. Dar, dreptele $A\alpha$ şi AM fiind isogonale în raport cu laturile unghiului A, rezultă că dreapta $A\alpha$ este perpendiculară pe dreapta lui SIMSON

a punctului M în raport cu triunghiul ABC deci pe diametrul PQ. In mod analog, se arată că dreptele Bβ şi Cγ sunt perpendiculare pe acelaşi diametru PQ. De asemenea toate secantele T_1T_2.

Pentru parabolele (π) trecând prin M, cele două tangente MT_1 şi MT_2 sunt confundate. Secanta T_1T_2 devine, pentru aceste parabole, tangentele în P şi Q la cercul circumscris, iar tangentele în M sunt dreptele MP şi MQ.

2. Axele conicelor circumscrise patrulaterului ABCM sunt paralele cu bisectoarele unghiului format de perechile de drepte (AM, BC), (BM, CA), (CM, AB) sau cu ale unghiurilor AMα, BMβ, CMγ, perechile de drepte (BC, Mα), (CA, Mβ), (AB, Mγ) fiind paralele. Deoarece diametrul PQ este perpendicular pe dreptele Aα, Bβ şi Cγ, rezultă că bisectoarele în chestiune sunt paralele cu MP şi MQ.

S'a primit o bună soluţie geometrică dela D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Observare. Propoziţiunea 2 poate fi demonstrată şi observând că axele conicelor circumscrise patrulaterului ABCM sunt paralele cu axele parabolelor circumscrise aceluiaşi patrulater. Inversiunea isogonală în raport cu ABC transformă cele două parabole în tangentele P şi Q la cercul O. Rezultă prin aceeaşi transformare că axele sunt paralele cu dreptele lui SIMSON ale punctelor P şi Q. Aceste drepte SIMSON sunt însă paralele cu MQ şi MP cum rezultă imediat, amintind că dreptele lui SIMSON în raport cu triunghiurile ABC şi MPQ ale unui punct arbitrar de pe cercul circumscris fac acelaşi unghiu sau $\frac{\pi}{2}$ în punctul M.

Ş. A. G.

PROBLEMA 5611. *Dacă* α, β, γ *sunt trei arce în progresie aritmetică, să se rezolve ecuaţia*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

ştiind că rădăcinile ei sunt tgα, tgβ, tgγ.

Să se examineze cazul $a = bc$.

I. ST. TEODORESCU.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU, MARIN GH. POPESCU (liceul „Brătianu", Piteşti) şi D-TRU GH. VASILIU (liceul militar, Iaşi).

Arcele fiind în progresie aritmetică avem $2\beta = \alpha + \gamma$, sau luând tangentele:

$$(1) \qquad \frac{2\,\mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}^2\beta} = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\gamma}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\gamma}.$$

Insă

$$\mathrm{tg}\alpha = x_1 \quad , \quad \mathrm{tg}\beta = x_2 \quad , \quad \mathrm{tg}\gamma = x_3$$

fiind rădăcinile ecuației date, relația (1) se mai scrie

$$(2) \qquad 2x_2 - 2x_1x_2x_3 = x_1 + x_3 - x_2^2(x_1 + x_3).$$

Să scriem și relațiile între rădăcini și coeficienți:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$
$$x_1x_3 + x_2(x_1 + x_3) = b$$
$$x_1x_2x_3 = -c.$$

Deducem:

$$x_1 + x_3 = -a - x_2 \quad \text{și} \quad x_2(x_1 + x_3) = b - x_1x_3$$

care înlocuite în (2) ne dau:

$$2x_2 + 2c = -a - x_2 - bx_2 - c$$

sau:

$$(3) \qquad x_2 = -\frac{a + 3c}{b + 3}.$$

Rezultă imediat:

$$(4) \qquad x_1 + x_3 = \frac{3c - 2a - ab}{b + 3} \quad ; \quad x_1x_3 = \frac{c(b+3)}{a + 3c}.$$

Deci celelalte două rădăcini sunt date de ecuația:

$$(5) \qquad z^2 + \frac{ab + 2a - 3c}{b + 3}z + \frac{c(b+3)}{a + 3c} = 0.$$

Relația de condiție se capătă înlocuind valorile din (3) și (4) în a doua din relațiile între rădăcini și coeficienți. Găsim astfel

$$(5) \qquad \left(\frac{a + 3c}{b + 3}\right)^2 = \frac{3c - 2bc - ab}{3c - 2a - cb} = 1 + 2\frac{a - bc}{3c - 2a - ab}.$$

In concluzie problema este posibilă când coeficienții ecuației date satisfac relația (5) și în acest caz una din rădăcini este dată de (3), iar celelalte două de ecuația (5).

Cazul $a = bc$. I. Inlocuind pe a în (3) și (5) avem:

$$x_2 = -c \quad \text{și} \quad z_2 + c(b - 1)z + 1 = 0.$$

Relaţia de condiţie, *presupunând* $3c - 2a - ab \neq 0$, ne dă $c^2 = 1$, deci $c = \pm 1$. Avem soluţiile:

1) pentru $c = 1 : x_2 = -1$; $z^3 + (b-1)z + 1 = 0$

2) pentru $c = -1 : x_2 = 1$; $z^2 - (b-1)z + 1 = 0$.

De altfel deoarece în acest caz avem simultan

$$c = \pm 1 \quad \text{şi} \quad a = \pm b,$$

ecuaţia dată este reciprocă.

II. Dacă $3c - 2a - ab = 0$, înlocuind pe a cu bc avem:

$$c(b-1)(b+3) = 0,$$

deci cazurile:

1) $c = 0$, care dă $a = 0$. Ecuaţia dată devine $x^3 + bx = 0$ cu rădăcinile:

$$x_1 = -\sqrt{-b} \quad ; \quad x_2 = 0 \quad ; \quad x_3 = \sqrt{-b}.$$

Problema are sens dacă $b < 0$ şi e satisfăcută.

2) $b = 1$, care dă $a = c$. Ecuaţia dată se scrie

$$(x + a)(x^2 + 1) = 0.$$

Rădăcinile fiind imaginare problema nu are sens.

3) $b + 3 = 0$ atrage după sine $a + 3c = 0$, deci x_2 e nedeterminat. Ecuaţia dată devine

$$x^3 - 3cx^2 - 3x + c = 0.$$

Observare. Dacă se scrie că $x_2 = -c$ verifică ecuaţia dată se obţine

$$c(b-1)(c^2-1) = 0,$$

care duce la discuţia de mai sus.

S'au primit foarte bune soluţii, fără a avea însă discuţia completă pentru cazul $a = bc$, dela D-nii: VLAD GH. JURIST (Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal), MARCEL D. COTARIU (Brăila), RADU P. VOINEA (elev-inginer, Bucureşti), EUGEN N. WEGENER (Bucureşti).

G. D. S.

PROBLEMA 5637. *Să se demonstreze că dacă* A' *este piciorul înălţimii* AA' *în triunghiul* ABC, *iar* d *şi* D *diametrele cercurilor înscrise în triunghiurile* AA'C *şi* AA'B *atunci avem relaţia*

$$c(b + d)\sin(45^0 + B) = b(c + D)\sin(45^0 + C)$$

unde b *şi* c *înseamnă laturile* AC *şi* AB.

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: M. GRUMĂZESCU (S-Lt.), O. C. GHEORGHIU (Liceul Internat, Iași), D. G. VASILIU (Liceul militar, Iași), AD. I. POPESCU (Școala Politechnică, Timișoara) și MINEA V. ALDEA (Student-inginer, Buzău).

Fie r_1 și p_1 raza cercului înscris în triunghiul dreptunghic AA'C în care avem

$$AC = b \quad ; \quad AA' = b \sin C \quad ; \quad A'C = b \cos C$$

$$r_1 = (p_1 - b) \operatorname{tg} \frac{A'}{2} = p_1 - b.$$

Inlocuind literele din ultima egalitate prin valorile lor găsim

$$\frac{d}{2} = \frac{b + b \sin C + b \cos C}{2} - b$$

$$\therefore \qquad d = b(\sin C + \cos C - 1)$$

$$\therefore \quad b + d = b(\sin C + \cos C) = \sqrt{2}\, b \sin(45^0 + C) \qquad (1)$$

La fel se găsește

$$c + D = \sqrt{2}\, c \sin(45^0 + B) \qquad (2)$$

Impărțind (1) prin (2) se ajunge la relația din enunț.

Notă. Au rezolvat foarte bine problema, plecând dela diferite alte relații între elementele unui triunghiu, D-nii: C. BOSINCEANU, FL. D. CĂRUNTU, GH. T. PUCHIU (Liceul militar, Iași); I. I. BUZINCU (Student, Politechnica București); M. D. COTARIU (Brăila); TIGRAN DIMITRIU (Liceul „M. Kogălniceanu", Iași); I. GR. ENĂCHESCU (Liceul militar, Timișoara); I. N. GLIGOR (Aliuș); N. V. IONESCU (Liceul „Radu Greceanu", Slatina); C. C. ILIESCU, VL. GH. JURIST (Colegiul „N. Filipescu", Predeal); V. D. PĂLĂCEANU (Liceul militar, Timișoara); C. PANTELIMON (Școala Ofițeri de artilerie antiaeriană); CLAUDIU SENI, E. N. WEGENER (Bacalaureați, București); MIREL D. STOENESCU (București); VASILE TĂNĂSESCU (Liceul „T. Maiorescu", București) și un corespondent al cărui nume nu s'a putut descifra.

PROBLEMA 5711. *Să se stabilească egalitatea*

$$\Sigma \sin A \left(\operatorname{tg} C \operatorname{cotg} \frac{B}{2} - \operatorname{tg} B \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \right) + \frac{p^2}{r^2} \Sigma \operatorname{tg} A \Pi \left(1 - \frac{b}{a} \right) = 0,$$

notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu.

EUG. N. WEGENER.

Soluție dată de D-l IOHANES MAHRENHOLZ (Cottbus-Germania).

Avem succesiv

$$\Sigma \sin A \left(\operatorname{tg} C \operatorname{cotg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg} B \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) =$$

$$= \Sigma \sin A \left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} - \frac{2\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}\right) =$$

$$= 2\Sigma \sin A \frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)} =$$

$$= 2\Sigma \sin A \frac{\sin^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cos B \cos C} =$$

$$= \Sigma \sin A \frac{\cos B - \cos C}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cos B \cos C} =$$

$$= \Sigma \sin A \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\cos C} - \frac{1}{\cos B}\right) =$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\sum\left(\frac{1-\cos A}{\cos C} - \frac{1-\cos A}{\cos B}\right) =$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\frac{(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos C-\cos A)}{\cos A \cos B \cos C} =$$

$$= 8\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{\cos A \cos B \cos C} =$$

$$= \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}A \operatorname{tg}B \operatorname{tg}C \frac{\sin B - \sin A}{\sin A}\cdot\frac{\sin C - \sin B}{\sin B}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin A - \sin C}{\sin C} = \frac{p^2}{r^2}(\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C)\frac{b-a}{a}\cdot\frac{c-b}{b}\cdot\frac{a-c}{c} =$$

$$= -\frac{p^2}{r^2}\Sigma \operatorname{tg}A \Pi\left(1-\frac{b}{a}\right),$$

adică relația din enunț.

Au trimis soluţii foarte bune Domnii: P. P. DRĂGHICESCU, C. CHIRIAC, I. GR. ENĂCHESCU, SUBLT. AV. MIREL D. STOENESCU, C. C. ŢINCU (Lic. „Diaconovici Loga", Timişoara).

G-RAL G. I. LIT.

PROBLEMA 5723. *Se consideră un triunghiu* ABC, *în care vârful* A *este fix, unghiul* BAC *este constant, iar baza* $\overline{BC}$ *aşezată pe o dreaptă fixă. Fie* B_1, C_1; B_2, C_2; B_2', C_2'; B_3, C_3; B_3', C_3' *respectiv picioarele înălţimilor, bisectoarelor şi simedianelor duse din vârfurile* B, A *pe laturile opuse.*

Să se afle locurile geometrice ale acestor zece puncte, câna unghiul BAC *se roteşte în jurul vârfului său.*

VIRGIL GHIŢESCU.

Soluţie dată de D-l OCTAV C. GHEORGHIU (Iaşi).

1. Fie încă: A_1 piciorul înălţimii din A şi H ortocentrul. Avem

$$\sphericalangle BA_1C_1 = \sphericalangle A \quad \text{şi} \quad \sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle A.$$

Intru cât punctul A_1 este fix, iar $\sphericalangle A = C^t$ rezultă că locurile punctelor B_1, C_1 sunt dreptele fixe A_1B_1, A_1C_1.

2. Luăm ca axă $x'x$ dreapta BC, iar ca axă $y'y$ perpendiculara din A pe aceasta, având astfel

$$A(o, a), \quad \sphericalangle OAC = \alpha, \quad \sphericalangle OAB = \beta.$$

Bisectoarea $\overline{BB_2}$ ne procură relaţia:

$$\frac{\overline{B_2A}}{\overline{B_2C}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = -\frac{\dfrac{a}{\cos\beta}}{a\,\mathrm{tg}\alpha - a\,\mathrm{tg}\beta} = -\frac{\cos a}{\sin A} = -\lambda.$$

Coordonatele punctului B_2 care împarte segmentul $\overline{AC}$ în raportul λ sunt:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin A} \cdot a\,\mathrm{tg}\alpha}{1 + \dfrac{\cos\alpha}{\sin A}} = \frac{a\sin\alpha}{\sin A + \cos\alpha}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{a}{1 + \dfrac{\cos a}{\sin A}} = \frac{a\sin A}{\sin A + \cos\alpha}.$$

Deducem de aici:

$$\sin\alpha = \frac{x}{y}\sin A \quad \text{şi} \quad \cos\alpha = \frac{a-y}{y}\sin A.$$

Introducând aceste valori în relaţia

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

eliminăm astfel parametrul variabil şi obţinem ca ecuaţie a locului lui B_2 pe

$$(I) \qquad x^2 - y^2\operatorname{ctg}^2 A - 2ay + a^2 = 0$$

care reprezintă o iperbolă veritabilă, cu excepţia cazului $\sphericalangle A = 90^0$, când locul devine parabola

$$y = \frac{1}{2a}(x^2 + a^2)$$

cu focarul în punctul A.

Locul punctului B_2 este totdeodată şi locul punctului C_2, întru cât coordonatele lui C_2 au aceeaşi formă ca şi coordonatele lui B_2, cu excepţia faptului că litera α este înlocuită cu β.

Curba (I) mai este şi locul punctului B_2' deoarece schimbarea lui λ în $-\lambda$ determină doar schimbarea semnului expresiunilor lui $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$. Se mai vede aceasta şi din faptul că dreapta fixă este tocmai polara lui A faţă cu iperbola (I).

Locul punctului C_2' este evident şi el tot aceeaşi curbă (I).

3. Simediana $\overline{BB_3}$ ne procură relaţia

$$\frac{\overline{B_3A}}{\overline{B_3C}} = -\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = -\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2 A} = -\mu.$$

Punctul B_3 este de coordonate

$$x = \frac{a\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2 A + \cos^2\alpha}, \quad y = \frac{a\sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2\alpha}.$$

Eliminând parametrul variabil α, rezultă ecuaţia locului lui B_3

$$(E) \qquad x^2 + (2 + \operatorname{ctg}^2 A)y^2 - (3 + \operatorname{ctg}^2 A)y + a^2 = 0.$$

care reprezintă o elipsă veritabilă.

Analog ca la punctul precedent se deduce că C_3 descrie aceeaşi elipsă (E).

Pentru piciorul simedianei exterioare, B_3', în expresiunile coordonatelor acestui punct vom lua $-\mu$ în loc de μ obținând astfel

$$x = -\frac{a \sin\alpha \cos\alpha}{\sin^2 A - \cos^2\alpha}, \quad y = \frac{a \sin^2 A}{\sin^2 A - \cos^2\alpha}$$

iar locul, iperbola veritabilă

$$(I_1) \qquad x^2 - (y - a)(y \operatorname{ctg}^2 A + a) = 0$$

care în cazul $\sphericalangle A = 90^0$ devine parabola

$$y = \frac{1}{a}(x^2 + a^2).$$

Locul punctului C_3' este reprezentat prin aceeași curbă (I_1).

V. GH.

PROBLEMA 5726. *Un patrat omogen, greu din care s'a scos un disc circular de rază* r, *având centrul* P *așezat pe una din diagonale* OA, *poate oscila fără frecare în jurul axei orizontale, perpendiculară pe planul patratului în vârful său* O. *Să se determine poziția punctului* P *și valoarea lui* r *așa fel ca lungimea pendulului simplu sincron să fie egală cu lungimea pendulului simplu sincron al patratului întreg oscilând în jurul aceleiași axe. Discuție.*

V. VÂLCOVICI.

Lungimea l' a pendulului simplu sincron referitor la un pendul fizic este, după cum se știe, dată de formula

$$l' = \frac{I}{Ml},$$

unde am însemnat, ca de obiceiu, cu M masa pendulului fizic, cu l distanța centrului de greutate la axa de suspensie și cu I momentul de inerție față de această axă. Dacă notăm cu indicele 1 mărimile privind pendulul constituit din patratul întreg și cu indicele 2 pe acelea privind pendulul format din patratul perforat, enunțul ne spune:

$$(1) \qquad \frac{I_1}{M_1 l_1} = \frac{I_2}{M_2 l_2}.$$

Avem însă

$$(2)\quad I_2 = I_1 - I_c\ ,\quad M_2 l_2 = M_1 l_1 - \pi r^2 x\ ,\quad \frac{I_1}{M_1 l_1} = \frac{2\sqrt{2}}{3} a,$$

unde am pus

I_c = momentul de inerţie al cercului din enunţ,
a = latura patratului considerat,
x = OP.

Am luat masa specifică egală cu unitatea.

Ţinând seama de valoarea $\pi r_2 \left(x^2 + \frac{r_2}{2}\right)$ a momentului de inerţie I_c precum şi de şirul (2), condiţia (1) devine:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} r^2 ax = r^2 \left(x^2 + \frac{r^2}{2}\right)$$

sau, neglijând soluţia banală $r = 0$,

$$(3)\qquad x^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} ax + \frac{r^2}{2} = 0.$$

Formula precedentă ne dă pe r când cunoaştem pe x:

$$(4)\qquad r = \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3} ax - 2x^2}.$$

Discuţie. Pentru ca valoarea (4) a lui r să fie reală trebue să avem

$$x \leqq \frac{2\sqrt{2}}{3} a.$$

Pe de altă parte, r nu poate întrece distanţa dela P la cea mai apropiată latură a patratului. Aşa dar,

a) pentru $x = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} a\right)$ va trebui să avem $r \leqq \frac{x}{\sqrt{2}}$;

b) pentru $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\ ,\ \frac{2\sqrt{2}}{3} a\right)$ va trebui să avem $r \leqq a - \frac{x}{\sqrt{2}}$.

In cazul *a)* înlocuind în (3) pe r prin limita sa superioară $\frac{x}{\sqrt{2}}$ vom obţine:

$$\frac{5x^2}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3} ax \geqq 0 \quad \text{adică} \quad x \geqslant \frac{8\sqrt{2}}{15} a,$$

ceea ce este imposibil, dat fiind că limita superioară a lui x în cazul *a*) este $\frac{\sqrt{2}}{2}a < \frac{8\sqrt{2}}{15}a$. *Deci cazul* a) *nu ne dă nici o soluţie.*

In cazul *b)* înlocuind în (3) pe r prin limita sa superioară $a - \frac{x}{\sqrt{2}}$ vom obţine:

$$\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{5}a\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}a\right) \geqq 0.$$

Deducem, sau $x \leqq \frac{\sqrt{2}}{3}a,$

ceea ce este imposibil, deoarece $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ este mai mic decât limita inferioară $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ a lui x, sau $x \geqq \frac{3\sqrt{2}}{5}a,$

ceea ce este posibil. *Cazul* b) *ne dă soluţii.*

In concluzie, problema propusă are soluţii numai pentru

$$x = \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}a \quad , \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}a\right).$$

Intervalul de variaţie al lui r va fi:

$$r = \left(\frac{2}{5}a,\ 0\right).$$

Se poate verifica imediat pe formula (4) că în intervalul

$$x = \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}a \quad , \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}a\right),$$

r descreşte monoton dela $\frac{2}{5}a$ până la zero.

V. V.

Au rezolvat problema D-nii: C. D. EFTIMIE şi EMIL MODÂLCĂ (Elevi-ingineri, Bucureşti).

PROBLEMA 5833. M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 *fiind cinci puncte în plan, punem:*

$$\mu_1 = M_1(M_2 M_3 M_4 M_5) \quad , \quad \mu_2 = M_2(M_3 M_1 M_4 M_5),$$
$$\mu_3 = M_3(M_1 M_2 M_4 M_5).$$

Să se arate că avem:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$$

ȘERBAN GHEORGHIU.

Fie intersecțiile

$$P_1 \equiv (M_4 M_5, M_2 M_3) \quad , \quad P_2 \equiv (M_4 M_5, M_3 M_1),$$
$$P_3 \equiv (M_4 M_5, M_1 M_2).$$

Deci:

$$\mu_1 = \frac{\overline{M_4P_3}}{\overline{M_4P_2}} : \frac{\overline{M_5P_3}}{\overline{M_5P_2}}, \quad \mu_2 = \frac{\overline{M_4P_1}}{\overline{M_4P_3}} : \frac{\overline{M_5P_1}}{\overline{M_5P_3}}, \quad \mu_3 = \frac{\overline{M_4P_2}}{\overline{M_4P_1}} : \frac{\overline{M_5P_2}}{\overline{M_5P_1}},$$

adică: $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1.$

P. P. DRĂGHICESCU.

Altă soluție. Se efectuează o transformare omografică astfel ca transformatele punctelor M_4 și M_5 să fie punctele ciclice ale planului. Notăm cu A, B, C transformatele punctelor M_1, M_2, M_3. Transformările omografice păstrând rapoartele armonice, din relațiunea lui LAGUERRE, rezultă:

$$\mu_1 = e^{2iA} \quad , \quad \mu_2 = e^{2iB} \quad , \quad \mu_3 = e^{2C}.$$

Deci:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1,$$

fiindcă suma unghiurilor unui triunghiu este egală cu π.

Ș. A. G.

EXERCIȚII

26. *Să se demonstreze identitățile*

$$\Sigma \frac{\sin(\theta - b)\sin(\theta - c)}{\sin(a - b)\sin(a - c)} \sin 2(n\theta + a) = \sin 2(n + 1)\theta$$

$$\Sigma \frac{\sin(\theta - b)\sin(\theta - c)}{\sin(a - b)\sin(a - c)} \cos 2(n\theta + a) = \cos 2(n + 1)\theta$$

a, b, c, θ fiind arce oarecare. Acest exercițiu generalizează problema 19, cap. XXIII, Culegere de probleme de Trigonometrie I, de V. CRISTESCU.

M. ADAM.

R. In identitatea algebrică

$$\sum \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 1$$

înlocuim pe x, α, β, γ respectiv prin $\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{tg}a$, $\operatorname{tg}b$, $\operatorname{tg}c$ şi apoi prin $\operatorname{cotg}\theta$, $\operatorname{cotg}a$, $\operatorname{cotg}b$, $\operatorname{cotg}c$ şi obţinem

$$\sum A\cos^2 a = \cos^2\theta \quad ; \quad \sum A\sin^2\theta = \sin^2\theta$$

unde

$$A = \frac{\sin(\theta-b)\sin(\theta-c)}{\sin(a-b)\sin(a-c)} \text{ etc.}$$

relaţii care dau

$$A\cos 2a + B\cos 2b + C\cos 2c = \cos 2\theta \qquad (1)$$

în care făcând o transformare a arcelor, de tipul $\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$, obţinem

$$A\sin 2a + B\sin 2b + C\sin 2c = \cos 2\theta. \qquad (2)$$

Inmulţind pe (1) şi (2) cu $\sin 2na$ şi $\cos 2na$, adunând şi scăzând, dau identităţile din enunţ. Pentru $n = -1$ avem cazul tratat în culegere de *Probleme de Trigonometrie I*, de V. Cristescu, problema 19, cap. XXIII.

27. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! & \ldots & n! \\ 2! & 2! & 3! & 4! & \ldots & n! \\ 3! & 3! & 3! & 4! & \ldots & n! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n! & n! & n! & n! & \ldots & n! \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[1!\,2!\,3!\ldots n!].$$

T. Stoicescu

R. Scădem elementele primei linii din elementele celorlalte linii şi ţinem seama de relaţia:

$$p! - (p-1)! = (p-1)\cdot(p-1)!$$

şi că, după desvoltarea determinantului după elementele ultimei coloane, elementele de o parte a diagonalei principale sunt zero; găsim astfel identitatea propusă.

28. *Să se calculeze valoarea determinantului:*

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin a & \cos a + \sin^2 a & \sin a \sin b & \sin a \sin c \\ \sin b & \sin a \sin b & \cos b + \sin^2 b & \sin b \sin c \\ \sin c & \sin a \sin c & \sin b \sin c & \cos c + \sin^2 c \end{vmatrix}$$

T. Stoicescu.

R. Se adună elementelor ultimelor trei coloane, elementele primei coloane înmulțite respectiv cu $-\sin a, -\sin b, -\sin c$, căpătând astfel:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b & 0 \\ \sin c & 0 & 0 & \cos c \end{vmatrix} = \cos a \cos b \cos c.$$

29. *Să se rezolve ecuația derivată a ecuației*

$$L\left(\frac{a^x}{\sqrt[x]{b}}\right) = c.$$

A. H. CUBAT.

R. După derivare avem ecuația

$$\frac{a^x La \sqrt[x]{b} + a^x \frac{1}{x^2} \sqrt[x]{b}\, Lb}{a^x La \sqrt[x]{b}} = 0 \quad \therefore \quad La + \frac{Lb}{x^2} = 0$$

și deci

$$x_{1,2} = \pm i \frac{Lb}{La}.$$

PROBLEME PROPUSE

5935. Prin o adunare parțială și alta totală întrebuințând toate cifrele semnificative câte o singură dată să se obțină 100 ca rezultat definitiv.

I. IONESCU.

5936. Intrebuințând câte o singură dată pe fiecare din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9 să se formeze două numere, care să fie respectiv patratul și cubul a doi multipli consecutivi de 3.

V. THÉBAULT.

5937. Să se demonstreze că patratele terminate în ... m 369, au ca rădăcină numerele

$$N = 5000\,n + \varepsilon_1 (1500\,m + 412 + \varepsilon_2 . 1875)$$

la care n este un întreg oarecare, m cifra miilor lui N^2, iar ε_1 și ε_2 au valorile ± 1.

I. V. MĂTIEȘ.

5938. Dacă avem: $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$, unde $a, b, c, \ldots$ sunt factorii primi ai lui N, atunci

$$\sum \left(\frac{N}{a^{\alpha}}\right)^{\varphi(a^{\alpha})} - 1 = \mathscr{M}N \text{ şi } \sum a^{\alpha} \left[a^{\varphi\left(\frac{N}{a^{\alpha}}\right)} - 1\right] = \mathscr{M}N,$$

unde $\varphi(i)$ reprezintă indicatorul lui i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5939. Cu numerele 428, 435, 443, 450, 459, 470, 474, 485, 489, 496, 504, 511, 520, 531, 535, 546 să se formeze un patrat magic de patru linii şi patru coloane, astfel ca suma numerelor de pe fiecare linie, coloană şi diagonală să fie egală cu 1944.

G-L GH. BUICLIU.

5940. In patratul ABCD de centru O ducem tangenta BT din B la cercul $(D, \overline{DO})$; perpendiculara în C pe AC taie cercul $(D, \overline{DB})$ în E, opus lui D faţă de BC.

Să se demonstreze, că dreptele DE, BT, AC sunt concurente şi se taie sub unghiuri decâte 60^0.

N. N. MIHĂILEANU.

5941. Antiparalelele, duse prin vârfurile unui triunghiu în raport cu aceeaşi direcţie şi în unghiurile respective, concură pe cercul circumscris.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5942. Să se demonstreze, că într'un triunghiu avem relaţiile

$$(\sin A - \sin B - \sin C)^2 + 4(\cos A - \cos B - \cos C - 1) + + (\cos A - \cos B - \cos C - 1)^2 = = 4(\sin B \sin C - \sin C \sin A - \sin A \sin B).$$

$$bc - ca - ab = (p-a)^2 - 4Rr_a + r_a^2$$

$$(p-a)^2 + 4Rr_a - r_a^2 = p^2 - 4Rr - r^2.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

5943. Să se arate, că într'un triunghiu sferic avem egalitatea

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 a \sin^2 (B-C) & \sin b \sin c \sin (A-B) \sin (C-A) \\ 1 & \sin^2 b \sin^2 (C-A) & \sin c \sin a \sin (B-C) \sin (A-B) \\ 1 & \sin^2 c \sin^2 (A-B) & \sin a \sin b \sin (C-A) \sin (B-C) \end{vmatrix} = 0.$$

I. I. STAMATE.

5944. Să se exprime derivata a doua a funcției $y = \sqrt{\sec 2x}$ numai cu ajutorul lui y și să se determine funcția cea mai generală care verifică relația găsită.

G. G. CONSTANTINESCU.

5945. Să se arate, că derivatele succesive ale funcției

$$y = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

verifică ecuația

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2) y = 0 \quad \text{(E)}.$$

2°. Din integrarea ecuației (E) să se deducă derivata $y^{(n)}$ de ordinul n a funcției y.

3°. Să se verifice rezultatul obținut calculând direct pe $y^{(n)}$.

ȘERBAN GHEORGHIU.

5946. Fiind dată o funcție $G(x, y)$, să se găsească toate funcțiile $F(x, y)$, astfel încât să avem

$$F(x, y) + F(y, x) = G(x, y) + G(y, x).$$

M. GHERMĂNESCU.

5947. Un șir $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ este mărginit superior și inferior prin două numere finite și pozitive. Se știe că raportul $r_n = \frac{u_n^2}{u_{2n}}$ admite limita a.

Să se arate, că și u_n tinde către a.

Se se generalizeze în cazul când indicile $2n$ dela numitorul raportului r_n este înlocuit cu $f(n)$, f fiind o funcție (cu valori întregi și pozitive) crescătoare și tinzând către infinit odată cu n.

ȘERBAN ȚIȚEICA.

5948. Din cauza rotației pământului în jurul axei lumii, direcția verticalei într'un loc anumit nu trece prin centrul pământului, considerat ca o sferă.

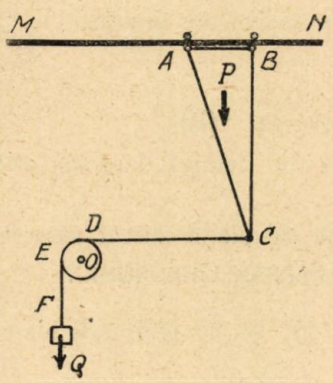
Se consideră două puncte L şi M pe suprafaţa pământului, având coordonatele respective: latitudinea λ şi μ şi longitudinea l şi m.

Să se găsească, în funcţie de coordonatele date, de rază R şi de viteza unghiulară ω a pământului, unghiul pe care-l fac între ele verticalele din punctele L şi M.

Se va studia şi cazul $\lambda = 0$.

ING. O. ORĂNESCU.

5949. O placă triunghiulară ABC (AB$=a$; BC$=b$, $\sphericalangle$B$=90^0$) de greutate P se poate deplasa într'un plan vertical astfel încât muchia AB alunecă în lungul barei orizontale MN. De vârful C al plăcii este prins un fir CDEF (CD orizontal în planul plăcii, EF vertical), care trece peste un scripete fix O de rază r şi greutate G, şi de care este atârnată în F o greutate Q.



Să se studieze mişcarea sistemului, să se determine eforturile în fir şi reacţiile în A şi B în timpul mişcării.

Frecările şi rezistenţa aerului se vor neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La Pag. 383 rândul 20 de sus în loc de Ox_1 se pune O_1x_1

„ „ 384 în nota de jos după 1) în loc de 56^0 se pune 57^0

„ „ 385 în formula (11) în loc de $2p$ se pune p

„ „ 385 în formula (11) în loc de $\int_{+\pi}^{-\pi}$ se pune $\int_{-\pi}^{+\pi}$

„ „ 385 La semnul $\int$ dela mijloc se schimbă limitele între ele

„ „ 391 în rândul 8 de jos în loc de $y_1 = -x$ se pune $y_1, -x$

„ „ 393 în rândul 8 de jos în loc de $\widehat{ICJ}$ se pune $\widehat{IDJ}$

„ „ 394 în formula S_2 în loc de $\widehat{ln} + \widehat{co}$ se pune $\overline{ln} \times \overline{co}$

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbu A. I. (5879, 86, 905, 08, 26); *Bouvaist R.* (5770); *Cantuniar I. Cr.* (5916); *Caramalău V. E.* (5918, 9); *Columbeanu D. P.* (5849, 908, 9, 16); *Constantinescu N. Ilie* (5894, 96, 908, 9); *Diaconu C. C.* (5908); *Dumitriu I. Călin* (5791, 870); *Drăghicescu P. P.* (5907, 12, 14, 21, 26, 28); *Dumitrescu Gh. Tr.* (5879); *Florescu B. I.* (C); *Grigore A. Gh.* (5871, 79, 86, 98, 905, 7, 8, 16, 20, 26, E); *Ieşan Al.* (5907, 12, 14); *Popescu I. Barbu* (5896, 907); *Tincu C. C.* (5750, 840, 98, 926); *Vrânceanu Gh. Gh.* (4404, 5850, 86, 909); *Wegener N. E.* (4478, 520, 57, 741, 940, 89, 5110, 815, 907, 14, 16, 26, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 23.854

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 9. — MAI 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ "ASTRA" SIBIIU

SUMARUL

1. Formule pentru calculul suprafeţelor laterale ale solidelor rezultate din tăierea unui con circular drept cu un plan (urmare şi sfârşit) . . . . . *Ing. O. S. Ianculescu.*
2. Raport pentru acordarea premiului de Algebră (A. G. Ioachimescu) . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
3. Note matematice: 36 — 39.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 330.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3019, 3228, 3341, 4589, 4879, 4920, 5464, 5667, 5695, 5791, 5905.
9. Exerciţii: 30—33.
10. Probleme propuse: 5950 — 5964.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **9**00, 01, 02, 03, 04, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

FORMULE PENTRU CALCULUL SUPRAFEȚELOR LATERALE ALE SOLIDELOR REZULTATE DIN TĂIEREA UNUI CON CIRCULAR DREPT CU UN PLAN

(Urmare dela pag. 480 și sfârșit)

CAPITOLUL IV

Observații recapitulative

1°. Formulele suprafețelor S_1, S_2 și S_3 din toate cazurile arătate în capitolele precedente sunt valabile numai pentru *conul circular drept.*

Pentru conul circular oblic sau pentru orice alte conuri formulele suprafețelor din capitolele precedente nu sunt valabile.

2°. *Funcțiunea* $Y = \text{Arg}\,c.h.X$. Funcțiunea inversă a lui $X = c.h.Y$ se scrie $Y = \arg c.h.X$. După curba care reprezintă pe X, se vede că $\text{Arg}.c.h.X$ nu este definit decât pentru $X \geqslant 1$; și are atunci două valori egale și de semne contrarii. Valoarea pozitivă corespunde și se scrie:

$$Y = \text{Arg}.c.h.X\ ^{1)} \quad \text{cu} \quad 0 \leqslant Y \leqslant +\infty \quad \text{și} \quad 1 \leqslant X.$$

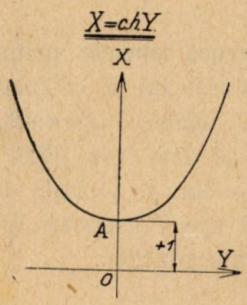
Dar cunoaștem formula:

$$X = \frac{e^Y + e^{-Y}}{2} = c.h.Y. \qquad \therefore \quad (e^Y)^2 - 2X(e^Y) + 1 = 0.$$

Această ecuație are două rădăcini pozitive în e^Y al căror produs este egal cu unitatea.

---

1) In „*Cours de Mathématiques Générales* par ERNEST VESSIOT et PAUL MONTEL, première partie, neuvième édition, 1942, Paris" pag. 140, pentru funcțiunea iperbolică $X = c.h.Y$ se face distincțiune între ramura situată la dreapta sau stânga axei ei de simetrie $\overline{OX}$. Astfel pentru ramura situată la dreapta axei $\overline{OX}$, funcțiunea inversă a lui $X = c.h.I$ se scrie:



$$Y = \text{Arg}\,c.h.X$$

și crește dela 0 la $+\infty$, iar $X \geqslant 1$.

Pentru ramura situată la stânga axei $\overline{OX}$, funcțiunea inversă a lui $X = c.h.Y.$ se scrie:

$$Y = \arg c.h.X$$

și descrește dela 0 la $-\infty$, iar $X \geqslant 1$.

Rădăcina care corespunde lui $Y > 0$ trebue să fie superioară lui unu (pentrucă $e^Y > 1$ pentru $Y > 0$) şi este cea mai mare, anume:

$$e^Y = X + \sqrt{X^2 - 1}.$$

De unde:

$$Y = \text{Arg}\, c.h.X = \log . (X^2 + \sqrt{X^2 - 1}) \quad (X \geqslant 1).$$

Cealaltă rădăcină este: $X - \sqrt{X^2 - 1}$.

Cu aceste noţiuni am stabilit tabloul I şi tabloul II de discuţii din capitolul V următor.

3°. Pentru ca cele trei cazuri principale A, B şi C cu subcazurile *a*, *b* şi *c* arătate în capitolul II să fie complect studiate urmează să precizăm limitele între care sunt valabile formulele suprafeţelor S_1, S_2 şi S_3 din acele cazuri.

Observăm că pentru H şi R constante, expresiile lui S_1, S_2 şi S_3 variază cu z şi β. Deci pentru fixarea limitelor de valabilitate a acestor formule, vom privi pe z constant şi β variabil sau invers.

Am stabilit astfel tabloul III final de discuţii din capitolul V.

4°. Formulele suprafeţelor S_1, S_2 şi S_3 din toate cazurile arătate se pretează la calcule numerice. In cazul acestor aplicaţiuni numerice, este recomandabil să folosim uneori tabelele cu valorile lui $X = c.h.Y$ calculate în diverse formulare şi tratate [1]).

Când ni se cer aproximaţii mai mari, este util a se transforma expresia lui $\text{Arg}\, c.h.X$ direct în calculul unui logaritm zecimal, ţinând seamă de formula de transformare:

$$Y = \text{Arg}\, c.h.X = \text{log. natural}\, (X + \sqrt{X^2 - 1}) =$$
$$= 2{,}3025851 \times \text{log. zecimal}\, (X + \sqrt{X^2 - 1})$$
$$(\infty \geqslant Y \geqslant 0) \quad \text{iar} \quad (X \geqslant 1).$$

Recomandăm această transformare pentrucă tabelele pentru calculul lui $X = c.h.Y$, ne dau în general valorile lui X calculate numai dela 0 la 6 [1]), pe când tabelele pentru calculul logaritmilor naturali, ne dau numerile calculate în general dela 0 la 1000 [1]). Pentru logaritmi zecimali avem însă tabelele lui J. DUPUIS cu numerele calculate dela 0 la 100.000 cu 5 sau 7 zecimale. Un exemplu de calcul dau în capitolul VII, aplicaţii practice.

---

1) Vezi: HÜTTE. I.; H. DUBBEL I.; M. FOERSTER. I, etc.

CAPITOLUL V

TABLOUL I, inițial de discuții

Cazul	Subcazul	Funcțiunea : $Y = \operatorname{Arg} c.h.X$ $X \geqslant 1$	Funcțiunea : $y = \arccos x$ $+1 \geqslant x \geqslant -1$	Observații
A	*a*	$\frac{R^2 \operatorname{tg}^2 \beta - Hz}{R(H-z)\operatorname{tg}\beta} \geqslant 1$ [1]	$1 \geqslant \frac{z}{R \operatorname{tg}\beta} \geqslant -1$	
	b	—	—	$X \geqslant 1$
B	—	—	$1 \geqslant \frac{z}{H} \geqslant -1$	$\infty \geqslant Y \geqslant 0$
C	*a*	$\frac{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - Hz}{R(H-z)\operatorname{tg}\beta} \geqslant 1$	$1 \geqslant \frac{z}{R \operatorname{tg}\beta} \geqslant -1$	$1 \geqslant x \geqslant -1$
	b	$\frac{R^2 \operatorname{tg}^2 \beta - Hz}{R(z-H)\operatorname{tg}\beta} \geqslant 1$	$1 \geqslant -\frac{z}{R \operatorname{tg}\beta} \geqslant -1$	$\pi \geqslant y \geqslant 0$
	c	$\frac{R^2 \operatorname{tg}^2 \beta + Hz}{R(z+H)\operatorname{tg}\beta} \geqslant 1$	$1 \geqslant -\frac{z}{R \operatorname{tg}\beta} \geqslant -1$	

Rezolvând inegalitățile din tabloul I, obținem ușor :

TABLOUL II, inițial de discuții

Cazul	Subcazul	Intervalul de existență a lui z pentru a satisface funcțiunea : $Y = \operatorname{Arg} c.h\ X$	Intervalul de existență a lui z pentru a satisface funcțiunea : $y = \arccos x$	Observații
A	*a*	$z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$R \operatorname{tg}\beta \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$X \geqslant 1$
	b	—	—	$1 \geqslant x \geqslant -1$
B	—	—	$H \geqslant z \geqslant -H$	$\infty \geqslant Y \geqslant 0$
C	*a*	$z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$R \operatorname{tg}\beta \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$\pi \geqslant y \geqslant 0$
	b	$z \leqslant R \operatorname{tg}\beta$	$R \operatorname{tg}\beta \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	
	c	$z \leqslant R \operatorname{tg}\beta$	$R \operatorname{tg}\beta \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	

1) Formulele din cazul A subcazul *a)* nu sunt exprimate cu funcțiunea iperbolică : $Y = \operatorname{Arg} c.h.X$ ci numai cu funcțiunea circulară $y = \arccos x$.

TABLOUL III

final de discuţii

Cazul	Subcazul	Dacă se dă:	Formulele: (I), (II) şi (III) sunt valabile în intervalul	Cu condiţia	Observaţii
A	*a*	H, R şi z	$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \frac{\pi}{2} - \alpha$	$z = H$	Intersecţia planului (P) cu conul SAB, poate fi: un punct; o dreaptă; un triunghiu; un cerc; o elipsă; o parabolă şi iperbolă. (Excluzând elementele imaginare de pe pânza imaginară opusă unghiului ASB).
			$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z}{R}\right)$	$H > z > 0$	
			$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant 0$	$z = 0$	
			$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \operatorname{arctg}\left(-\frac{z}{R}\right)$	$0 > z > -\infty$	
		H, R şi β	$R \operatorname{tg}\beta \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$\frac{\pi}{2} - \alpha > \beta > 0$	
			$H \geqslant z \geqslant -H$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	
			$H \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$\frac{\pi}{2} > \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$	
	b	H, R şi z	$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z}{R}\right) \geqslant \beta \geqslant 0$	$H > z > 0$	
		H, R şi β	$H \geqslant z \geqslant R \operatorname{tg}\beta$	$\frac{\pi}{2} - \alpha > \beta > 0$	
B	—	H şi R	$H \geqslant z \geqslant -H$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	

TABLOUL III (urmare)

Cazul	Subcazul	Dacă se se dă :	Formulele : (I), (II) şi (III) sunt valabile în intervalul	Cu condiţia	Observaţii
C	a $z \leqslant H$	H, R şi z	$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \frac{\pi}{2} - \alpha$	$z = H$	Intersecţia planului (P) cu conul SAB, poate fi : un punct ; o dreaptă ; un triunghiu ; un cerc ; o elipsă ; o parabolă sau o iperbolă. (Excluzând elementele imaginare de pe pânza imaginară opusă unghiului ASB).
			$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z}{R}\right)$	$H > z > 0$	
			$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant 0$	$z = 0$	
			$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{z}{R}\right)$	$0 > z > -\infty$	
		H, R şi β	$R \operatorname{tg}\beta \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$\frac{\pi}{2} - \alpha > \beta > 0$	
			$H \geqslant z \geqslant -H$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	
			$H \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$\frac{\pi}{2} > \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$	
	b $z \geqslant H$	H, R şi z	$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z}{R}\right)$	$\infty > z > H$	
			$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \frac{\pi}{2} - \alpha$	$z = H$	
		H, R şi β	$R \operatorname{tg}\beta \geqslant z \geqslant H$	$\frac{\pi}{2} > \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$	
			$z = H$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	
	c $z \leqslant 0$	H, R şi z	$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{z}{R}\right)$	$0 > z > -\infty$	
			$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant 0$	$z = 0$	
		H, R şi β	$0 \geqslant z \geqslant -R \operatorname{tg}\beta$	$\frac{\pi}{2} > \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$	
			$0 \geqslant z \geqslant -H$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	

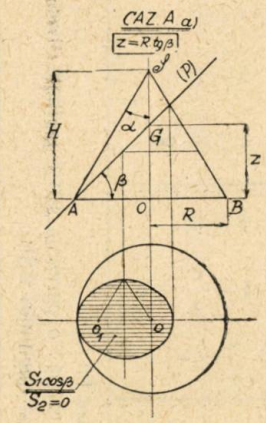
CAPITOLUL VI

Cazuri particulare

Vom examina fiecare caz principal A, B şi C separat şi vom da numai formulele remarcabile, demne de semnalat.

Cazul A. Subcazul a).

1°. Dacă în formulele generale (I), (II) şi (III) punem:



$$z = R\,\mathrm{tg}\beta \quad \text{sau} \quad \beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{z}{R}\right)$$

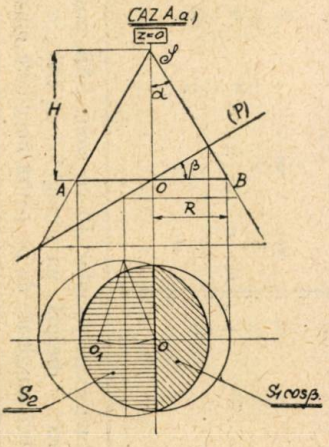
şi ţinem seamă de relaţiile evidente:

$$\sin\beta = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

găsim:

$$S_1 = \pi RH\left(\frac{H-z}{H+z}\right)\sqrt{\frac{R^2+z^2}{H^2-z^2}};$$



$$S_2 = 0\ ;\quad S_3 = \pi RH\left(\frac{H-z}{H+z}\right)\sqrt{\frac{H^2+R^2}{H^2-z^2}}.$$

Deci suprafaţa totală a solidului superior şi inferior va fi respectiv:

$$S = \frac{\pi RH\,(H-z)}{(H+z)\sqrt{H^2-z^2}} \times \left(\sqrt{R^2+z^2}+\sqrt{H^2+R^2}\right)$$

$$S' = \pi R\left(R+\sqrt{H^2+R^2}\right) + \frac{\pi RH\,(H-z)}{(H+z)\sqrt{H^2-z^2}}\left(\sqrt{R^2+z^2}-\sqrt{H^2+R^2}\right).$$

Acestea sunt formulele suprafeţelor celor două solide, când planul (P) trece prin extremitatea razei din baza conului (Punctul A). Valabilitatea formulelor lui S_1, S_3, S şi S′ este cuprinsă în relaţia:

$$0 < z \leqslant H.$$

2⁰. Dacă în formulele generale (I), (II) și (III) punem $z=0$, găsim:

$$S_1 = \frac{HR^3 \operatorname{tg}^2\beta}{\sin\beta\,(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)} + \frac{H^3 R^2}{\cos\beta \sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)^3}} \times$$

$$\times \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{R \operatorname{tg}\beta}{H}\right) \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\pi R \sqrt{H^2+R^2} + \frac{H^3 R \sqrt{H^2+R^2}}{\sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)^3}} \times$$

$$\times \left[\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{R \operatorname{tg}\beta}{H}\right) - \frac{R \operatorname{tg}\beta}{H^2} \times \sqrt{H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta}\right]$$

Deci suprafața totală a solidului superior și inferior, va fi respectiv:

$$S = \frac{1}{2}\pi R\,(R + \sqrt{H^2+R^2}) - \frac{HR\,(R + \cos\beta \sqrt{H^2+R^2})}{\cos\beta \sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)^3}} \times$$

$$\times \left[R \operatorname{tg}\beta \sqrt{H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta} - H^2 \times \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{R \operatorname{tg}\beta}{H}\right)\right]$$

$$S' = \frac{1}{2}\pi R\,(R + \sqrt{H^2+R^2}) - \frac{HR\,(R - \cos\beta \sqrt{H^2+R^2})}{\cos\beta \sqrt{(H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta)^3}} \times$$

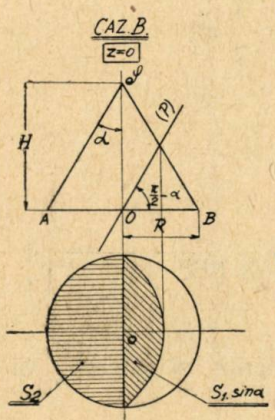
$$\times \left[R \operatorname{tg}\beta \sqrt{H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta} - H^2 \times \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{R \cdot \operatorname{tg}\beta}{H}\right)\right]$$

Acestea sunt formulele suprafețelor celor două solide, când planul (P) trece prin centrul bazei conului. Valabilitatea lor este condiționată și cuprinsă în relațiile:

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant 0 \quad ; \quad 1 \geqslant \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \geqslant -1.$$

Cazul B. Dacă în formulele generale (I)″, (II)″ şi (III)″, dela pag. 466, punem $z = 0$, obţinem:

$$S_1 = \frac{2}{3} \sqrt{H^2+R^2}\ ,\ S_2 = \frac{1}{2}\pi R^2\ ,\ S_3 = \frac{1}{6}(3\pi + 4) R \sqrt{H^2+R^2}.$$



Deci suprafaţa totală a solidului superior şi inferior va fi respectiv:

$$S = \frac{1}{2} R\left[\pi R + \left(\pi + \frac{8}{3}\right)\sqrt{H^2+R^2}\right],$$

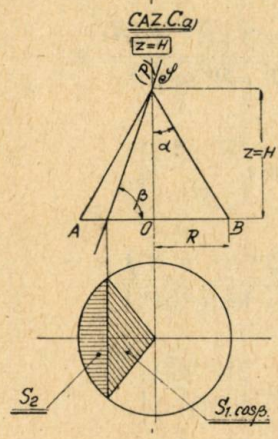
$$S' = \pi R\left[R + \sqrt{H^2+R^2}\right].$$

Cazul C. 1°. *Subcazul a).* Dacă în formulele generale (I)‴, (II)‴ şi (III)‴ dela pag. 471 şi 472, punem $z = H$, obţinem

$$S_1 = \frac{H\sqrt{R^2\,tg^2\beta - H^2}}{\sin\beta\, tg\beta}$$

$$S_2 = R^2 \arccos\left(\frac{H}{R\,tg\beta}\right) - \frac{H}{tg^2\beta} \times \sqrt{R^2\,tg^2\beta - H^2}$$

$$S_3 = R\sqrt{H^2+R^2} \times \arccos\left(\frac{H}{R\,tg\beta}\right).$$



Deci suprafaţa totală a solidului superior şi inferior va fi respectiv:

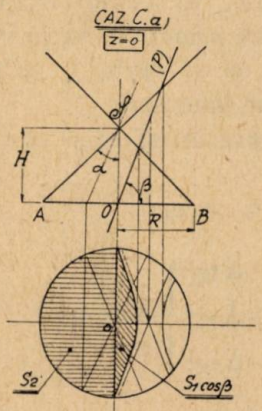
$$S = R(R + \sqrt{H^2+R^2}) \times \arccos\left(\frac{H}{R\,tg\beta}\right) + \frac{H(tg\beta - \sin\beta)}{\sin\beta\, tg^2\beta} \times \sqrt{R^2\,tg^2\beta - H^2}$$

$$S' = R(R + \sqrt{H^2+R^2}) \times \arccos\left(-\frac{H}{R\,tg\beta}\right) + \frac{H(tg\beta - \sin\beta)}{\sin\beta\, tg^2\beta} \times \sqrt{R^2\,tg^2\beta - H^2}.$$

Acestea sunt formulele suprafeţelor celor două solide, când planul (P) trece prin vârful S al conului. Valabilitatea lor este condiţionată de relaţiile:

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta \geqslant \frac{\pi}{2} - \alpha \quad ; \quad 1 \geqslant \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \geqslant -1.$$

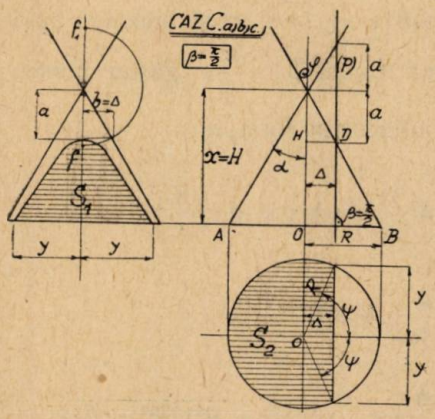
2°. *Subcazul b).* Dacă în formulele generale $(I)_1$, $(II)_1$ şi $(III)_1$, dela pag. 473, punem $z=0$, obţinem:



$$S_1 = \frac{HR^3 \operatorname{tg}^2\beta}{\sin\beta\,(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)} - \frac{H^3 R^2}{\cos\beta \sqrt{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times \operatorname{Arg} c.h.\left(\frac{R\operatorname{tg}\beta}{H}\right);$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\pi R \sqrt{H^2 + R^2} - \frac{H^3 R \sqrt{H^2+R^2}}{\sqrt{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times \left[\operatorname{Arg} c.h.\left(\frac{R\operatorname{tg}\beta}{H}\right) - \frac{R\operatorname{tg}\beta}{H^2} \times \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2}\right].$$



Deci suprafaţa totală a solidului superior şi inferior va fi respectiv:

$$S = \frac{1}{2}\pi R\,(R + \sqrt{H^2+R^2}) - \frac{HR\,(R + \cos\beta \sqrt{H^2+R^2})}{\cos\beta \sqrt{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times \left[H^2 \times \operatorname{Arg} c.h.\left(\frac{R\operatorname{tg}\beta}{H}\right) - R\operatorname{tg}\beta \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2}\right]$$

$$S' = \frac{1}{2}\pi R\,(R + \sqrt{H^2+R^2}) - \frac{HR\,(R - \cos\beta \sqrt{H^2+R^2})}{\cos\beta \sqrt{(R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}} \times \left[H^2 \times \operatorname{Arg} c.h.\left(\frac{R\operatorname{tg}\beta}{H}\right) - R\operatorname{tg}\beta \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - H^2}\right]$$

Acestea sunt formulele suprafețelor celor două solide, când planul (P) trece prin centrul bazei conului. Valabilitatea lor este condiționată:

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \beta > 0 \quad ; \quad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \geqslant 1.$$

3°. Cazul C cu cele trei subcazuri *a)*, *b)* și *c)* are o aplicație particulară interesantă. Anume, dacă rotim planul (P) în jurul unei axe proiectate în punctul D, astfel ca el să devie $\perp$ pe planul bazei conului, obținem un caz particular interesant.

In adevăr dacă pentru cele trei subcazuri *a)*, *b)* și *c)* notăm:

$$\overline{DH} = \Delta \quad \text{iar} \quad \overline{OH} = h, \text{ avem:}$$

$$\text{Pentru subcazul } a) \ldots \left.\begin{array}{l} z = h - \Delta \operatorname{tg}\beta \\ z = h + \Delta \operatorname{tg}\beta \\ -z = h - \Delta \operatorname{tg}\beta \end{array}\right\} \text{unde } h = (R - \Delta)\frac{H}{R}.$$

$$\text{„ „ } b) \ldots$$

$$\text{„ „ } c) \ldots$$

Dacă introducem valorile lui z în formulele generale corespunzătoare din subcazurile respective *a)*, *b)* și *c)* și înlocuim apoi pe $\operatorname{tg}\beta$ cu $\sin\beta : \cos\beta$ și pe urmă facem $\beta = \frac{\pi}{2}$, găsim pentru toate cele trei subcazuri aceleași interesante formule:

$$S_1 = H\sqrt{R^2 - \Delta^2} - \Delta^2 \frac{H}{R} \times \operatorname{Arg} c.h.\left(\frac{R}{\Delta}\right)$$

$$S_2 = R^2 \arccos\left(-\frac{\Delta}{R}\right) + \Delta\sqrt{R^2 - \Delta^2}$$

$$S_3 = R\sqrt{H^2 + R^2} \arccos\left(-\frac{\Delta}{R}\right) + \frac{\Delta}{R}\sqrt{(H^2 + R^2)(R^2 - \Delta_2)}.$$

Pentru H și R constante și Δ variabil, valabilitatea acestor formule este cuprinsă în relația:

$$R \geqslant \Delta \geqslant 0.$$

Observare. Remarcăm că formulele precedente, s'ar fi putut obține și direct, anume dacă în expresiile:

$$S_1 = xy - ab \operatorname{Arg} c \,.\, h \,.\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$S_2 = R^2(\pi - \psi) + R^2 \sin\psi \cos\psi \quad \text{și} \quad S_3 = S_2 : \sin\alpha$$

înlocuim următoarele date, ușor de stabilit:

$$a = \Delta\frac{H}{R}\,;\quad b = \Delta\,;\quad x = H\,;\quad y = \sqrt{R^2 - \Delta^2}\,;\quad \sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}.$$

$$\cos\psi = \frac{\Delta}{R}\,;\quad \sin\psi = \frac{y}{R} \quad \text{iar} \quad \pi - \psi = \arccos\left(-\frac{\Delta}{R}\right).$$

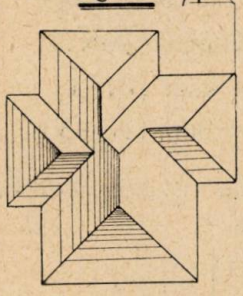
CAPITOLUL VII

Aplicații practice

Formulele (1) din capitolul I ce se referă la (Fig. 1), au o importanță în practică, deoarece permit un calcul rapid, exact și interesant. Următoarele două exemple ilustrează aceasta:

a) *Suprafața și numărul de țigle al acoperișului unei case,* având toți pereții acoperișului înclinați cu $\sphericalangle\,\beta$ față de orizontală (Fig. a), sunt date de relațiile ușor de stabilit:

$$S = S' : \cos\beta \quad \text{iar} \quad n = S' : ab\cos\beta$$



unde am notat cu S și S' respectiv suprafața acoperișului și a proiecției acoperișului, iar cu *n*, *a* și *b* numărul și dimensiunile unei țigle.

b) *Intersecția unui con circular drept cu o prismă dreaptă* (Fig. b).

Ne propunem să calculăm suprafața laterală a conului și a prismei ce rămâne după intersecția lor. Datele conului fiind: R și H, iar ale prismei: *c*, *d* și L.

1°. *Calculul suprafeței laterale a conului.*

Proiecția suprafeței laterale a conului, ce rămâne după intersecție, pe planul bazei sale este: $(\pi R^2 - c \times d)$.

Suntem îndreptăţiţi a aplica relaţiile (1) sau (16) din capitolul I, deoarece îndeplinim condiţiile arătate acolo. Deci suprafaţa laterală a conului, ce rămâne după intersecţie este dată de:

$$S_1 = (\pi R^2 - c \times d) : \sin\alpha \qquad (\alpha = \text{const}).$$

Dar: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{H}$ iar $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{R}{\sqrt{H^2+R^2}}$.

Deci: $$S_1 = \frac{(\pi R^2 - cd)}{R} \times \sqrt{H^2+R^2} \qquad (I)_2$$

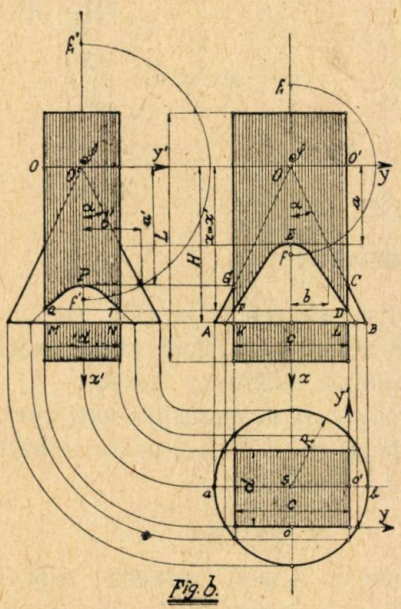


Fig. 6.

2⁰. *Calculul suprafeţei laterale a prismei.*

Intersecţia prismei cu conul, ne dă ca figură de intersecţie pe feţele opuse: $(c \times L)$ o curbă $\overset{\frown}{(DEF)}$ iar pe celelalte două feţe opuse: $(d \times L)$ curba $\overset{\frown}{(TPQ)}$. Aceste patru curbe reprezintă evident fiecare o iperbolă, deoarece sunt obţinute de intersecţia conului cu cele patru feţe plane ale prismei.

Suprafaţa laterală a prismei înainte de intersecţie este:

$$2L \times (c + d).$$

Suprafaţa laterală a prismei ce rămâne după intersecţie este:

$$S_2 = 2L\,(c+d) - 2 \text{ Supr. (EFKLD)} - 2 \text{ Supr. (PQMNT)}.$$

Dar: $\begin{cases} \text{Supr (EFKLD)} = \text{Supr (DEF)} + \text{Supr (DFKL)} \\ \text{Supr (PQMNT)} = \text{Supr (TPQ)} + \text{Supr (TQMN)}. \end{cases}$

Suprafaţa iperbolei $\overset{\frown}{(DEF)}$ sau $\overset{\frown}{(TPQ)}$ am văzut la cazul C, subcazul *a*) din capitolul II, că se poate scrie:

$$\begin{cases} \text{Supr (DEF)} = xy - ab \operatorname{Arg} c \,.\, h\left(\dfrac{x}{a}\right) & \left| \dfrac{x}{a} \geqslant 1 \right. \\ \text{Supr (TPQ)} = x'y' - a'b' \operatorname{Arg} c \,.\, h\left(\dfrac{x'}{a'}\right) & \left| \dfrac{x'}{a'} \geqslant 1 \right. \end{cases}$$

unde a, b reprezintă semi-axa reală şi imaginară a iperbolei $(\widehat{DEF})$, iar a', b' semi-axa reală şi imaginară a iperbolei $(\widehat{TPQ})$.

Urmează să calculăm semi-axele a, a', b, b' precum şi mărimile x, x', y şi y'.

Raportăm iperbolele $(\widehat{DEF})$ şi $(\widehat{TPQ})$, respectiv la axele Oxy şi $O'x'y'$ situate pe planele feţelor prismei. Ecuaţiile lor în raport cu aceste axe sunt respectiv:

$$(\widehat{DEF})\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad ;\quad (\widehat{TPQ})\quad \frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}=1.$$

Semi-axele reale şi imaginare se obţin uşor din (Fig. b). Avem:

$$\begin{cases} b=\dfrac{d}{2} \\ b'=\dfrac{c}{2} \end{cases} \quad \text{iar} \quad \begin{cases} a=b\ \operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{d\mathrm{H}}{2\mathrm{R}} \\ a'=b'\ \operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{c\mathrm{H}}{2\mathrm{R}} \end{cases} \quad \left(\operatorname{tg}\alpha=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}}\right).$$

Să calculăm abscisele şi ordonatele punctelor $D(x, y)$ şi $T(x', y')$.

Ordonatele le avem direct de pe figură:

$$y=\frac{c}{2}\quad \text{iar}\quad y'=\frac{d}{2}.$$

Aceste două relaţii reprezintă respectiv ecuaţiile muchiilor $\overline{DL}$ şi $\overline{TN}$ ale prismei.

Intersecţia acestor muchii respectiv cu iperbolele de mai sus ne dau abscisele căutate.

Vom introduce deci pe y şi y' cu valorile lor respectiv în ecuaţiile $(\widehat{DEF})$ şi $(\widehat{TPQ})$ şi ţinând apoi seama de semi-axele a, a' şi b, b' găsim uşor:

$$x=x'=\nu\cdot\frac{\mathrm{H}}{2\mathrm{R}}\sqrt{c^2+d^2}\quad (\nu=\pm 1)\ ^{1}).$$

---

1) Admitem numai ($\nu=+1$), căci rădăcina negativă nu ne interesează.

Introducând valorile lui a, a', b, b', x, x' şi y, y' precedent în formulele suprafeţelor (DEF) şi (TPQ) găsim uşor:

$$\begin{cases} \text{Supr. (DEF)} = \dfrac{cH}{4R}\sqrt{c^2+d^2} - \dfrac{d^2H}{4R}\ \text{Arg}\ c.h.\left(\sqrt{\dfrac{c^2}{d^2}+1}\right) \\ \text{Supr. (TPQ)} = \dfrac{dH}{4R}\sqrt{c^2+d^2} - \dfrac{c^2H}{4R}\ \text{Arg}\ c.h.\left(\sqrt{\dfrac{d^2}{c^2}+1}\right) \end{cases}$$

De asemeni:

$$\begin{cases} \text{Supr. (DFKL)} = c\,(H - x) = cH - \dfrac{cH}{2R}\sqrt{c^2+d^2} \\ \text{Supr. (TQMN)} = d\,(H - x') = dH - \dfrac{dH}{2R}\sqrt{c^2+d^2} \end{cases}$$

Introducând în fine aceste suprafeţe în expresia lui S_2, obţinem valoarea suprafeţei laterale a prismei ce rămâne după intersecţie în mărime şi semn:

$$S_2 = (c+d)\left[2\,(L-H) + \frac{H}{2R}\sqrt{c^2+d^2}\right] +$$

$$+\frac{H}{2R}\left[c^2\ \text{Arg}\ c.h.\left(\sqrt{\frac{d^2}{c^2}+1}\right) + d^2\ \text{Arg}\ c.h.\left(\sqrt{\frac{c^2}{d^2}+1}\right)\right] \qquad (II)_2$$

Intervalul de existenţă al formulelor lui S_1 şi S_2 din relaţiile respectiv $(I)_2$ şi $(II)_2$ este dat de

$$c^2+d^2 \leqslant 4R^2$$

care ne spune că poligonul bazei prismei să nu iasă din cercul bazei conului.

La limită va putea fi cel mult înscris în cercul bazei conului.

Caz particular. Este interesant să dăm şi cazul prismei cu baza un patrat.

Introducem deci în formulele $(I)_2$ şi $(II)_2$ pe $c = d$, obţinem:

$$S_1 = \frac{(\pi R^2 - d^2)}{R}\sqrt{H^2+R^2}. \qquad (III)_2$$

Iar:

$$S_2 = 4d\,(L-H) + \frac{d^2H}{R}\sqrt{2} + \frac{d^2H}{R}\ \text{Arg}\ c.h.(\sqrt{2}).$$

Urmează să calculăm Arg $c.h.(\sqrt{2})$. Vom folosi formula dela punctul 4⁰ din capitolul IV şi luând $\sqrt{2} = 1{,}4142$, avem:

$$\text{Arg } c.h.(\sqrt{2}) = 2{,}3025851 \times \log\left[\sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1}\right] =$$
$$= 2{,}3025851 \times \log . 2{,}4142.$$

Dar $\log 2{,}4142 = 0{,}3827732$ şi oprindu-ne la patru zecimale exacte găsim:

$$\text{Arg } c.h.(\sqrt{2}) = 0{,}8813.$$

Deci expresia lui S_2 devine:

$$S_2 = 4d(L - H) + 2{,}2955\, d^2 \frac{H}{R}. \qquad (IV)_2$$

Intervalul de existenţă al formulelor lui S_1 şi S_2 din relaţiile $(III)_2$ şi $(IV)_2$ este:

$$0 \leqslant d \leqslant R\sqrt{2}.$$

CAPITOLUL VIII

Diverse demonstraţii suplimentare

In capitolele I — VII am făcut unele afirmaţiuni şi am dat multe relaţiuni pe care nu le-am dovedit. Capitolul de faţă serveşte a complecta aceste demonstraţiuni astfel ca toate afirmaţiile şi relaţiile date să fie dovedite complect.

Capitolul I. Dovedirea relaţiilor (14).

a) *Să dovedim prima relaţie din (14).*

Plecăm dela relaţia (13) scrisă sub forma:

$$\cos\varphi + \varepsilon = \cos\gamma + \varepsilon \cos\varphi \cos\gamma.$$

Această relaţie o mai putem scrie:

$$\cos\varphi - \cos\gamma - \varepsilon \cos\varphi \cos\gamma = -\varepsilon.$$

Inmulţind ambii membri ai acestei relaţii cu ε şi apoi adunând 1, avem:

$$1 + \varepsilon \cos\varphi - \varepsilon \cos\gamma - \varepsilon^2 \cos\varphi \cos\gamma = 1 - \varepsilon^2$$

care se mai poate scrie:

$$(1 + \varepsilon \cos\varphi)(1 - \varepsilon \cos\gamma) = 1 - \varepsilon^2.$$

b) *Să dovedim a doua relație din (14).*

Plecăm dela relația cunoscută $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$, unde introducem pe $\cos\gamma$ cu valoarea sa din (13). Avem succesiv:

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{\cos\varphi+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+2\varepsilon\cos^2\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi-\cos^2\varphi-2\varepsilon\cos\varphi-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos\varphi} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2)-\cos^2\varphi(1-\varepsilon^2)}}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\times\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

c) *Să dovedim a treia relație din (14).*

Se dovedește luând diferențiala ambelor părți a primei relații din (14) și ținând apoi seama de a doua relație din (14). Avem:

$$d(1+\varepsilon\cos\varphi) = d\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\gamma}\right) = -\varepsilon\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= -\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)\sin\gamma}{(1-\varepsilon\cos\gamma)^2}\times d\gamma.$$

De unde avem succesiv:

$$d\varphi = \frac{(1-\varepsilon^2)\sin\gamma\,d\gamma}{\sin\varphi(1-\varepsilon\cos\gamma)^2} = \left(\frac{\sin\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right)\times\frac{(1-\varepsilon^2)\,d\gamma}{\sin\varphi(1-\varepsilon\cos\gamma)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\gamma}\right)}\times\frac{(1-\varepsilon^2)\,d\gamma}{(1-\varepsilon\cos\gamma)^2} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\gamma}\,d\gamma.$$

Capitolul II. a) *Calculul ariei unui segment de elipsă din aria unui segment de cerc, utilizând numai cunoștințele elementare de liceu, fără a întrebuința calculul integral.* Intrebuințez metoda fostului meu Profesor D-l G-L GH. BUICLIU, înscrisă în notițele mele de Geometrie analitică, de pe timpul când eram studentul Domniei-Sale în anul I la Politechnica din Timișoara.

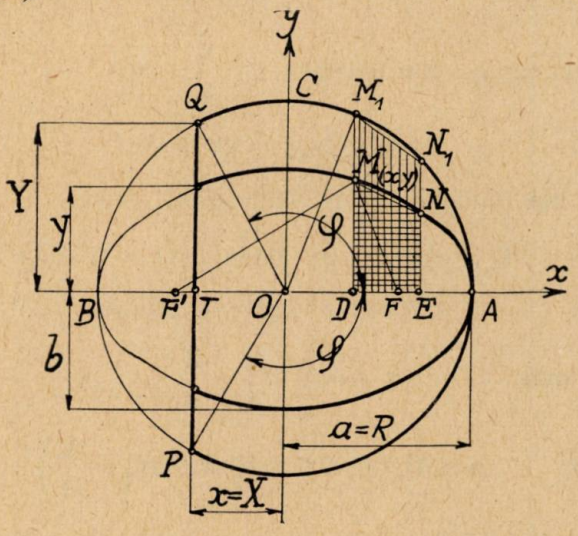
Construim o elipsă cu semi-axele $a > b$, cu centrul în O și raportată la două axe rectangulare Oxy. Din centrul O al elipsei descriem un cerc cu raza egală cu semi-axa mare a elipsei $R = a$. Ducem două drepte paralele între ele și paralele cu axa Oy. Aceste drepte taie elipsa în punctele M, N, cercul în M_1, N_1, iar axa Ox în D și E.

Se ştie că

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{M_1D}} = \frac{b}{a} = \text{const.}$$

Sau $$\frac{\overline{MD}}{\overline{M_1D}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{N_1E}} = \frac{\overline{MD}+\overline{NE}}{\overline{M_1D}+\overline{N_1E}} = \frac{b}{a} = \text{const.}$$

Unind pe M cu N şi M_1 cu N_1, obţinem trapezele (MNED) şi (M_1N_1ED).



Făcând raportul suprafeţelor lor şi ţinând seamă de relaţia precedentă, avem:

$$\frac{s}{S} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{MD}+\overline{NE}) \times \overline{DE}}{\frac{1}{2}(\overline{M_1D}+\overline{N_1E}) \times \overline{DE}} = \frac{b}{a} = \text{const.}$$

Putem considera suprafaţa segmentului de cerc şi a elipsei, formată din o infinitate de astfel de trapeze elementare. Avem deci relaţiunea evidentă:

$$\frac{s}{S} = \frac{s'}{S'} = \frac{s''}{S''} = \frac{s'''}{S'''} = \ldots = \frac{s+s'+s''+s'''+\ldots}{S+S'+S''+S'''+\ldots} = \frac{b}{a} = \text{const.}$$

Dar $$\begin{cases} s+s'+s''+s'''+\ldots = \text{arie (E)} \\ S+S'+S''+S'''+\ldots = \text{arie (C)}. \end{cases}$$

Deci $$\text{arie (E)} = \frac{b}{a} \cdot \text{arie (C)} \qquad (\alpha)$$

Observăm că această relație are loc și pentru segmente de cerc și elipse. Urmează să calculăm aria segmentului de cerc (PAQ) pe care apoi o transformăm cu relațiile arătate mai sus:

arie (PAQ) = aria sector (PAQOP) + aria triunghiului (POQ).

Notăm cu 2φ unghiul la centru al sectorului (PAQOP). Avem:

$$\begin{cases} \text{aria sector (PAQOP)} = \dfrac{1}{2} R \times \text{arc}(\overset{\frown}{PAQ}) = R^2\varphi \\ \text{aria triunghiului (POQ)} = 2Y\dfrac{X}{2} = XY. \end{cases}$$

Deci: $\text{arie (PAQ)} = XY + R^2\varphi.$

Dar din triunghiul dreptunghic TOQ, avem:

$\overline{TO} = \overline{OQ} \times \cos(\pi - \varphi)$ unde $\overline{TO} = X$, $\overline{OQ} = R.$

Sau: $X = R\cos(\pi - \varphi) = -R\cos\varphi$

De unde: $\varphi = \text{arc}\cos\left(-\dfrac{X}{R}\right).$

Deci: $$\text{arie (C)} = XY + R^2 \text{arc}\cos\left(-\frac{X}{R}\right) \qquad (\beta)$$

Dar $X = x$ iar $Y = \dfrac{a}{b}y$; $R = a$ și ținând seamă de relația (α), găsim ușor aria segmentului de elipsă:

$$\text{arie (E)} = xy + ab\,\text{arc}\cos\left(-\frac{x}{a}\right).$$

Remarcăm că această metodă nu o putem aplica la parabole sau iperbole, deoarece aceste curbe nu mai reprezintă proiecțiile unui segment de cerc, etc.

b) *La sfârșitul cazului* B, dela pag. 467, *am afirmat că formulele suprafețelor:* S_1, S_2 *și* S_3 *din cazul* B *se pot obține și direct din formulele suprafețelor* S_1, S_2 *și* S_3 *din cazul* A *subcazul a); făcând pe* β *să tindă către* $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$. *Vom dovedi aceasta pe rând, pentru fiecare suprafață în parte.*

1. *Suprafața* S_1. Formula (1) dela pag. 394 se poate scrie sub forma:

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{H\left(\frac{Hz}{tg^2\beta} - R^2\right)\sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)} + R^2 H (H-z)^2 \times \arccos\left[\frac{R^2 tg^2\beta - Hz}{R(H-z)tg\beta}\right]}{\cos\beta \sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)^3}} \quad (41)$$

Pentru $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, găsim: $\frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{o}{o}$. Aplicăm regula lui HOSPITAL. Notând cu S_1 această limită, avem:

$$S_1 = \lim_{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \lim_{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} \quad (42)$$

Urmează să calculăm pe $f'(\beta)$ și $g'(\beta)$ din relația (41) avem succesiv:

$$f'(\beta) = -\frac{2H^2 z}{\cos^2\beta\, tg^3\beta} \sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)} + \frac{H}{2}\left(\frac{Hz}{tg^2\beta} - R^2\right)$$

$$\left[\frac{2R^2 tg\beta (H^2 - R^2 tg^2\beta) - 2R^2 tg\beta (R^2 tg^2\beta - z^2)}{\cos^2\beta \sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)}}\right] - HR^2 (H-z)^2 \times$$

$$\times \frac{2R^3 (H-z) tg^2\beta - R(H-z)(R^2 tg^2\beta - Hz)}{R^2 (H-z)^2 \cos^2\beta\, tg^2\beta \sqrt{1 - \left[\frac{R^2 tg^2\beta - Hz}{R(H-z)tg\beta}\right]^2}} = -\frac{2H^2 z}{\cos^2\beta tg^3\beta} \times$$

$$\times \sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)} + \frac{HR^2 (Hz - R^2 tg^2\beta)}{\cos^2\beta\, tg\beta} \times$$

$$\times \frac{H^2 + z^2 - 2R^2 tg^2\beta}{\sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)}} - \frac{HR^2 (H-z)^2}{\cos^2\beta\, tg\beta} \times$$

$$\times \frac{R^2 tg^2\beta + Hz}{\sqrt{R^2 (H-z)^2 tg^2\beta - (R^2 tg^2\beta - H)^2}} =$$

$$= -\frac{2H^2 z}{\cos^2\beta\, tg^3\beta} \sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)} + \frac{HR^2}{\cos^2\beta\, tg\beta} \times$$

$$\times \frac{(H^2 + z^2 - 2R^2 tg^2\beta)(Hz - R^2 tg^2\beta) - (H-z)^2 (R^2 tg^2\beta + Hz)}{\sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)}} =$$

$$-\frac{2H^2 z}{\cos^2\beta\, tg^3\beta} \times \sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)} -$$

$$-\frac{2HR^2}{\cos^2\beta\, tg\beta} - \sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)}.$$

Deci:

$$f'(\beta) = -\frac{2H(R^2 tg^2\beta + Hz)\sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)(R^2 tg^2\beta - z^2)}}{\cos^2\beta\, tg^3\beta} \quad (43)$$

Iar:

$$g'(\beta) = -\sin\beta\sqrt{(H^2 - R^2 tg^2\beta)^3} - \frac{6}{2}\frac{R^2\cos\beta\, tg\beta}{\cos^2\beta}\sqrt{H^2 - R^2 tg^2\beta} =$$

$$-\left[(H^2 - R^2 tg^2\beta)\sin\beta + \frac{3R^2\sin\beta}{\cos^2\beta}\right]\sqrt{H^2 - R^2 tg^2\beta} =$$

$$-\left[3R^2 + H^2\cos^2\beta - R^2\sin^2\beta\right]\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\sqrt{H^2 - R^2 tg^2\beta}$$

$$g'(\beta) = -\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\left[2R^2 + (H^2 + R^2)\cos^2\beta\right]\sqrt{H^2 - R^2 tg^2\beta}. \quad (44)$$

Impărțind pe (43) cu (44), simplificând și trecând apoi la limită, avem succesiv:

$$S_1 = \lim_{\left(\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = \lim_{\left(\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \frac{2H(R^2 tg^2\beta + Hz)\sqrt{R^2 tg^2\beta - z^2}}{\sin\beta\, tg^3\beta\,[2R^2 + (H^2 + R^2)\cos^2\beta]} =$$

$$= \frac{2H(H^2 + Hz)\sqrt{H^2 - z^2}}{\frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \times \frac{H^3}{R^3} \times (2R^2 + R^2)}.$$

De unde: $$S_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{R}{H^2}(H + z)\sqrt{(H^2 + R^2)(H^2 - z^2)}.$$

Deci formula suprafeței S_1 din cazul B.

2. *Suprafața* S_2. In formula (II) dela pag. 395 punem $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, și avem:

$$S_2 = R^2 \arccos\left(\frac{z}{R\frac{H}{R}}\right) - \frac{z}{\left(\frac{H^2}{H^2}\right)}\sqrt{R^2\frac{H^2}{R^2} - z^2}.$$

Sau: $$S_2 = R^2\left[\arccos\left(\frac{z}{H}\right) - \frac{z}{H^2}\sqrt{H^2 - z^2}\right].$$

Deci formula suprafeței S_2 din cazul B.

3. *Suprafața* S_3. Formula (III) dela pag. 395 se poate scrie sub forma:

$$S_3 = R\sqrt{H^2 + R^2}\arccos\left(\frac{z}{R\, tg\beta}\right) + R(H - z)\sqrt{H^2 + R^2} \times \frac{f(\beta)}{g(\beta)}. \quad (45)$$

Unde:

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{-\sqrt{(H^2-R^2\,tg^2\beta)(R^2\,tg^2\beta-z^2)}+H(H-z)\arccos\left(\frac{R^2tg^2\beta-Hz}{R(H-z)tg\beta}\right)}{\sqrt{(H^2-R\,.\,tg^2\beta)^3}} \quad (46)$$

Pentru $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, găsim:

$$S_3 = R\sqrt{H^2+R^2}\arccos\left(\frac{z}{H}\right)+R(H-z)\sqrt{H^2+R^2}\times \lim_{\left(\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\frac{f(\beta)}{g(\beta)}$$

unde $$\lim_{\left(\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{0}{0}.$$

Pentru a înlătura nedeterminarea, aplicăm regula lui HOSPITAL relației (46).

Urmează să calculăm pe $f'(\beta)$ și $g'(\beta)$ din (46). Avem succesiv:

$$f'(\beta) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2R^2tg\beta(R^2tg^2\beta-z^2)+2R^2tg\beta(H^2-R^2tg^2\beta)}{\cos^2\beta\sqrt{(H^2-R^2tg^2\beta)(R^2tg^2\beta-z^2)}} -$$

$$-H(H-z)\frac{2R^2tg\beta R(H-z)tg\beta - R(H-z)(R^2tg^2\beta-Hz)}{R^2(H-z^2)\,tg^2\beta\sqrt{1-\left(\frac{R^2tg^2\beta-Hz}{R(H-z)tg\beta}\right)^2}\times\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{R^2tg^2\beta}{\cos^2\beta}\cdot\frac{(R^2tg^2\beta-z^2-H^2+R^2tg^2\beta)}{\sqrt{(H^2-R^2tg^2\beta)(R^2tg^2\beta-z^2)}}$$

$$-\frac{H(H-z)}{\cos^2\beta\,tg\beta}\cdot\frac{(2R^2tg^2\beta-R^2tg^2\beta+Hz)}{\sqrt{R^2(H-z)^2tg^2\beta-(R^2tg^2\beta-Hz)^2}} =$$

$$= \frac{R^2tg^2\beta}{\cos^2\beta}\cdot\frac{(2R^2tg^2\beta-H^2-z^2)}{\sqrt{(H^2-R^2tg^2\beta)(R^2tg^2\beta-z^2)}} -$$

$$-\frac{H(H-z)}{\cos^2\beta\,tg\beta}\cdot\frac{(R^2tg^2\beta+Hz)}{\sqrt{(H^2-R^2tg^2\beta)(R^2tg^2\beta-z^2)}} =$$

$$= \frac{R^2tg^2\beta(2R^2tg^2\beta-H^2-z^2)-H(H-z)(R^2tg^2\beta+Hz)}{\cos^2\beta\,tg\beta\sqrt{(H^2-R^2tg^2\beta)(R^2tg^2\beta-z^2)}} =$$

$$= -\frac{(2R^2tg^2\beta-z^2+Hz)\sqrt{H^2-R^2tg^2\beta}}{\cos^2\beta\,tg\beta\sqrt{R^2tg^2\beta-z^2}}. \quad (47)$$

Apoi:

$$g'(\beta) = -\frac{3R^2 \operatorname{tg}\beta}{\cos^3\beta} \cdot \sqrt{H^2 - R^2 \operatorname{tg}^2\beta}. \qquad (48)$$

Impărţind pe (47) cu (48), simplificând şi trecând apoi la limită, avem succesiv:

$$\lim_{\left(\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = \lim. \frac{2R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2 + Hz}{3R^2 \operatorname{tg}^2\beta \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2\beta - z^2}} =$$

$$= \frac{2R^2 \frac{H^2}{R^2} - z^2 + Hz}{3R^2 \frac{H^2}{R^2} \sqrt{H^2 - z^2}} = \frac{(H+z)(2H-z)}{3H^2 \sqrt{H^2 - z^2}}. \qquad (49)$$

Inlocuind pe (49) în expresia lui S_3 găsim:

$$S_3 = R\sqrt{H^2 + R^2}\left[\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{z}{H}\right) + \frac{2H-z}{3H^2}\sqrt{H^2 - z^2}\right].$$

Deci formula suprafeţei S_3 din cazul B.

Cazul C, *subcazul b)*: $z > H$.

d) *Demonstraţiile care conduc la determinarea semi-axei reale şi imaginare* a *şi* b *precum şi calculul mărimilor* x *şi* y.

1. Calculul semi-axei reale *a.* Ne referim la (fig. C) $z > H$.

Dacă în triunghiul SDF ducem înălţimea $\overline{SQ}$ pe baza $\overline{DF}$, obţinem două triunghiuri dreptunghice QDS şi QFS. Avem:

$$\overline{DQ} = \overline{SQ} \operatorname{tg}[\pi - (\alpha+\beta)] \quad \text{şi} \quad \overline{FQ} = \overline{SQ} \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$$

deoarece $\widehat{FSQ} = \hat{\beta} - \hat{\alpha}$ şi $\widehat{DSQ} = \pi - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Din triunghiul dreptunghic QSG, avem:

$$\overline{SQ} = \overline{SG} \cos\beta = (z - H)\cos\beta \quad \text{căci:} \quad \widehat{QSG} = \hat{\beta}$$

Cu aceste elemente calculate, pentru semi-axa reală a iperbolei avem:

$$a = \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{1}{2}(\overline{DQ} + \overline{FQ}) = \frac{1}{2}\overline{SQ}[\operatorname{tg}(\beta - \alpha) - \operatorname{tg}\alpha + \beta)].$$

$$a = (-1)(z - H)\sin\alpha \times \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}.$$

Ţinând seamă de identitatea:

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)$$

şi apoi de relaţiunea $\operatorname{tg}\alpha = R/H$, găsim:

$$a = \frac{H\,R\,(z-H)}{(R^2\operatorname{tg}^2\beta - H^2)\cos\beta}.$$

2) Introducând această valoare în expresia excentricităţii iperbolei:

$$\varepsilon = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \quad \varepsilon > 1.$$

găsim semi-axa imaginară:

$$b = \frac{R\,(z-H)}{\sqrt{R^2\operatorname{tg}^2\beta - H^2}}.$$

3. Fie I mijlocul segmentului $\overline{DF}$. Ducem prin I o verticală, până ce taie segmentele orizontale $\overline{DE}$ şi $\overline{AB}$ respectiv în J şi K. Apoi să ducem din I dreapta $\overline{IH} \parallel \overline{FE}$. Punctul H de pe axa de simetrie a conului se află şi pe $\overline{DE}$, pe care-l împarte evident în două părţi egale. Avem din figură

$$\overline{CK} = \overline{CO} - \overline{KO} = \overline{CI} \times \cos\beta.$$

Unde:

$$\overline{CO} = \overline{GO} \times \operatorname{cotg}\beta \quad \text{iar} \quad \overline{KO} = \overline{HJ} = \overline{IJ}\operatorname{tg}\alpha = \overline{DI}\sin\beta\operatorname{tg}\alpha$$

deoarece: $\widehat{HIJ} = \hat{\alpha}$ şi $\widehat{ICK} = \widehat{IDJ} = \hat{\beta}$.

Cu notaţiile noastre, avem:

$$\overline{CI} = x \;;\; \overline{GO} = z;\ \text{iar}\ \overline{DI} = a.$$

Deci: $x\cos\beta = z\operatorname{cotg}\beta - a\operatorname{tg}\alpha\sin\beta$

unde introducând pe a şi $\operatorname{tg}\alpha$ cu valoarile lor obţinem:

$$x = \frac{H}{\sin\beta} \times \left(\frac{Hz - R^2\operatorname{tg}^2\beta}{H^2 - R^2\operatorname{tg}^2\beta}\right).$$

4. Din triunghiurile dreptunghice *ocl* şi OCG, avem imediat:

$$\overline{cl} = \sqrt{\overline{lo}^2 - \overline{co}^2} \quad \text{unde:} \quad \overline{co} = \overline{CO} = \overline{GO}\ \text{cotg}\beta$$

cu notaţiile noastre:

$$\overline{cl} = y \ ; \ \overline{lo} = R \ \text{iar} \ \overline{GO} = z.$$

Deci: $$y = \sqrt{R^2 - z^2\,\text{cotg}^2\beta}.$$

Cazul C. Subcazul c): $z < 0$. e) Demonstraţiile care conduc la determinarea semi-axei reale şi imaginare a *şi* b *precum şi calculul mărimilor* x *şi* y.

1. Calculul semi-axei reale *a*. Ne referim la (Fig. C) $z < 0$. Dacă în triunghiul SDF ducem înălţimea $\overline{SQ}$ pe baza $\overline{DF}$ şi urmăm cuvânt cu cuvânt demonstraţia dela cazul $z > H$ precedent găsim:

$$a = \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{1}{2}(\overline{DQ} + \overline{FQ}) = \frac{1}{2}\overline{SQ}\,[\text{tg}\,(\beta - \alpha) - \text{tg}\,(\alpha + \beta)].$$

Sau $$a = (-1)(H + z)\sin\alpha \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}.$$

$$\therefore \quad a = \frac{HR(H+z)}{(R^2\,\text{tg}^2\beta - H^2)\cos\beta}.$$

2. Introducând această valoare în expresia excentricităţii iperbolei găsim:

$$b = \frac{R(H+z)}{\sqrt{R^2\,\text{tg}^2\beta - H^2}}.$$

3. Procedând ca la punctul 3 dela cazul precedent $z > H$ găsim:

$$x\cos\beta = -z\,\text{cotg}\beta + a\,\text{tg}\alpha\sin\beta.$$

Unde introducând pe *a* şi tgα valoarile lor obţinem:

$$x = \frac{H}{\sin\beta} + \left(\frac{R^2\,\text{tg}^2\beta + Hz}{R^2\,\text{tg}^2\beta - H^2}\right).$$

4. Din triunghiurile dreptunghice *ocl* şi OCG, scoatem ca la cazul precedent

$$y = \sqrt{R^2 - z^2\,\text{cotg}^2\beta}.$$

In capitolul II, pag. 472, am afirmat la observaţiuni că: Formulele suprafeţelor (I), (II) şi (III) din cazul A, subcazul *a)* sunt aceleaşi cu formulele suprafeţelor (I‴), (II‴) şi (III‴) din cazul C, subcazul *a)*, căci ele se pot obţine unele din altele, etc.

Această afirmaţie o dovedim în cele ce urmează.

1. Suprafața S_1 din cazul A, subcazul *a)* se scrie succesiv:

$$S_1 = \underbrace{\frac{H(Hz - R^2\,tg^2\beta)\sqrt{R^2\,tg^2\beta - z^2}}{\sin\beta\,tg\beta\,(H^2 - R^2\,tg^2\beta)}}_{A} + \frac{HR^2(H-z)^2}{\cos\beta\sqrt{(H^2 - R^2\,tg^2\beta)^3}} \times$$

$$\times \arccos \underbrace{\left[\frac{R^2\,tg^2\beta - Hz}{R(H-z)\,tg\beta}\right]}_{B} = A + \frac{HR^2(H-z)^2}{i^3\cos\beta\sqrt{(R^2\,tg^2\beta - H^2)^3}} \times \arccos B =$$

$$A - \frac{HR^2(H-z)^2}{\cos\beta\sqrt{(R^2\,tg^2\beta - H^2)^3}} \times \frac{1}{i} \arccos B.$$

Ținând seamă de relațiunile

$$\arccos u = i\,\mathrm{Arg}\,c.h.u \quad ; \quad u \geqslant 1 \quad ; \quad i = \sqrt{-1},$$

indicate la pagina 472, avem:

$$S_1 = A - \frac{HR^2(H-z)^2}{\cos\beta\sqrt{(R^2\,tg^2\beta - H^2)^3}} \times \mathrm{Arg}\,c.h.B.$$

Sau:

$$S_1 = \frac{H(Hz - R^2tg^2\beta)\sqrt{R^2tg^2\beta - z^2}}{\sin\beta\,tg\beta\,(H^2 - R^2\,tg^2\beta)} - \frac{HR^2(H-z)^2}{\cos\beta\sqrt{(R^2\,tg^2\beta - H^2)^3}} \times$$

$$\times \mathrm{Arg}\;c.h.\left[\frac{R^2\,tg^2\beta - Hz}{R(H-z)\,tg\beta}\right].$$

Adică formula suprafeței S_1 din cazul C, subcazul *a)*.

2. Formula suprafeței S_3 din cazul A, subcazul *a)* se scrie succesiv:

$$S_3 = \underbrace{R\sqrt{H^2 + R^2} \times \arccos\left(\frac{z}{R\,tg\beta}\right)}_{A} + \frac{HR(H-z)^2\sqrt{H^2 + R^2}}{\sqrt{(H^2 - R^2\,tg^2\beta)^2}} \times$$

$$\left[\arccos \underbrace{\left(\frac{R^2tg^2\beta - Hz}{R(H-z)\,tg\beta}\right)}_{B} - \frac{1}{H(H-z)} \times \sqrt{(H^2 - R^2tg^2\beta)(R^2tg^2\beta - \beta^2)}\right] =$$

$$A + \frac{HR(H-z)^2\sqrt{H^2 + R^2}}{\sqrt{(-1)^3(R^2\,tg^2\beta - H^2)^3}} \times$$

$$\times \left[\arccos B - \frac{1}{H(H-z)} \times \sqrt{(-1)(R^2\,tg^2\beta - H^2)(R^2tg^2 - z^2)}\right] =$$

$$A - \frac{HR(H-z)^2\sqrt{R^2 + H^2}}{\sqrt{(R^2\,tg^2\beta - H^2)^3}} \times \left[\frac{1}{i} \times \arccos B - \frac{1}{H(H-z)} \times\right.$$

$$\left. \times \sqrt{(R^2\,tg^2\beta - H^2)(R^2\,tg^2\beta - z^2)}\right].$$

Ţinând seamă de :

$$\text{arc cos} u = i \operatorname{Arg} c.h.u. \quad u \geqslant 1 \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad , \quad \text{avem :}$$

$$S_3 = A - \frac{HR(H-z)^2\sqrt{H^2+R^2}}{\sqrt{(R^2\operatorname{tg}^2\beta - H^2)^3}}\left[\operatorname{Arg} c.h.B - \frac{1}{H(H-z)} \times \right.$$

$$\left. \times \sqrt{(R^2\operatorname{tg}^2\beta - H^2)(R^2\operatorname{tg}^2\beta - z^2)}\right].$$

Sau formula S_3 din cazul C, subcazul *a)*.

Capitolul III. La pagina 480, punctul 2^0, am afirmat că formula suprafeţei S_3 din cazul A, subcazul *a)* o putem obţine din (34). Intr'adevăr făcând în (34) :

$$p = (H-z)\frac{R}{H} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{R}{H}\operatorname{tg}\beta \quad ; \quad \cos\psi = -\frac{z}{R\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}} \quad \text{şi} \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{R^2\operatorname{tg}\beta - z^2}}{R\operatorname{tg}\beta}$$

obţinem direct suprafaţa S_3 din cazul A, subcazul *a)*.

Capitolul VI. Cazul A, punctul 2^0.

Inegalitatea $1 \geqslant \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \geqslant -1$, este dedusă uşor din condiţia :

$$y = \text{arc cos}\left(\frac{R\operatorname{tg}\beta}{H}\right).$$

Unde :

$$1 \geqslant \frac{R}{H}\operatorname{tg}\beta \geqslant 1 \quad \text{iar} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{H}.$$

Cazul C, punctul 1^0.

Inegalitatea $1 \geqslant \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \geqslant -1$ este, dedusă din

$$y = \text{arc cos}\left(\frac{H}{R\operatorname{tg}\beta}\right) \quad \text{şi} \quad y_1 = \text{arc cos}\left(-\frac{H}{R\operatorname{tg}\beta}\right)$$

unde :

$$1 \geqslant \frac{H}{R\operatorname{tg}\beta} \geqslant -1 \quad \text{şi} \quad 1 \geqslant -\frac{H}{R\operatorname{tg}\beta} \geqslant -1.$$

Avem însă $tg\alpha = R/H$, deci aceste două duble neegalităţi se reduc la:

$$1 \geqslant \frac{1}{tg\alpha\ tg\beta} \geqslant -1.$$

Capitolul VII. Aplicaţia practică dată, se poate generaliza, considerând prisma înclinată faţă de con.

ING. OCTAVIAN S. IANCULESCU

Direcţia Technică. „Astra Română" — Câmpina.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ (A. G. IOACHIMESCU)

Membri Comisiunii au cercetat activitatea din *Gazeta Matematică* a corespondenţilor elevi de liceu şi au constatat că nici unul din ei n'a publicat note sau probleme propuse de Algebră.

Cercetând apoi soluţiile problemelor de Algebră ale acestor corespondenţi, membri Comisiunii au constatat o lăudabilă activitate din partea lor, însă neîndestulătoare pentru acordarea premiului.

Pentru aceste motive, membri Comisiunii sunt de părere că nu se poate acorda premiul de Algebră din acest an.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ (A. G. IOACHIMESCU)

V. ALACI, TH. ANGHELUŢĂ, AL. BUNESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală din 16 Februarie 1944.

NOTE MATEMATICE

36. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Când N_9 începe cu 4 se găsesc următoarele 96 de soluţii:

N_9	N	N_9	N
401 653 278	3 614 879 502	425 067 831	3 825 610 479
401 658 723	3 614 928 507	425 106 783	3 825 961 047
401 765 823	3 615 892 407	425 176 830	3 826 591 470
402 137 865	3 619 240 785	426 735 081	3 840 615 729
402 138 675	3 619 248 075	426 785 031	3 841 065 279
402 158 673	3 619 428 057	428 573 601	3 857 162 409
402 167 538	3 619 507 842	428 573 610	3 857 162 490
402 175 638	3 619 580 742	430 267 851	3 872 410 659
402 378 651	3 621 407 859	430 521 678	3 874 695 102
402 386 751	3 621 480 759	430 657 218	3 875 104 962
405 231 768	3 647 085 912	431 026 785	3 879 241 065
405 321 678	3 647 895 102	431 067 825	3 879 620 425
405 867 213	3 652 804 917	432 501 786	3 892 516 074
406 523 781	3 658 714 029	432 675 018	3 894 075 162
406 587 123	3 659 284 107	435 162 078	3 916 458 702
407 823 651	3 670 412 859	435 167 208	3 916 504 872
408 356 721	3 675 210 489	435 276 180	3 917 485 620
408 365 712	3 675 291 408	435 718 620	3 921 467 580
408 671 325	3 678 041 925	436 185 720	3 925 671 480
408 672 135	3 678 049 215	438 016 752	3 942 150 768
410 237 865	3 692 140 785	451 768 203	4 065 913 827
410 238 675	3 692 148 075	452 168 703	4 069 518 327
410 652 378	3 695 871 402	453 216 807	4 078 951 263
410 782 365	3 697 041 285	453 217 068	4 078 953 612
410 835 672	3 697 521 048	456 218 703	4 105 968 327
410 872 356	3 697 851 204	456 287 031	4 106 583 279
412 065 738	3 708 591 642	456 287 103	4 106 583 927
415 763 280	3 741 869 520	456 302 871	4 106 725 839
421 056 738	3 789 510 642	456 321 708	4 106 895 372
421 835 760	3 796 521 840	457 820 631	4 120 385 679
423 051 768	3 807 465 912	457 821 063	4 120 389 567
423 607 851	3 812 470 659	458 206 731	4 123 860 579
423 610 785	3 812 497 065	458 210 673	4 123 896 057
423 806 751	3 814 260 759	458 217 630	4 123 958 670
423 810 675	3 814 296 075	458 632 170	4 127 689 530

1) Urmare la Nota 22 dela pag. 340 din acest volum.

N_9	N	N_9	N
458 706 231	4 128 356 079	467 351 082	4 206 159 738
458 710 623	4 128 395 607	468 375 201	4 215 376 809
458 726 301	4 128 536 709	468 375 210	4 215 376 890
458 726 310	4 128 536 790	468 532 170	4 216 789 530
462 305 871	4 160 752 839	478 063 521	4 302 571 689
462 587 301	4 163 285 709	478 065 213	4 302 586 917
462 587 310	4 163 285 790	478 106 352	4 302 957 168
463 105 782	4 167 952 038	480 217 563	4 321 958 067
463 215 078	4 168 935 702	480 576 231	4 325 186 079
465 812 073	4 192 308 657	480 756 213	4 326 805 917
467 083 521	4 203 751 689	481 057 623	4 329 518 607
467 108 352	4 203 975 168	485 736 201	4 371 625 809
467 350 821	4 206 157 389	485 736 210	4 371 625 890

G-L GH. BUICLIU.

37. *Numere perfecte pare.* Pentruca numărul $2^n(2^{n+1}-1)$ să fie perfect, trebue ca numărul $M_n = 2^{n+1}-1$ să fie un număr prim. O condiţe necesară pentru aceasta este ca $(n+1)$ să fie el însuşi un număr prim, căci dacă $n+1 = p \times q$, numărul M_n se divide algebric prin (2^p-1) şi (2^q-1), dar atât nu este suficient deoarece M_n poate avea în afară de divizori algebrici şi unii divizori aritmetici. De exemplu $2^{113}-1$, deşi 113 este prim, se împarte prin $3391 \times 23279 \times 65993$. De asemenea $2^{29}-1 = 233 \times 1103 \times 2089$ şi $2^{41}-1 = 13367 \times 164511353$, deci numerile corespunzătoare lui $n = 28$ şi $n = 40$ trebuesc şterse din tabloul dat de D-l I. L. în nota din G. M. vol. XLVI pag. 414, ca unele care nu sunt numere perfecte.

Abatele MERSENNE a afirmat că pentru $n < 256$ numărul $M_n = 2^{n+1}-1$ nu poate fi prim decât pentru $n = 1, 2, 4, 6, 12, 16, 18, 30, 66, 126, 256$. Cu toate că în această afirmaţie se cuprind mai multe erori, dar având în vedere timpul în care a trăit Abatele (1588—1648) şi deci mijloacele reduse de cercetare ce le avea la dispoziţie, numerile prime $M_n = 2^{n+1}-1$ pentru $n < 256$ se zic numerile lui MERSENNE.

Cercetări ulterioare au arătat că $2^{67}-1$ nu este prim ci se descompune în $19370721 \times 761838257287$. Primul care a găsit această factorizare a fost COLE. Ulterior LUCAS a demonstrat că

numărul $2^{127} - 1$ este efectiv prim. In ceea ce priveşte numărul $2^{257} - 1$, POWERS în 1913 a verificat că nu are factori mai mici ca 10^7, iar KRAÏTCHIK şi LEHMER, care au calculat seria lui LUCAS corespunzătoare, sunt de părere ca în afară de erorile de calcul, probabile la un număr de 78 cifre, numărul $2^{257} - 1$ este compus. In afară de valorile date de MERSENNE, pentru $n < 126$ mai avem şi următoarele numere prime: $2^{61} - 1$, $2^{89} - 1$ şi $2^{107} - 1$ cum au arătat pentru primul SEELHOF şi pentru următoarele două POWERS.

In baza celor de mai sus, valorile corespunzătoare ale lui n pentru numerile de ordine 12, 13 şi 14 din nota D-lui I. L., *Gaz. Mat.* vol. XLVI pag. 414 sunt respectiv $n = 88$, 106 şi 126.

Pentru a completa aceste însemnări, care în cea mai mare parte sunt reproduse după lucrările D-lui KRAÏTCHIK, semnalez rezultatele cunoscute pentru toate valorile lui $n < 256$ şi astfel încât $(n + 1)$ să fie prim.

Până la $n < 138$ au fost identificate toate numerile prime, iar pentru celelalte numere se cunosc fie efectiv factorizările complete fie unii din divizorii afară de numerile corespunzătoare lui $n = 100$, 102, 108, 136, 139 cărora de şi nu li se cunoaşte niciun factor se ştie totuşi că sunt numere compuse.

Pentru $138 < n < 256$ se cunosc factorii indicaţi în paranteze la următoarele numere $2^{151} - 1$, $(18121 \times 55871 \times 165799)$, $2^{163} - 1$, (150287), $2^{173} - 1$, (730753), $2^{179} - 1$, (359×1433), $2^{181} - 1$ (43441), $2^{191} - 1$ (383), $2^{197} - 1$ (7487), $2^{211} - 1$ (15193), $2^{223} - 1$ (18287×196687), $2^{223} - 1$ (1399×135607), $2^{239} - 1$ $(479 \times 1913 \times 5737 \times 176383)$, $2^{251} - 1$ (503×54217). Nu se ştie nimic despre natura numerilor corespunzătoare lui $n = 148$, 156, 166, 192, 198, 226, 228 şi 241.

I. B. FLORESCU.

38. *Asupra problemei 3573.* La finele soluţiei acestei probleme, dată la pag. 436—38 din Nr. 7 al *Gazetei Matematice*, arăt că curba loc a punctelor M_1, M_2, ... M_n, etc., este algebrică dacă h şi k sunt puteri ale bazei logaritmilor întrebuinţaţi.

Condiţia generală însă, care are şi avantajul că este independentă de baza logaritmilor întrebuinţaţi, este ca $\frac{\mathrm{L}k}{\mathrm{L}h}$ *să fie raţional.*

Egalându-l cu $\frac{p}{q}$, găsim $h^p = k^q$.

M. G.

39. *Câteva observaţiuni asupra articolului „O problemă de mecanică artileristică“*. A se vedea *G. M.*, XLIX, pag. 216 şi 281.

Vom face câteva observaţiuni de *ordin practic*, utilizând toate notaţiunile din articolele citate.

1. Roţile tunului nu se deslipesc, adică săritura tunului nu se produce decât la o epocă $t_0 \neq 0$, adică atunci când R, care este o forţă crescătoare, atinge o valoare astfel încât cuplul C_s să fie depăşit de C_r.

2. Cazul cel mai defavorabil este când unghiul de proecţie este nul, deci R acţionează de-a-lungul orizontalei.

3. Expresia săriturei se studiază în mecanica artileristică pentru a constata, asupra căror parametri să se lucreze pentru evitarea săriturilor.

4. Forţa, $R = f(t)$ este o funcţie crescătoare de timp, ea îşi atinge maximul pentru o valoare a lui t care corespunde acceleraţiei maxime a proectilului în ţeavă, fapt studiat în amănunt în *„Bulletin de l'Ecole Polytecnique de Bucarest“* Nr. 3—4 1942 articolul *„Les accelerations du projèctile dans l'âme“*. Valoarea lui t este cam în jurul lui t_m, unde t_m este durata până ce proectilul atinge în ţeavă abscisa presiunei maxime, valoare cunoscută în *„Balistica Interioară“*.

5. Momentul de inerţie al unui tun I nu se poate cunoaşte, decât numai dacă am agăţa tunul de sapă şi l'am face să penduleze ceace este foarte greu.

6. O soluţie practică, cu o aproximaţie suficientă şi care corespunde cu diagramele de sărituri ale tunurilor înregistrate la poligoane este următoarea:

Dacă $C_r > C_s$ atunci tunul va sări; deci în acest caz greutatea lui s'ar spori cu inerţia.

Dacă neglijăm deci valoarea săriturei Z, faţă de H, atunci echilibrul va fi când:

$$\left(P_r + \frac{P_r}{g} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right) . L = R . H$$

L, fiind depărtarea dela roţi la sapă, iar P_r greutatea ce revine pe roţi.

Admiţând cel mai simplu caz când:

$$R = R_m . \frac{t}{t_m} \quad \text{unde} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_m$$

unde R_m este maximum lui R, iar t_m ar fi epoca atingerei acestui maxim. Atunci pentru $t = 0$ având $z = 0$ (în realitate chiar pentru $t = t_0$ avem $z = 0$), avem imediat:

$$z = \frac{g \cdot R_m \cdot H}{6 \cdot t_m \cdot P_r \cdot L} \cdot t^3 - \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Aşa dar maximum săriturei este:

$$z_m = \frac{g}{2}\left(\frac{R_m \cdot H}{3 \cdot P_r \cdot L} - 1\right) \cdot t_m^2.$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREŞTI

Facultăţile de Cadastru şi Geniu rural, Chimie Industrială şi Silvicultură

Examenul de admitere în anul I. Septembrie 1943

Geometrie plană. Candidaţii vor trata una din următoarele două probleme:

I. Se dau trei cercuri concentrice de raze a, b, c.

(1) $$a > b > c.$$

Intr'un punct T de pe cercul de rază c se duce tangenta la acest cerc. Se înseamnă cu A punctul unde această tangentă taie cercul de rază a şi cu B punctul unde această tangentă taie cercul de rază b, astfel ca punctul T să fie cuprins între A şi B. Se înseamnă cu C punctul diametral opus lui T în cercul de rază c.

1°. Să se calculeze aria triunghiului ABC, când razele a, b, c, sunt date.

2°. Razele a şi c fiind date să se determine grafic sau prin calcul, care trebue să fie raza b astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel. Să se studieze condiţiile de posibilitate, ţinând seama de relaţiile (1) de mai sus.

3°. Razele a şi b fiind date, să se determine grafic sau prin calcul, care trebue să fie raza c pentru ca aria triunghiului ABC să fie maximă.

II. In triunghiul ABC unghiul din A este de două ori mai mare ca unghiul din B.

1°. Să se calculeze unghiurile: A, B, şi C când triunghiul ABC este:

a) isoscel *b)* dreptunghic.

2°. Punctul D fiind intersecţia bisectoarei interioare a unghiului A cu latura BC, să se arate că bisectoarea unghiului ADC este paralelă cu latura AB.

3°. Să se arate că latura CA este medie proporțională între latura BC și segmentul DC.

4°. Să se construiască triunghiul ABC când se dau laturile AB, AC și relația $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B$.

Geometrie în spațiu. Candidații vor trata una din următoarele două probleme:

I. Se dă un cilindru de rotație de rază r și înălțime H, și un con de rotație având aceeași înălțime, iar baza un cerc de rază R concentric cu unul din cercurile de bază a cilindrului.

1°. Să se determine raportul între r și H pentru ca conul și cilindrul să aibă același volum.

2°. Să se determine raportul dintre r și H pentru ca conul și cilindrul să aibă același volum și aceiași suprafață laterală.

3°. Să se determine volumul porțiunii de con care este exterioară cilindrului, în cazul dela punctul 2.

II. Se dă un triunghiu ABC:

1°. Să se scrie în funcțiune de laturile a, b, c și de aria S ale triunghiului, volumul și suprafața născute prin rotația triunghiului ABC în jurul uneia din laturi.

2°. Presupunând că

$$a > b > c$$

să se arate care este latura în jurul căreia învârtind triunghiul se capătă suprafața cea mai mare.

3°. Care este latura în jurul căreia învârtind triunghiul se capătă raportul cel mai mare între volum și suprafață.

BIBLIOGRAFIE

Știință și Progres. Anul IX. Nr. 3—4. Ianuarie-Februarie 1944. I. CIOBANU: † Profesorul I. SIMIONESCU. D. POMPEIU: Aplicații ale ecuațiilor lineare. AL. BORZA: Reformatorul botanicei, CAROL LINNÉ. V. STANCIU: Mineralogia în cadrul științelor naturale și concepțiile de viață. CAIUS IACOB: Despre convergența uniformă a seriilor alternate. C. MENCIU: Terminologia științifică. M. DRĂGANU: De ce strălucesc stelele. Note. Probleme rezolvate și propuse. T. C.: Profesorul † MIHAI BOTEZ.

CERERI

330. In Biblioteca Academiei Române se găsesc publicațiile matematice din primul sfert al secolului XVII ale matematicianului italian PIETRO ANTONIO CATALDI BOLOGNEZE. Aceste cărți făceau parte înainte din Biblioteca centrală a Statului, care a fost cedată Academiei române. Acestea sunt unele din cele mai vechi cărți matematice de care s'au folosit Românii în studiile lor încât ar fi interesant de stabilit modul cum ele au ajuns să fie aduse la noi.

I. I.

DIVERSE

a) **Adunările Societăţii „Gazeta Matematică"**

Adunarea generală extraordinară din ziua de 8 Mai 1944, a ales ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică* pe D-na Profesoară CALIPSO GEORGESCU şi pe D-nii: Ing. STAVRI GHIOLU, Ing. ION GRIGORESCU şi Prof. VALER NOVACU.

b) **Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"**

JOHANN KARL BECKER. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erstes Buch. Planimetrie, erste Stufe. Berlin 1877.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3019. *Se dă o cardioidă, al cărei punct dublu este* O *şi axă de simetrie* Ox. *Fie* A, B, C *trei puncte arbitrare luate pe cardioidă. Prin* O *şi fiecare din punctele* A, B, C *trec trei cercuri* C_1, C_2, C_3 *respectiv tangente în punctele* A, B, C *la cardioidă. Să se demonstreze că:*

1°. *Punctele de intersecţie* M_1, M_2, M_3 *ale cercurilor* C_1, C_2, C_3 *sunt trei puncte colineare.*

2°. *Punctele* O, C_1, C_2, C_3 *sunt conciclice, centrul* ω *al cercului fiind pe axa* Ox.

M. NICOLAU.

Soluţie, dată de D-l M. D. POPA (când era elev clasa a VIII-a a liceului militar din Iaşi).

Fie O' cercul generator al cardioidei, adică cercul care trece prin O şi pentru care cardioida este podara punctului O, adică perpendiculara pe OA într'un punct A al cardioidei este tangentă în A' la cercul O'. Se ştie că dacă A_1 este proiecţia lui O pe A'O', dreapta AA_1 este normală la cardioidă şi cum, prin aceste construcţii figura $OAA'A_1$ este un dreptunghiu cu centrul în C_1 şi deci

$$\overline{C_1O} = \overline{C_1A} = \overline{C_1A_1}$$

ceea ce arată că cercul C_1, din enunţ, care trece prin O şi este

tangent în A la cardioidă este tocmai cercul circumscris dreptunghiului $OAA'A_1$. Acest cerc are ca diametru coarda OA' a cercului O'. La fel cercurile C_2, C_3 sunt cercuri care au diametrele nişte coarde OB', OC' ale cercului O'. Cu aceste observaţiuni proprietăţile din enunţ se demonstrează imediat:

1°. Punctele M_1, M_2, M_3 fiind intersecţiile a trei cercuri având ca diametre corzile OA', OB', OC' ale unui cerc O', sunt colineare conform teoremei lui SALMON.

2°. Punctul C_1 este mijlocul coardei OA' deci descrie un cerc de diametru OO'.

Notă. Proprietatea 1° este adevărată şi se demonstrează la fel şi pentru melcul lui PASCAL.

Proprietatea 2° se enunţă astfel, în cazul melcului lui PASCAL; punctele C_1, C_2, C_3 se află pe un cerc omotetic cercului generator O', centrul de omotetie fiind O, iar raportul de omotetie $1/2$.

PROBLEMA 3228. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia*

$$x^2 - pxy + y^2 = 1,$$

în care p *este un întreg.*

M. GHERMĂNESCU.

Ecuaţia dată se mai poate scrie

$$(2x - py)^2 - (p^2 - 4)\,y^2 = 4,$$

astfel că soluţia depinde de poziţia lui p^2 faţă de 4.

Dacă $p = \pm 2$, ecuaţia dată se scrie

$$(x \pm y)^2 = 1 \quad , \quad x \pm y = \alpha \quad , \quad \alpha = \pm 1$$

cu soluţia generală $x = \alpha \mp y$, y fiind arbitrar.

Dacă $p = \pm 1$, ecuaţia dată devine

$$(2x \mp y)^2 + 3y^2 = 4,$$

care este posibilă numai dacă $2x \mp y = \pm 1$,

$$y = \alpha,\ \alpha = \pm 1, \text{ cu soluţiile } p = 1,\ x = y = \pm 1;$$

$$p = -1,\ x = \pm 1,\ y = \mp 1;\ p = \pm 1;\ x = 0,\ y = \pm 1.$$

Rămâne să examinăm cazul $p^2 > 4$, adică

$$p > 2 \quad \text{sau} \quad p < -2.$$

Fie x_0, y_0 o soluție a ecuației date; se observă ușor că y_0, $py_0 - x_0$ este o alta. In acest mod, deducem un șir nelimitat de soluții, care sunt doi termeni consecutivi din șirul

$$(A) \qquad x_0,\ y_0\ py_0 - x_0,\ (p^2 - 1)y_0 - x_0, \ldots$$

Dacă notăm cu $u_1, u_2, \ldots u_n$, termenii acestui șir, observăm că trei termeni consecutivi sunt legați prin relația de recurență

$$u_n = pu_{n-1} - u_{n-2} \quad , \quad u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = p,$$

așa că, o teorie cunoscută a lui LAGRANGE, duce la

$$(B) \qquad u_n = \frac{\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{p^2 - 4}}$$

Să arătăm că nu mai sunt alte soluții decât cele din șirul precedent, $x = u_n$, $y = u_{n+1}$. Să luăm cazul $p > 2$ și fie X, Y o soluție a ecuației date, $1 < X < Y$. Am văzut că dacă x, y este o soluție, y, $py - x$ este o alta. Să presupunem că aceasta ar fi chiar soluția X, Y, adică

$$y = X \quad , \quad py - x = Y,$$

deci

$$x = pX - Y \quad , \quad y = X.$$

Inlocuind y prin X în ecuația dată, aceasta devine

$$f(x) = x^2 - pXx + X^2 - 1 = 0,$$

care are două rădăcini pozitive x_1 și x_2, căci $p > 2$, iar $X > 1$. Inlocuind x prin X, avem

$$f(X) = -(p - 2)X^2 - 1 < 0,$$

deci X este cuprins între rădăcinile x_1 și x_2.

Ori, ecuația $f(x) = 0$ se mai poate scrie

$$f(x) = [x - (pX - Y)](x - Y),$$

care arată că rădăcinile x_1 și x_2 sunt $pX - Y$ și Y. Rădăcina cea mai mică este $pX - Y$, căci altfel, deoarece și $X < Y$, ar urma că X este înafară de rădăcini, contrar celor stabilite mai sus. Rezultă deci

$$0 < pX - Y < X < Y.$$

Cu alte cuvinte, dintr'o soluţie X, Y, în care $1 < X < Y$, am dedus o alta mai mică $0 < pX - Y, X$. Rezultă că, repetând procedeul cu noua soluţie, vom cădea în mod necesar peste soluţia $x = 1$, ceea ce arată că şi soluţia X, Y face parte din şirul (A).

Demonstraţia este analoagă în cazul $p < -2$.

Notă. La această problemă s'au primit — pe vremea când a fost propusă — numeroase soluţii în care se observa că soluţiile formează şirul (A), invocându-se un articol al meu din R. M. T.[1]), fără a se arăta că nu mai sunt şi alte soluţii.

M. G.

PROBLEMA 3341. *Să se demonstreze că 30 este limita superioară a numerelor pentru care, toate numerele inferioare lor şi prime cu ele, sunt numere prime absolute.*

I. IONESCU.

Fie $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n, \ldots$ şirul natural al numerelor prime absolute scrise în ordinea lor crescândă ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc....) şi fie N un număr astfel încât:

$$p_r^2 < N < p_{r+1}^2. \qquad (1)$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca numerele prime cu N şi inferioare lui să fie numere prime absolute este ca N să fie divizibil cu toate numerele prime mai mici ca p_{r+1}. Aceasta fiindcă: 1) cel mai mic număr neprim absolut, prim cu N ar fi în cel mai convenabil caz p_{r+1}^2, care conform neegalităţilor lor (1 este însă mai mare ca N.

2) Fie $p_s < p_r$ un număr prim care nu divide pe N, conform aceleiaşi neegalităţi (1) şi p_s^2 este prim cu N, ceea ce face ca N să nu corespunză cerinţelor problemei.

Pe de altă parte, conform postulatului lui BERTRAND: între a şi $(2a - 2)$ există cel puţin un număr prim absolut, dacă a este superior lui 7/2 şi conform teoremei demonstrată de mine în Nota Nr. 5, Anul XXXIV, pag. 90: „*Intre* a *şi* $(3a + 1)$ *se găsesc*

1) *Proprietăţi ale seriilor recurente*, R. M. T. v. 3, 1923, p. 115—119

cel puţin două numere prime absolute, a *fiind un număr întreg şi pozitiv*", deduc:

$$p_{r+1} < 2p_r - 2 \quad \text{şi} \quad p_{r+1} < 3p_{r-1} + 1$$

de unde prin înmulţire:

$$p_{r+1}^2 < (2p_r - 2)(3p_{r-1} + 1) \quad , \quad p_{r+1}^2 < 6_r\, p_{r-1}.$$

Deci: $$N < p_r\, p_{r-1}. \qquad (2)$$

Conform celor spuse la începutul acestei soluţii, pentru ca neegalitatea (2) să fie satisfăcută N nu poate fi decât cel mult de forma:

$$N = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$$

In acest caz inegalităţile (1) devin:

$$25 < 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma < 49,$$

care nu sunt satisfăcute (α, β, γ trebue să fie întregi), decât pentru $\alpha = \beta = \gamma = 1$, de unde $N = 2 \times 3 \times 5 = 30$.

In concluzie cel mai mare număr pentru care numerele mai mici ca el şi inferioare lui sunt toate prime absolute este 30.

Observare. Numerele care se bucură de aceeaşi proprietate cu 30 sunt 4, 6, 12, 18 şi 24.

Au încercat soluţiuni elementare însă nu cu totul riguroase: † N. G. BOTEA, AL. B. IONESCU, G. TAILER, C. N. POPESCU şi D. HAIM.

ION B. FLORESCU.

PROBLEMA 4589. *Să se arate că expresia*

$$G_n = \sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} + \ldots + \sin\frac{1}{n} + \log\sin\frac{1}{n}$$

tinde către o limită bine determinată pentru $n = \infty$.

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-l GEORGE SILAŞ (când era student la Cluj).

Se cunoaşte *constanta lui* EULER, $C = 0{,}577\ldots$, definită ca limită a expresiei

$$C_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Să considerăm expresia

$$C_n - G_n = (1 - \sin 1) + \left(\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) - \log n - \log \sin\frac{1}{n};$$

deoarece

$$\lim\left(-\log n - \log\sin\frac{1}{n}\right) = \log\lim\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} = 0,$$

putem considera expresia $C_n - G_n$ ca o serie, al cărei termen general este

$$u_n = \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}.$$

Această serie este convergentă, căci

$$\lim n^3 u_n = \frac{1}{3!},$$

adică $C_n - G_n$ are o limită finită și diferită de zero. C_n având ca limită C, G_n va avea de asemeni o limită $G < C$, mai precis, $G = C - S$, S fiind suma seriei cu termenul general $u_n > 0$.

La fel se arată că are o limită finită și expresia

$$H_n = \operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2} + \operatorname{tg}\frac{1}{3} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{1}{n} + \log\operatorname{tg}\frac{1}{n}.$$

PROBLEMA 4879. *Un creion nou exagonal, de 8 mm grosime, este ascuțit conic pe 15 mm lungime cu o mașină de ascuțit. Grosimea se măsoară între două fețe paralele. Gaura lui cilindrică are 3 mm diametru. Care este volumul lemnului îndepărtat prin ascuțire?*

I. IONESCU.

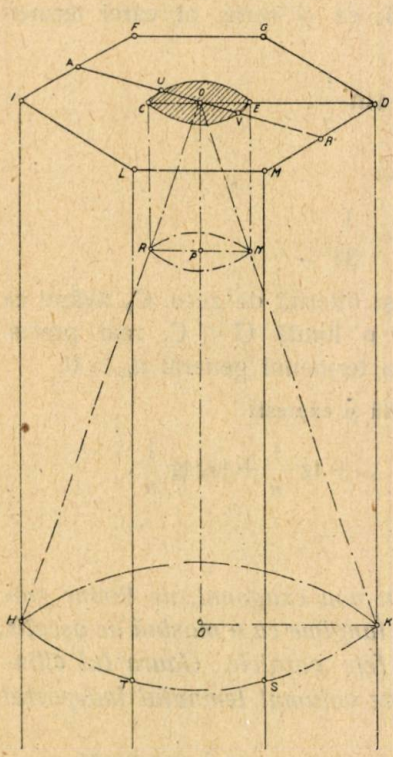
Creionul prin ascuțire capătă o formă conică cu înălțimea OO', cu generatoarea OK, cu raza O'K. Acest con se află întrodus într'o prismă cu înălțimea tot OO'.

Pentru a găsi volumul lemnului îndepărtat trebue să scădem volumul conului din volumul prismei IAFGDBMLHTSK. Le calculăm pe rând.

Volumul prismei. Distanța dintre cele două fețe paralele luată pe jumătate este egală cu apotema exagonului. Vom avea

$$\frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = 4 \quad \therefore \quad R = \frac{8}{\sqrt{3}} = 4{,}6 \text{ mm.}$$

Știm că într'un exagon raza R a cercului circumscris, este egală cu latura. Deci R = OD = DM = 4,6 mm. Aplicând teorema lui PITAGORA triunghiului dreptunghic ODK, scoatem pe DK:



$$DK = \sqrt{OK^2 - OD^2} =$$

$$\sqrt{225 - 21{,}16} = 14{,}21 \text{ mm.}$$

Dar DK fiind egal cu OO' am găsit tocmai înălțimea prismei cât și a conului. Având latura exagonului cât și înălțimea prismei calculăm volumul ei:

Vol. prism. = perimetrul $\times$ $\frac{1}{2}$ apotema $\times$ înălțimea =

$27{,}6 \times 2 \times 14{,}2 = 783{,}840 \text{ mm}^3$.

Volumul conului. Și aci avem cunoscute raza și înălțimea. Deci:

$$\text{Vol. con. HOK} = \frac{\pi R^2 I}{3} =$$

$$\frac{3{,}14 \times 4{,}6^2 \times 14{,}21}{3} = 314{,}497 \text{ mm}^3.$$

Scăzând volumul conului din al prismei vom căpăta volumul lemnului îndepărtat prin ascuțire plus o parte din volumul minei de creion. De aceia trebue să calculăm și acel volum prin scăderea conului ORN din cilindrul CERN.

Înălțimea OP a cilindrului cât și a conului, le calculăm din asemănarea triunghiurilor OO'K și OPN, în care cunoaștem PN = OE = 1,5 mm din enunț O'K = OD = 4,6 mm precum și OO' = DK = 14,21 mm din calcule.

Avem $$\frac{OP}{OO'} = \frac{PN}{O'K}$$

unde înlocuind cu datele problemei găsim

$$\frac{OP}{14,21} = \frac{1,5}{4,6}$$

de unde scoatem OP = 4,6 mm.

Vol. cil. CENR = baza × înălțimea = $3,14 \times 1,5^2 \times 4,6 = 32,498$ mm³

Vol. con. RON = $\frac{\pi \overline{PN}^2 \times OP}{3} = \frac{3,14 \times 1,5^2 \times 4,6}{3} = 10,833$ mm³.

Diferența $32,499 - 10,833 = 21,666$ mm³

reprezintă volumul cantității de mină de creion ce se pierde odată cu lemnul din prima ascuțire. Deci

$$783,840 - 314,497 = 469,343 \text{ mm}^3$$

este volumul lemnului plus al minei, iar volumul lemnului îndepărtat este $469,343 - 21,666 = 447,677$ mm³.

TR. GH. DUMITRIU
Clasa a VIII-a reală,
Liceul Traian, Turnu-Severin.

Au dat soluții incomplecte și cu calcule numerice puțin îngrijite D-nii: NICULAE L. PITIȘ (Mizil), FLORICĂ B. STELIAN (Clasa a VIII-a Liceul Ion Meșota, Brașov), M. MIZICU (Mizil), I. A. BARBU (Clasa a VII-a Liceul Caracal) și N. V. IONESCU (Clasa VIII-a Liceul Slatina).

PROBLEMA 4920. *Fie* $\alpha\beta\gamma$ *o transversală a triunghiului* ABC *cu centrul de greutate* G.

1°. βG, γG *retaie laturile* AB, AC *în* C_a, B_a; $B_a C_a$ *taie pe* αG *pe ceviana reciprocă cu* Aα.

2°. *O secantă arbitrară, dusă prin* α, *taie mediana* AG *și paralela din* A *la* BC *în* O *și* O'; Oβ, Oγ *și* O'β, O'γ *taie pe* AB, AC *în* $C_{a'}$, $B_{a'}$ *și* $C'_{a'}$, $B'_{a'}$. *Dreptele* $B_{a'} C_{a'}$, $B'_{a'} C'_{a'}$, OO' *se întâlnesc pe ceviana reciprocă cu* Aα.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție. Fie Q și R intersecțiile medianei AA' cu $\alpha\beta\gamma$ și $B_a C_a$. Avem $(\gamma\beta Q\alpha) = (BCA'\alpha)$, luând A ca centru de proiecție. Luând însă G ca centru de proiecție avem $(\gamma\beta Q\alpha)$ $(C_a B_a RU)$ unde $U = (B_a C_a, \alpha G)$. Apoi avem $(C_a B_a RU) = (CBA'\alpha_1)$ luând A ca centru de proiecție — $\alpha_1 = (AU, BC)$. Rezultă $(BCA'\alpha) = (CBA'\alpha_1)$ adică

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} : \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'B}} : \frac{\overline{\alpha_1 C}}{\overline{\alpha_1 B}}$$

însă

$$\overline{A'B} = \overline{A'C}$$

deci

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\alpha_1 C}}{\overline{\beta_1 B}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{\alpha B} - \overline{\alpha C}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\alpha_1 C} - \overline{\alpha_1 B}}{\overline{\alpha_1 B}}.$$

Numărătorii fiind egali rezultă că $\overline{\alpha C} = \overline{\alpha_1 B}$ deci $A\alpha_1$ este reciproca cevianei $A\alpha$.

Fie acum V punctul unde OO' taie pe $A\alpha_1$. Paralela și mediana din A sunt conjugate armonic față de laturile AB, AC deci O' este polul medianei AA' față de unghiul BAC. Cum dreptele $\beta C'_{a'}$, $\gamma B'_{a'}$ se întâlnesc în O' rezultă că $C'_{a'} B'_{a'}$ și $\beta\gamma$ se taie în Q pe mediana AA'. Deci $B'_{a'} C'_{a'}$ trece prin Q.

Avem apoi

$$(\alpha OVO') = (\alpha A'\alpha_1 \infty) = \frac{\overline{A'\alpha}}{\overline{A'\alpha_1}} = -1$$

și $\qquad (\beta SC'_{a'} O') = -1 \quad$ unde $\quad S = (AA', O'\beta).$

Diviziunile $(\alpha OVO')$ și $(\beta SC'_{a'} O')$ fiind egale și având un punct comun, dreptele ce cunosc punctele analoage sunt concurente. Rezultă că dreapta $B'_{a'} C'_{a'}$ trece prin V.

DUMITRU G. VASILIU
(Liceul Militar Iași).

Observații. 1°. O foarte bună soluție directă, folosind numai rapoartele, a fost dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (liceul militar Iași).

2°. D-l P. P. DRĂGHICESCU dă încă o soluție problemei, în coordonate baricentrice. Luând

$$ux + vy + wz = 0$$

ecuația transversalei și

$$kx + vy + wz = 0$$

ecuația secantei prin α, d-sa găsește

$$U\ (v - w,\ v,\ -w) \quad , \quad V\ (v^2 - w^2,\ -vk,\ wk).$$

3°. Să plecăm dela $B_{a'}$, presupus dat pe AC şi să urmărim intersecţiile succesive

$$\gamma = (B_{a'}\ Q,\ AB)\ ,\quad \beta = (\gamma\alpha,\ AC)\ ,\quad C_{a'} = (\beta O,\ AB)$$

deci la un $B_{a'}$ dat pe AC corespunde un singur $C_{a'}$ pe AB şi invers. Când $B_{a'} \equiv B$, construcţiile arată că şi $C_{a'} \equiv A$. Punctele $B_{a'}$, $C_{a'}$ descriu deci pe bazele AC şi AB diviziuni omografice în A autoomolog când transversala $\alpha\beta\gamma$ variază. Rezultă că $B_{a'}$, $C_{a'}$ trece printr'un punct fix.

Fie A', N, P picioarele cevienelor lui O şi Y, Z intersecţiile dreptei αO cu AC, AB. Dacă $B_{a'}$ coincide cu N, respectiv Y observăm că $C_{a'}$ coincide cu P, respectiv cu Z. Dreptele NP, $YZ \equiv \alpha O$ fac parte din fascicolul $B_{a'}\ C_{a'}$ şi punctul fix, $U \equiv (NP,\ \alpha O)$. Fie $\alpha_1 \perp (AU,\ BC)$. Punctul O fiind aşezat pe mediană, NP este paralelă cu BC. Avem deci

$$\frac{\overline{\alpha_1 B}}{\overline{\alpha_1 C}} = \frac{\overline{UP}}{\overline{UN}} = \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}$$

deci α_1 este isotomicul lui α, etc.

4°. Soluţia întâia dată problemei trebue complectată cu demonstraţia că şi $B_{a'}\ C_{a'}$ trece prin $V = (OO',\ A\alpha_1)$ ceea ce se poate face în acelaşi mod. De fapt ea e dată în soluţia precedentă.

PROBLEMA 5464. *Fie* P *şi* Q *punctele unde tangenta în* M *la curba (c) întâlneşte axele* Ox, Oy *presupuse perpendiculare. Se cere :*

1°. *Să se determine curba* (C) *astfel ca perpendiculara în* P *pe* Ox *şi perpendiculară în* Q *pe* Oy *să se întâlnească pe normala în* M *la această curbă.*

2°. *Să se arate că segmentul* PQ, *determinat de axe pe tangentă, are aceeaşi lungime pentru toate punctele curbei* (C).

3°. *Să se arate că tangenta în* M *la curba* (C) *este dreapta trecând prin acest punct şi pe care axele de coordonate determină segmentul de lungime minimă.*

ŞERBAN GHEORGHIU.

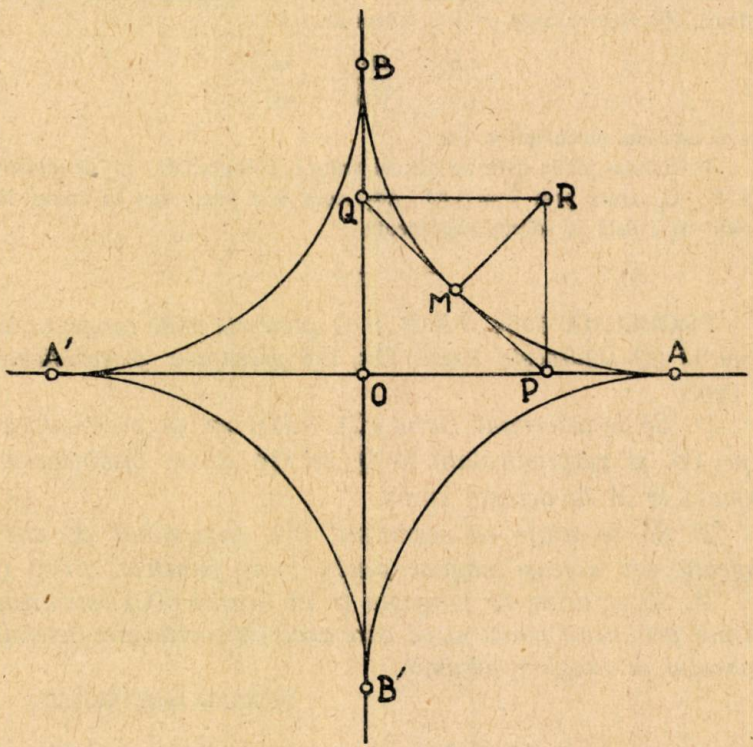
Soluţie dată de D-nii : I. ST. TEODORESCU (Ploeşti), C. BAKONYI (Timişoara), BENO MARCUS (Bucureşti), H. M. BODNĂRESCU (Şc. Politechnică, Bucureşti), P. P. DRĂGHICESCU (Iaşi), C. D. EFTIMIE (Bucureşti), OCTAV C. GHEORGHIU (Iaşi), MIRCEA A. NEGREA (Brăila), MIRCEA C. NICULESCU (Bucureşti), C. PANTELIMON (Bucureşti), MARIN GH. POPESCU (Piteşti), SLT. NIC. D. ŞTEFĂNESCU şi E. WEGENER (Bucureşti).

1. Fie $y = f(x)$ ecuațiunea curbei (C) căutate. Ecuațiunea tangentei, în punctul $M(x, y)$ este:

$$Y - y = y'(X - x)$$

din care se deduc coordonatele punctelor P și Q:

$$P\left(\frac{xy' - y}{y'}, 0\right), \quad Q(0, y - xy').$$



Ecuațiunea normalei la curba (C), în punctul M este:

$$X - x + y'(Y - y) = 0.$$

Scriind că punctul $R\left(\frac{xy' - y}{y'}, y - xy'\right)$ se găsește pe

această normală, obținem ecuațiunea diferențială a curbei (C) sau:

$$xy'^3 + y = 0 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} + \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \therefore \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

unde a este o constantă arbitrară. Curba (C) este deci o *astroidă*.

2°. Avem:

$$\overline{PQ}^2 = \frac{(xy' - y)^2 (1 + y'^2)}{y'^2}.$$

Pentru ca segmentul PQ să fie constant este necesar și suficient să avem:

$$d(PQ) = 0.$$

Sau:

$$\frac{d(\overline{PQ}^2)}{dx} = \frac{2(xy' - y)\, y''\, (xy'^3 + y)}{y'^3} = 0.$$

Această ultimă ecuațiune este evident verificată de punctele curbei (C), cum rezultă din (1).

3°. Axele de coordonate determină pe dreapta:

$$Y - y = (X - x) \operatorname{tg}\alpha,$$

ce trece prin punctul $M(x, y)$, un segment PQ de lungime:

$$PQ = \frac{y}{\sin\alpha} - \frac{x}{\cos\alpha}.$$

Derivând obținem:

$$\frac{d(PQ)}{dx} = -\left[\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, y + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\, x\right].$$

Minimul segmentului are loc, pentru:

$$\operatorname{tg}^3\alpha = -\frac{y}{x} \qquad (2)$$

deci pentru tangenta la curba (C), cum se deduce din (1) Se poate ușor vedea că pentru valoarea lui α, astfel calculată se obține un minimum și nu un maximum pentru segmentul PQ. Calculând derivata următoare și utilizând relațiunea (2) se obține:

$$\left[\frac{d^2(PQ)}{d\alpha^2}\right]_{\text{min.}} = \frac{3x}{\cos^3\alpha} < 0.$$

Observaţiune. Problema aceasta poate fi rezolvată prin consideraţiuni geometrice. Astfel îmi propun, mai întâi, să găsesc pe curba (C) punctul M pentru care segmentul PQ este minimum. Pentru aceasta folosesc *principiul lui* NEWTON al cărui enunţ îl reproduc dupe cartea *Maxime şi Minime Geometrice* a D-lui Profesor I. IONESCU. Citez :

Cel mai scurt segment care se poate duce între două curbe date aşa ca el să fie tangent la o curbă dată P, *este acela care satisface condiţiunilor următoare : normalele duse la cele două curbe în capetele* A *şi* B *ale segmentului să se întâlnească pe normala dusă la curba descrisă de* P *în punctul de contact* [1]).

In cazul nostru, toate punctele curbei (C) satisfac condiţiunii de mînimum. Pe această curbă, avem în toate punctele : $d(PQ) = 0$, deci lungimea PQ este constantă. Curba (C) este prin urmare curba cu tangente egale.

In sfârşit, pentru a demonstra propoziţiunea 3° este suficient a aplica acelaşi principiu general al lui NEWTON, însă într'un caz particular. Citez acest caz particular, tot după D-l Profesor I. IONESCU :

Dintre toate segmentele mărginite la laturile unui unghiu şi trecând printr'un punct dat P *în interiorul lui, acela este minim, pentru care perpendicularele duse la el prin* P *şi la dreptele ce formează laturile unghiului în capetele lui se întâlnesc în acelaşi punct.*

Ş. A. G.

PROBLEMA 5667. *Razele cercurilor exînscrise într'un triunghiu pot fi laturile unui triunghiu?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l VASILE D. PĂLĂCEANU (Liceul militar, Timişoara).

Se cunosc formulele :

$$r_a = S/(p-a) \quad , \quad r_b = S/(p-b) \quad , \quad r_c = S/(p-c).$$

De aci se vede că dacă $a > b > c$ avem şi $r_a > r_b > r_c$. In aceste condiţii pentru ca razele să poată forma un triunghiu trebue să avem :

$$r_a - r_b < r_c \quad \text{şi} \quad r_a + r_b > r_c .$$

Să examinăm pe rând aceste neegalităţi :

I°. Inlocuind razele prin valorile lor, prima neegalitate dă :

$$\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p-b} < \frac{S}{p-c}$$

1) Loc. cit., pag. 107 şi 108.

de unde gonind numitorii şi înlocuind pe p prin valoarea sa, obţinem ecuaţia în c:

$$c^2 + 2(a-b)c - 3a^2 + 2ab + b^2 > 0$$

ale cărei soluţii sunt

(1) $c < b - a - 2\sqrt{a(a-b)}$ sau (2) $b - a + 2\sqrt{a(a-b)} < c.$

Prima soluţie nu este admisibilă, fiind negativă, a doua este admisibilă căci $2\sqrt{a(a-b)}$ este totdeauna mai mare ca $(a-b)$ când $a > b$.

II⁰. Urmând aceeaşi cale ca la I⁰ găsim neegalitatea în c:

$$3c^2 - 2(a+b)c - a^2 + 2ab - b^2 < 0,$$

a cărei soluţie este:

(3) $a + b - 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} < 3c < a + b + 2\sqrt{a^2 - ab + b^2}.$

Coordonând rezultatele aflate la I⁰ şi II⁰ conchidem că razele cercurilor exînscrise unui triunghiu *pot forma un triunghiu* dacă latura c, cea mică a triunghiului satisface condiţiunile de mărime date de neegalităţile (2) şi (3).

PROBLEMA 5695. *Pe dreapta* Δ, *paralelă cu* Ox, *se ia un punct mobil* A. *Fie* B *proiecţia lui* A *pe* Ox, C *proiecţia lui* B *pe* OA *şi* D *intersecţia lui* BC *cu perpendiculara în* O *pe* Ox. *Se uneşte* O *cu simetricul* E *al lui* D *faţă de* B *şi se notează cu* F *intersecţia lui* OE *cu* AB. *Să se demonstreze că, dacă* A *se mişcă pe* Δ, *învelitoarea perpendicularei în* C *pe* FC *este tot una cu locul geometric al lui* C.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie, dată de D-nii: N. ŞTEFĂNESCU (S-lt.); E. N. WEGENER (Bucureşti); P. P. DRĂGHICESCU (Şc. Ofiţeri de Geniu); I. ST. TEODORESCU (Ploeşti); A. H. CUBAT, R. P. VOINEA (Politechnica, Bucureşti); OCT. C. GHEORGHIU (Liceul Internat, Iaşi); ALDEA V. MINEA (Student-inginer, Buzău); M. D. COTARIU (Brăila) şi MARIN GH. POPESCU (Liceul Piteşti).

Fie

$$y = a \quad ; \quad A(\lambda, a) \quad ; \quad A(\lambda, 0)$$

$$\therefore \quad (OA) \quad ax - \lambda y = 0$$

$$(BC) \quad \lambda x + ay - \lambda^2 = 0.$$

Eliminând pe λ între aceste ecuaţii se găseşte că locul lui C este cubica

$$y^3 + x^2 y - ax^2 = 0 \tag{1}$$

care este o cisoidă dreaptă.

Din construcţiile enunţului se găseşte

$$C\left(\frac{\lambda^3}{a^2+\lambda^2}, \frac{a\lambda^2}{a^2+\lambda^2}\right) \quad ; \quad D\left(0, \frac{\lambda^2}{a}\right) \quad ; \quad E\left(2\lambda, -\frac{\lambda^2}{a}\right)$$

de unde se deduce

$$(OF) \quad \lambda x + 2ay = 0 \quad ; \quad F\left(\lambda, -\frac{\lambda^2}{2a}\right).$$

Coeficientul unghiular al dreptei FC este deci

$$m = -\lambda \frac{3a^2+\lambda^2}{2a^2}$$

aşa că perpendiculara în C pe FC va fi

$$2a^3 x - \lambda(3a^2 + \lambda^2) y + a\lambda^3 = 0.$$

Eliminând pe λ între această ecuaţie şi derivata ei în raport cu λ găsim tot ecuaţia (1) ca învelitoare a perpendicularei în C pe FC.

Notă. 1°. Problema are o soluţie geometrică foarte simplă. Fie M intersecţia lui Δ cu Oy şi m proiecţia lui M pe OA. Punctul m descrie cercul de diametru OM, apoi se vede că în dreptunghiul OMAB avem

$$\overline{Om} = \overline{CA} \quad \therefore \quad \overline{OC} \quad \overline{mA}.$$

Ultima egalitate arată că C descrie cisoida lui DIOCLES. Dar atunci, se ştie că tangenta într'un punct C al cisoidei se construeşte ducând perpendiculara în C pe OC, determinând punctele A, B, D, E, F ca în enunţul problemei şi ducând apoi perpendiculara în C pe FC (H. PICQUET. *Traité de géometrie analytique*, première partie, p. 547).

2°. D-l S-LT. N. ŞTEFĂNESCU, în soluţia sa analitică, observă că ecuaţia (1) este ecuaţia podarei unei conice şi demonstrează apoi pe cale geometrică că locul lui E este o parabolă cu vârful în O şi cu axa OD şi că DE este tangentă la acea parabolă.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5791. *Să se demonstreze că determinantul*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-2ac^2 & bc^2 & 2\,{}^2c^2-b^2c^2-2a \\ bc^2 & 2-2ac^2 & abc^2-2b \\ b^2c^2-2a^2c^2+2a & 2b-abc^2 & 2a^3c^2-2a^2-2b^2 \end{vmatrix}$$

este nul, oricare ar fi a, b, c.

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: O. C. GHEORGHIU și E. N. WEGENER. Scăzând din linia a treia elementele liniei întâia înmulțite cu a și apoi elementele liniei a doua înmulțite cu b se obține un determinant cu toate elementele liniei a treia nule, deci identic nul.

Notă. 1°. Au dat soluții analoage, punând în evidență alte linii sau coloane cu toate elementele nule D-nii: A. H. CUBAT, M. D. COTARIU, G. GH. DONȚU, NICOLAE M. GEORGE, P. P. DRĂGHICESCU, N. V. IONESCU, L. GH. MUNTEANU, GR. NADOLU, C. V. PÂRVULESCU, AL. I. ȚIGĂNOIU, D. GH. VASILIU, EUG. CARAMALĂU, M. D. STOENESCU, CĂP. E. ST. IACOB, N. GANEA, C. PANTELIMON, C. C. ȚINCU (Liceul „Diaconovici Loga", Timișoara); S-LT. CORN. M. IONESCU (Politechnica, București); C-TIN CHIRIAC, VLAD GH. JURIST (Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal), CĂLIN I. DIMITRIU.

2°. Au dat soluția exactă desvoltând determinantul și făcând reducerile termenilor asemeni D-nii: M. I. CONSTANTINESCU, I. MAHRENHOLZ, A. N. PITIȘ.

3°. Determinantul din această problemă își are originea în problema 4079 rezolvată la pag. 310, Vol. XXXVIII, *Gazeta Matematică*. Am arătat acolo că ecuația

$$(1) \qquad F(x, y)\, f(a, b) - F(a, b)\, f(x, y) = 0$$

este fascicolul de drepte care unesc centrul conicei

$$F(x, y) = 0$$

de centru (a, b), *cu punctele ei de intersecție cu cercul*

$$f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0.$$

Determinantul precedent exprimă că ecuația (1) reprezintă drepte în cazul

$$F(x, y) = a(x^2+y^2) - bxy + (b^2-2a^2)x - aby + a^3 - 1 = 0.$$

G-L GH. B.

PROBLEMA 5905. *Numărul telefonului dela casa mea este 1.1764. Presupunând că l-aşi uita, cum l-aşi putea reconstitui memorând o singură cifră şi făcând cu ea operațiuni aritmetice simple, elementare?*

I. IONESCU.

Memorând cifra 4, cifră cu care se termină numărul de telefon vom încerca reconstituirea lui, astfel. Ultimele două cifre, mai bine zis numărul format de ele (64) se observă că este egal cu 4^3. Celălalt grup de două cifre (17) este egal cu $(4^2 + 1)$, iar prima cifră a numărului este unitatea, unitate pe care am adăogat-o patratului cifrei 4 pentru a obține grupul mijlociu de două cifre, iar ultimul grup este cubul cifrei 4.

Grupul al doilea de cifre (17) se poate obține și astfel: la grupul de cifre (64), adunăm cifra de memorat 4 și numărul obținut îl împărțim cu 4, avem $64 + 4 = 68$, $68 : 4 = 17$. Iar prima cifră o obținem împărțind cifra de memorat cu ea însăși sau ridicând-o la puterea zero.

MARIN F. VĂDUVA
Student-Inginer, Politechnica București.

Notă. Găsirea grupului 17 prin 4^2 mai cere de memorat cifra 1. Apoi ridicarea la puterea O cere memorarea cifrei O și conduce la o operațiune care iese din cadrul aritmeticei și cere cunoștințe algebrice. Celelalte soluțiuni date sunt în conformitate cu cerințele enunțului.

Soluția autorului. Ultimele două cifre ale numărului telefonic căutat este patratul lui *opt* ($8^2 = 64$). Grupa de cifre 17 constituie al *optulea* număr nepereche în șirul natural al numerelor neperechi. Iar prima cifră 1 este câtul a doi *opturi*. Deci memorând pe 8 putem reconstitui cu înlesnire numărul telefonic cerut.

Au mai dat soluția 4 D-nii: GH. A. GRIGORE și BARBU I. POPESCU.

I. I.

EXERCIȚII

30. *Se cere să se găsească o progresie aritmetică, cu număr impar de termeni, știind că suma termenilor de rang par este* 295, *acea a termenilor de rang impar este* 354 *și că produsul termenilor extremi este* 981.

CPT. E. ST. IACOB.

R. Fie X primul termen, r rația și $2n + 1$ numărul termenilor progresiei cerute:

$$\div\, x \,.\, (x + r) \,.\, (x + 2r) \ldots [x + (2n - 1)\, r].$$

Conform condițiilor enunțului se stabilesc ușor ecuațiile

$$n\,(x + nr) = 295 \quad ; \quad (n + 1)\,(x + nr) = 354 \quad ; \quad x\,(x + nr) = 981.$$

Din prima şi a doua, se scoate prin împărţire:

$$\frac{n+1}{n}=\frac{354}{295} \quad \therefore \quad n=5.$$

Din a doua şi a treia se deduce apoi

$$(59-5r)(59+5r)=981 \quad \therefore \quad r=\pm 10$$

care dă

$$x=9 \quad \text{şi} \quad x=109$$

ceea ce conduce la progresia unică

$$\div 9.19.29.39.49.59.69.79.89.99.109.$$

31. *Fie* A', B', C' *şi* m_a, m_b, m_c *mijloacele laturilor şi lungimile medianelor unui triunghiu* ABC. *Să se demonstreze că:*

$$S^2=4R\,m_a\,m_b\,m_c\,\sin A'AB\,\sin B'BC\,\sin C'CA$$

S *şi* R *fiind suprafaţa şi raza cercului circumscris triunghiului.*

M. D. Cotariu.

R. Din triunghiul A'AB avem

$$\frac{a}{2\sin A'AB}=\frac{m_a}{\sin B}$$

Înmulţim această relaţie cu celelalte două analoage

$$\frac{abc}{8\,\sin A'AB\,\sin B'BC\,\sin C'CA}=\frac{m_a\,m_b\,m_c}{\sin A\,\sin B\,\sin C}=\frac{m_a\,m_b\,m_c}{\frac{abc}{8R^3}}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{abc}{4R}\right)^2=4R\,m_a\,m_b\,m_c\,\sin A'AB\,\sin B'BC\,\sin C'CA$$

care este tocmai relaţia de demonstrat dacă se ţine seamă că

$$abc=4RS.$$

32. *Dacă* x_1, x_2, x_3 *sunt rădăcinile ecuaţiei* $x^3+ax^2+bx+c=0$, *să se calculeze determinantul:*

$$S^2=-\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & 0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix}$$

în funcţie de coeficienţii ecuaţiei date.

T. Stoicescu.

R. Calculând determinantul găsim:

$$S^2=\frac{1}{16}(x_1+x_2+x_3)\,(-x_1+x_2+x_3)\,(x_1-x_2+x_3)\,(x_1+x_2-x_3)$$

Se ştie că:

$$x_1+x_2+x_3=-a \quad ; \quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=b \quad ; \quad x_1x_2x_3=-c$$

aşa că determinantul calculat revine la:

$$S^2=\frac{1}{16}(-a)(-a-2x_1)(-a-2x_2)(-a-2x_3)$$

$$=\frac{a}{16}[a^3+2a^2\Sigma x_1+4a\Sigma x_1x_2+8x_1x_2x_3]$$

$$=\frac{1}{16}(-a^4+4a^2b-8ac) \quad \text{sau} \quad S=\frac{1}{4}\sqrt{-a^4+4a^2b-8ac},$$

care reprezintă, dacă x_1, x_2, x_3 sunt laturile unui triunghiu, suprafaţa triunghiului în funcţie de coeficienţii ecuaţiei date, laturile lui fiind însăşi rădăcinile ecuaţiei.

33. *Să se calculeze integrala:*

$$\int\frac{xdx}{1+x^4}.$$

Să se generalizeze.

T. STOICESCU.

R. 1°. Fracţia $\frac{x}{1+x^4}$ poate fi descompusă în:

$$\frac{x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{(x\sqrt{2}-1)^2+1}-\frac{\sqrt{2}}{(x\sqrt{2}+1)^2+1}\right]$$

deci:

$$\int\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{(x\sqrt{2}-1)^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{(x\sqrt{2}+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+c$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-x^2}\right)=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cotg}x^2.+c.$$

2°. Fac schimbarea de variabilă $x^2=\operatorname{tg}u$, deci

$$xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{\cos^2u};$$

în acest caz, integrala dată ia forma:

$$\int\frac{xdx}{1+x^4}=\int\frac{\frac{du}{2\cos^2u}}{\frac{1}{\cos^2u}}=\frac{1}{2}\int du=\frac{1}{2}u+c \quad , \quad \text{căci } 1+\operatorname{tg}^2u=\frac{1}{\cos^2u};$$

prin urmare

$$z=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+c.$$

3°. Fac schimbarea de variabilă

$$x^2 = sht = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad ; \quad xdx = \frac{cht\ dt}{2} \quad \text{iar} \quad 1 + x^4 = 1 + sh^2t = ch^2t\ ;$$

integrala dată devine:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{\frac{cht\ dt}{2}}{ch^2\ t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{cht}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})} = \int \frac{e^t\ dt}{1+e^{2t}} = \text{arctg}e^t + c\ ;$$

ori, din relaţia $2x^2 = e^t - e^{-t}$ deducem $e^{2t} - 2x^2e^t - 1 = 0$ sau:

$$e^t = x^2 \pm \sqrt{1+x^4} \text{ adică } \int \frac{xdx}{1+x^4} = \text{arctg}\,(x^2 \pm \sqrt{1+x^4}) + c.$$

Generalizare. Să se calculeze integrala:

$$I = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^{2p}}\ ;$$

procedând ca la 2° şi 3° găsim:

$$I = \frac{1}{p}\,\text{arctg}x^p + c \quad \text{sau:} \quad I = \frac{2}{p}\,\text{arctg}\,(x^p \pm \sqrt{1+x^{2p}}) + c.$$

PROBLEME PROPUSE

5950. Pentru aplicarea *Principiului Conservării Neştiinţei*, aviaţia anglo-americană, a bombardat oraşul Bucureşti în ziua de 4 Aprilie 1944, la ora 13,30 (când s'a oprit ceasul dela clădirea Gării de Nord), doborînd construcţii, stricând comunicaţii şi stingând vieţi omeneşti. Analele din Anglia şi din Statele Unite vor înregistra probabil această ispravă.

Se întreabă în ce zi şi la ce oră vor scrie că au făcut-o?

I. IONESCU.

5951. Să se găsească cel mai mic patrat perfect de forma ABCCBA, unde A, B, C sunt întregi cu acelaşi număr de cifre.

M. GHERMĂNESCU.

5952. Să se găsească un număr n de forma p^2q, care să fie egal cu suma a 3, 4 sau 5 dintre divizorii săi pozitivi, p şi q fiind numere prime.

TIBERIU POPOVICIU.

5953. Să se calculeze determinantul

$$\Delta_8 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 & a_8 & a_7 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_7 & a_8 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_6 & a_5 & a_8 & a_7 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_7 & a_8 & a_5 & a_6 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

MIRCEA ADAM.

5954. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x + y + z = 1$$
$$C_n^1 x + C_{n+1}^1 y + C_{n+2}^1 z = C_{n+3}^1$$
$$C_n^2 x + C_{n+1}^2 y + C_{n+2}^2 z = C_{n+3}^2.$$

MAIOR I. M. POPESCU.

5955. Să se discute ecuaţia

$$x^8 + (4\lambda^2 + 1)\, x^6 - x^5 + (6\lambda^4 + 2\lambda^2 - \lambda)\, x^4 - \lambda^2 x^3 + (4\lambda^6 + \lambda^4)\, x^2 + \lambda^8 = 0,$$

λ fiind un parametru real.

Să se rezolve ecuaţia pentru $\lambda = -0{,}375$.

I. V. MĂTIEŞ.

5956. Dacă într'un triunghiu

$$\cos A - \cos B = 2 \sin A \sin B,$$

atunci

$$2c = (\sqrt{5} + 1)(b - a).$$

P. P. DRĂGHICESCU.

5957. Un unghiu drept se roteşte în jurul vârfului lui fix A. Laturile acestui unghiu întâlnesc două drepte Δ şi Δ', date în plan, în punctele B, C şi B', C'. Să se determine poziţia unghiului A pentru care patrulaterul BCB'C' este inscriptibil.

G-L GH. BUICLIU.

5958. Se consideră în plan triunghiul ABC înscris în cercul (O). Există pe (O) trei puncte α, β, γ aşa încât segmentele interceptate de AB şi AC pe tangentele în α, β, γ să aibă mijloacele respectiv în α, β, γ. Să se arate, că ortocentrul triunghiului $\alpha\beta\gamma$ este mijlocul lui $\overline{BC}$. Dacă unghiul A este drept, atunci triunghiul $\alpha\beta\gamma$ este echilateral.

R. BOUVAIST.

5959. In triunghiul ABC, circumscris cercului de centru I fie α, β, γ picioarele bisectoarelor şi M, N intersecţiile dreptei $\alpha\gamma$ cu AI, respectiv perpendiculara în I pe AI. NI taie pe $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ în β', γ'; $M\beta'$, $M\gamma'$, taie pe AB, AC în γ'', β''.

Să se arate, că punctele β'', α, γ'', N sunt aşezate toate pe o tangentă a cercului I.

N. N. MIHĂILEANU.

5960. Tangenta t, la o parabolă cu focarul F şi directoarea d, întâlneşte directoarea în P. Prin P se duce o paralelă Δ la axa parabolei. Se cere înfăşurătoarea dreptei Δ', simetrica dreptei Δ faţă de tangenta t.

N. N. IONESCU.

5961. Să se găsească suprafaţele astfel ca normala în orice punct M al lor să întepe planul XOY într'un punct N a cărui abscisă să fie o funcţie lineară cunoscută de coordonatele lui M.

VIRGIL GHIŢESCU.

5962. Se consideră curba strâmbă (C) definită de ecuaţiile

$$x = k(t-a) \quad , \quad y = \frac{k}{2}\int_a^t \left(T - \frac{1}{T}\right) dt \quad , \quad z = \frac{k}{2}\int_a^t \left(T + \frac{1}{T}\right) dt,$$

T fiind o funcţie de t dată, integrabilă ca şi funcţia $\frac{1}{T}$ în intervalul (a, b), iar k un parametru.

1. Să se arate, că tangenta într'un punct oarecare $M(x, y, z)$ al curbei face un unghiu constant cu o direcţie fixă, care se va determina, şi că arcul curbei OM este proporţional cu cota z a punctului M, unde O este origina.

2. Proprietăţile precedente caracterizând elicele cilindrice, să se calculeze razele de curbură şi torsiune ale curbei (C) şi să se verifice că raportul lor e constant.

3. Să se indice condițiile în care elicea (C) poate fi trasată pe un cilindru circular, de rază R, și să se determine funcția T corespunzătoare.

RADU BĂDESCU.

5963. Față de instrucțiile de camuflaj ale vehiculelor automobile, ținând seama de poziția conducătorului și de aceea a farurilor, cum ar trebui așezată ferestruica de camuflaj de pe fiecare far, pentru ca vizibilitatea să fie optimă, iar proiecția de lumină pe pământ minimă?

COMANDOR I. LINTEȘ.

5964. Se consideră triunghiul ABC în plan vertical, având latura BC orizontală. Din vârful A alunecă, fără frecare, pornind concomitent două mobile grele M, N pe laturile adiacente.

1. Dreapta MN rămâne paralelă cu ea însăși.

2. Patrulaterul BMNC este inscriptibil.

3. Centrul cercului BMNC cade pe verticală ca un mobil greu cu accelerația redusă la jumătate.

4. Dreapta MN cade ca un mobil greu supus unei accelerații: $g \sin B \sin C$.

5. Cele două mobile ajung în același timp la picioarele înălțimilor corespunzătoare și, urmând de aci înălțimile, trec concomitent prin ortocentru.

6. Din momentul schimbării de direcție, deplasarea dreptei MN se face sub acțiunea accelerației $g \cos B \cos C$.

CPT. I. G. ZAMFIRESCU.

ERATĂ. La articolul « *Patrate isofinale* » din numărul 7 se fac următoarele îndreptări:

1°. Pag. 398 rândul 16 de sus se înlocuește u prin n.

2°. In tabloul 4 pag. 402—408 la

Nr. cor. 6 coloana N se scrie -218 în loc de -289
„ 24 „ „ „ $1500m$ „ „ „ $1500n$
„ 28 „ „ „ -2119 „ „ „ $+2119$
„ 36 „ „ „ -1703 „ „ „ -1705
„ 55 „ „ „ 2427 „ „ „ 242
„ 102 „ „ „ -1068 „ „ „ -168
„ 144 „ „ „ $+664$ „ „ „ $+644$
„ 146 „ m se adaugă și cifra 9
„ 147 „ N se scrie $+1054$) în loc de 10 4

3°. Pag. 411 ultimul rând se pune $=$ în loc de $+$ între $100m_2$ și x_2

4°. Pag. 412 la numărătorul fracției din rândul 10 se pune $-$ în loc de $=$

5°. Pag. 413 rândul 4 se scrie $f(x) \quad x^2 - F_p$ în loc de $f'(x) = x^2 - F_p$.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Braşoveanu D. (5849, 909); *Ignat Mircea* (5898); *Pălăceanu D. Vasile* (5644); *Pătrăscioiu I. Mircea* (4132, 5704, 30, 84, 817, 82); *Popescu I. Barbu* (4022, 5649, 904, 7, 9); *Rogoz V. Ioan* (4022, 5813, 909); *Wegener N. Eug.* (4245, 307, 664, 71, 95, 765, 865, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* Euclid. (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 24.818

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

SUMARUL

1. Indicatorul unei sume . . . . . *Comandor I. Linteș.*
2. Asupra dreptei Wallace-Simson . . . . *Mircea D. Popa.*
3. Asupra hipocicloidei cu trei puncte de înapoiere . . . . . *Șerban Gheorghiu.*
4. Considerațiuni asupra rezolvării ecuației lui Laplace în coordonate toroidale . . *T. Vescan.*
5. Raport asupra premiului „V. Cristescu" *Comisiunea pentru premii.*
6. Note matematice: 40 — 43.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 331.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 1424, 4362, 4376, 5301, 5413, 5434, 5688, 5698, 5727, 5768, 5774, 5801, 5828, 5856, 5874.
12. Exerciții: 34.
13. Probleme propuse: 5965 — 5979.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **9**00, 01, 02, 03, 04, 06, 07, 08, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

INDICATORUL UNEI SUME

I. *Cazul când termenii sumei sunt numere prime.*

Fie A, B, C,... mai multe numere prime între ele, având drept factori primi: $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$, $(b_1, b_2, b_3 \ldots)$, $(c_1, c_2, c_3 \ldots)$ etc.... şi fie $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ factorii primi ai sumei acestor numere, atunci avem:

$$\varphi(A+B+C+\ldots) = (A+B+C+\ldots).\frac{\pi(s-1)}{\pi s}$$

apoi:

$$\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)+\ldots = A.\frac{\pi(a-1)}{\pi a}+B.\frac{\pi(b-1)}{\pi b}$$

$$+C.\frac{\pi(c-1)}{\pi c}+\ldots$$

Dacă numerele date sunt prime absolut, atunci:

$$\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)+\ldots = (A+B+C+\ldots)-n$$

unde n este numărul lor. Prin urmare vom avea:

$$\varphi(\Sigma A) = [\Sigma\varphi(A)+n].\frac{\pi(s-1)}{\pi s}.$$

Exemplu numeric: A = 3, B = 5, C = 7 şi D = 11, atunci:

$$\varphi(3+5+7+11) = 12 \quad ; \quad \varphi(3)+\varphi(5)+\varphi(7)+\varphi(11)+4 = 26$$

$$\frac{\pi(s-1)}{\pi s} = \frac{(2-1)(13-1)}{2.13} = \frac{2.3}{13}.$$

Deci:

$$12 = 26.\frac{2.3}{13}.$$

II. *Cazul când termenii sumei au aceiaşi factori, având exponenţi cel puţin egali cu unu.*

In acest caz vom avea:

$$A+B+C+\ldots = M.N$$

unde M are aceiaşi factori ca numerele date, cu exponenţi cel puţin egali cu unu, iar N are factori primi diferiţi.

Fie: $a, b, c, \ldots$ factorii primi ai lui M, atunci:

$$\varphi(A+B+C+\ldots) = \varphi(M).\varphi(N) = M.\frac{\pi(a-1)}{\pi a}.\varphi(N)$$

$$= (A+B+C+\ldots).\frac{\varphi(N)}{N}.\frac{\pi(a-1)}{\pi a}.$$

Apoi cum:

$$\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)+\ldots=(A+B+C+\ldots).\frac{\pi(a-1)}{\pi a}$$

avem:

$$\varphi(\Sigma A)=[\Sigma\varphi(A)].\frac{\varphi(N)}{N}.$$

Dacă facem $A=B=C=\ldots=L$, numărul termenilor fiind n, atunci avem:

$$\varphi(n\,.\,A)=\begin{cases}\varphi(A)\,.\,\varphi(n); \text{ când } n \text{ este prim cu ceilalți factori;}\\ n\,.\,\varphi(A); \text{ când } n \text{ are aceiași factori.}\end{cases}$$

Exemple numerice: 1°. $A=6$; $B=12$; $C=24$; $D=36$, atunci:

$$\varphi(\Sigma A)=24;\quad \Sigma\varphi(A)=26;\quad \frac{\varphi(N)}{N}=\frac{12}{13}.$$

2°. $A=B=C=D=7$, atunci avem:

$$\varphi(4\,.\,7)=\varphi(7)\,.\,\varphi(4).$$

3°. $A=B=C=D=4$, atunci avem:

$$\varphi(4\,.\,4)=4\,.\,\varphi(4).$$

Observație. Indicatorul unei diferențe de doi termeni se poate stabili analog ca pentru o sumă.

COMANDOR I. LINTEȘ.

ASUPRA DREPTEI WALLACE-SIMSON

Se cunoaște următoarea teoremă, generalizarea teoremei WALLACE-SIMSON, datorită lui CARNOT:

Proiecțiile sub un unghiu α *pe laturile unui triunghiu* ABC *ale unui punct* M *de pe cercul circumscris triunghiului sunt situate pe o dreaptă.*

Voiu numi această dreaptă, dreapta Δ de proeicție α a punctului M față de triunghiul ABC, sau dreapta CARNOT. Când $\alpha=90^0$ proiecțiile sunt ortogonale și dreapta poartă numele de dreapta WALLACE-SIMSON a punctului M.

Se ştie că laturile triunghiului ABC sunt tangente unei parabole care are focarul în M iar ca tangentă în vârf dreapta SIMSON a punctului M. Fie DEF dreapta SIMSON a punctului M. Prin punctele A şi M duc un cerc care taie pe AB şi AC în B' şi C'. Se observă că dreapta lui SIMSON a punctului M faţă de triunghiul AB'C' e tot dreapta DEF deci după cele spuse mai sus rezultă că dreapta B'C' e tangentă aceleiaşi parabole (P) cu focarul în M şi având tangentă la vârf dreapta SIMSON a punctului M. Dar din patrulaterul inscriptibil AB'MC' se observă că:

$$\sphericalangle BB'M = \sphericalangle CC'M.$$

Deci dreapta B'C' poate fi considerată ca o dreaptă CARNOT, dreapta Δ de proiecţie $\alpha = \sphericalangle BB'M$ a punctului M faţă de triunghiul ABC. De aici deduc următoarea proprietate:

1. *Dreapta* Δ *de proiecţie* α *a unui punct* M *de pe cercul circumscris triunghiului* ABC *înfăşoară o parabolă cu focarul în* M *şi având ca tangentă la vârf dreapta* WALLACE-SIMSON *a punctului* M.

Sau ţinând seamă de o cunoscută proprietate a parabolei:

2. *Proiecţia punctului* M *pe dreapta* Δ *de proiecţie a acestui punct se găseşte pe dreapta* WALLACE-SIMSON *a punctului* M *faţă de triunghiul considerat.*

Fie acum un punct M în planul unui triunghiu ABC pe care îl proiectăm sub un unghiu constant α în A', B' şi B' pe laturile triunghiului ABC.

Se observă că

$$\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle A'B'M - \sphericalangle C'B'M.$$

Dar

$$\sphericalangle A'B'M = \sphericalangle BCM = \text{constant}$$

$$\sphericalangle C'B'M = \sphericalangle BAM = \text{constant} \quad \therefore \quad \sphericalangle A'B'C' = \text{constant}.$$

Putem dar enunţa următoarea proprietate, ce poate fi considerată ca o generalizare a teoremelor CARNOT-WALLACE-SIMSON:

3. *Proiectând sub un unghiu* α *un punct* M *din planul unui triunghiu pe laturile lui se obţine un triunghiu care atunci când* α *variază rămâne asemenea cu el însuşi.*

Acest triunghiu variază rămânând asemenea cu el însuşi iar trei puncte ale sale descriu trei drepte fixe. Deci laturile sale

înfăşoară parabole cu focarul în centrul instantaneu de mişcare (N. ABRAMESCU, *Gazeta Matematică*, vol. XLI, pag. 413). In cazul particular când M se află pe cercul ABC triunghiul A'B'C' se reduce la o dreaptă şi regăsim astfel teorema 1, dreapta A'B'C' va înfăşura o parabolă cu focarul în M.

Triunghiul A'B'C' rămânând asemenea înseamnă că:

$$\overline{A'B'} / \overline{A'C'} = \text{constant.}$$

Fie acum DEF dreapta Δ de proeicţie α a unui punct M de pe cercul circumscris triunghiului ABC. Din precedentele rezultă că de asemeni vom avea

$$(1') \qquad DE/DF = \text{constant.}$$

Putem găsi şi care e această constantă.

Din triunghiurile MDE şi MDF deduc:

$$\frac{DE}{\sin DME} = \frac{MD}{\sin DEM} \; ; \; \frac{DF}{\sin FMD} = \frac{MD}{\sin DFM}.$$

Impart aceste relaţii ţinând seamă că patrulaterele MOBF şi MDEC sunt inscriptibile:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{\sin DME}{\sin DMF} \cdot \frac{\sin DFM}{\sin DEM} = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot \frac{\sin CBM}{\sin BCM} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$$

Putem deci enunţa următoarea proprietate ţinând seamă de proprietatea 1 de care se bucură dreapta Δ de proiecţie α a punctului M şi în acelaşi timp de relaţia (1').

4. *Dacă pe latura* BC *a triunghiului* ABC *se ia un punct mobil* D *prin care se duce o dreaptă ce taie pe* AB *şi* AC *în* F *şi* E *astfel ca:*

$$\frac{DE}{DF} = \text{constant} = k$$

dreapta DEF *înfăşoară o parabolă cu focarul în* M *pe cercul* ABC *astfel ca*

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{MC}{MB} = k$$

şi tangentă laturilor triunghiului.

Un caz particular al acestei teoreme şi anume $R = 1$ este tratat pe altă cale de D-l N. N. MIHĂILEANU în articolul „*O propoziţie despre punctul* MIQUEL", G. M., vol. XLI, pag. 611. Domnia-sa găseşte că M este punctul unde simediana din A taie cercul ABC.

Iată un mod direct de a stabili această proprietate. Va rezulta că avem:

$$(2') \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}.$$

Fie T intersecţia dreptelor BC şi AM.

Din asemănările de triunghiurile ABT cu CMT şi ACT cu BMT rezultă:

$$\frac{CM}{AB} = \frac{CT}{AT}\ ;\ \frac{BM}{AC} = \frac{BT}{AT}.$$

Prin împărţirea acestor relaţii deduc:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{BT}{CT}\,\frac{AC}{AB}$$

Inlocuind în relaţia (2') deduc:

$$\frac{BT}{CT} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

deci AM este simediană.

Se recunoaşte apoi uşor că dreapta $m_1m_2m_3$ este o dreaptă Δ de proiecţie α a punctului m (articolul citat) întru cât m este punctul lui MIQUEL al figurii $(d_1d_2d_3d)$.

Să proiectez acum punctul M în P pe dreapta DEF, proiecţia fiind făcută sub un unghiu oarecare. Am văzut că dreapta DEF e un triunghiu care rămâne asemenea cu el însuşi iar vârfurile sale descriu trei drepte fixe, redus la o dreaptă. Se ştie (N. ABRAMESCU, G. M., vol. XLI, pag. 413) că orice punct al unei asemenea figuri descrie o dreaptă. Putem deci enunţa următoarea proprietate generalizare a proprietăţii 2:

5. *Proiecţia sub unghiu constant a punctului* M *de pe cercul* ABC *pe dreapta* CARNOT *a acestui punct, descrie o dreaptă.*

Sau ţinând seamă de proprietatea 1 deduc următoarea teoremă

6. *Proiecţia sub un unghiu constant a focarului unei parabole pe o tangentă variabilă descrie o dreaptă, tangentă parabolei.*

MIRCEA D. POPA.

ASUPRA HIPOCICLOIDEI CU TREI PUNCTE DE INAPOIERE

In cele ce urmează îmi propun a reveni asupra propoziţiunii relative la hipocicloida învăluită de dreptele lui SIMSON ale unui triunghiu ce a fost demonstrată în articolul: „*Triunghiuri limită*“ (G. M., XLVIII, pag. 545).

Pentru mai multă claritate încep prin a reaminti câteva proprietăţi clasice ale hipocicloidei. Aceste proprietăţi le obţin utilizând unele din consideraţiunile arătate în articolul: „*Câteva aplicaţiuni ale coordonatelor isotrope*“ (G. M., XLVIII, pag. 150, 202).

1. Fie $A\left(\alpha\,,\,\frac{1}{\alpha}\right)$, $B\left(\beta\,,\,\frac{1}{\beta}\right)$, $C\left(\gamma\,,\,\frac{1}{\gamma}\right)$ vârfurile unui triunghiu (T) înscris în cercul (O) de rază unitatea. Se ştie că dreptele lui SIMSON în raport cu triunghiul (T) ale unui punct mobil pe cercul (O), înfăşoară o hipocicloidă (Σ) cu trei puncte de înapoiere.

Imi propun mai întâi, să stabilesc ecuaţia tangenţială în coordonate isotrope a hipocicloidei (Σ).

Fie pentru aceasta:

$$ux + vy = 1 \qquad (D)$$

ecuaţia unei drepte din plan. Pentru ca dreapta (D) să fie dreaptă SIMSON în raport cu triunghiul ABC, este necesar şi suficient ca perpendicularele pe BC, CA şi AB în punctele unde (D) întâlneşte aceste laturi să fie concurente.

Ecuaţiunea laturii BC fiind

$$x + \beta\gamma y = \beta + \gamma,$$

ecuaţiunea perpendicularei în punctul comun cu (D) este:

$$(\beta\gamma . u + v)\,(x + \beta\gamma y - \beta - \gamma) = 2\beta\gamma\,(ux + vy - 1).$$

Ecuaţiunile celorlalte două perpendiculare se obţin analog iar ecuaţiunea căutată este:

$$\begin{vmatrix} \beta\gamma . u - v & \beta\gamma(\beta\gamma . u - v) & (\beta + \gamma)(\beta\gamma . u + v) - 2\beta\gamma \\ \gamma\alpha . u - v & \gamma\alpha(\gamma\alpha . u - v) & (\gamma + \alpha)(\gamma\alpha . u + v) - 2\gamma\alpha \\ \alpha\beta . u - v & \alpha\beta(\alpha\beta . u - v) & (\alpha + \beta)(\alpha\beta . u + v) - 2\alpha\beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad uv + \varphi_3(u, v) = 0.$$

φ_3 fiind un polinom omogen de gradul al treilea în u şi v.

Se verifică uşor că ecuaţiunea este satisfăcută, înlocuind pe u şi v respectiv prin

$$\left(\frac{1}{\beta+\gamma}, \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\right), \left(\frac{1}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}\right), \left(\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

Aceasta arată că (Σ) este tangentă laturilor BC, CA şi AB. De asemeni, aceeaşi ecuaţiune este verificată pentru perechile de valori:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma}, \frac{-\alpha\beta\gamma}{\alpha^2-\beta\gamma}\right), \left(\frac{\beta}{\beta^2-\alpha\gamma}, \frac{-\alpha\beta\gamma}{\beta^2 \quad \gamma\alpha}\right), \left(\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta}, \frac{-\alpha\beta\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta}\right).$$

ceea ce exprimă că (Σ) este tangentă înălţimilor triunghiului ABC.

In sfârşit, se citeşte pe cea de a doua formă a ecuaţiunii, că hipocicloida (Σ) admite dreapta dela infinit $u=0$, $v=0$ ca tangentă dublă, punctele de contact fiind punctele ciclice ale planului, adică punctele de intersecţie ale dreptei dela infinit cu isotropele $x=0$, $y=0$.

In rezumat, *hipocicloida* (Σ), *este curba de clasa a treia, tangentă laturilor şi înălţimilor triunghiului* (T) *şi bitangentă dreptei dela infinit în punctele ciclice.*

Aceste condiţiuni fiind supraabundente pentru o curbă de clasa a treia, determină în mod unic hipocicloida (Σ).

In cele ce urmează, vom spune că triunghiul (T), este un triunghiu fundamental pentru hipocicloida (Σ).

2. Fie H, ortocentrul triunghiului ABC, P un punct pe cercul circumscris şi P_a proiecţia lui P pe latura BC. Dreapta lui SIMSON a punctului P trecând prin mijlocul segmentului PH, urmează că întâlneşte înălţimea HA într'un punct Q_a astfel că segmentele PP_a şi HQ_a sunt egale. In particular, când punctul P se confundă cu vârful A, punctul Q_a devine punctul de contact al înălţimii HA cu hipocicloida (Σ). Deci:

Tangentele duse din ortocentrul H *hipocicloidei* (Σ), *sunt egale cu înălţimile triunghiului fundamental.*

3. Consider acum un triunghiu (T_1) având vârfurile $A_1\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_1}\right)$, $B_1\left(\beta_1, \frac{1}{\beta_1}\right)$, $C_1\left(\gamma_1, \frac{1}{\gamma_1}\right)$ şi presupun că triunghiurile (T_1) şi (T)

sunt S, adică sunt înscrise în acelaşi cerc şi circumscrise la aceeaşi parabolă. Pentru aceasta se ştie (G. M., XLVIII, pag. 153) că este necesar şi suficient să avem

$$\alpha\beta\gamma = \alpha_1\beta_1\gamma_1 \qquad (1)$$

Reamintesc că dreptele lui SIMSON ale vârfurilor unuia din triunghiurile (T) sau (T_1) în raport cu celălalt sunt concurente în ortopolul comun al laturilor unuia în raport cu celălalt. Acest ortopol coincide cu mijlocul segmentului determinat de ortocentrele celor două triunghiuri. Se găseşte deci, pe directoarea parabolei înscrise comune.

Notăm cu (T_1') triunghiul ce are ca vârfuri A_1', B_1', C_1' diametral opuse pe cercul (O), vârfurilor triunghiului (T_1) şi fie (Δ) triunghiul format de dreptele lui SIMSON ale vârfurilor triunghiului (T_1') în raport cu triunghiul (T).

Triunghiul (Δ) *este triunghiu fundamental pentru hipocicloida* (Σ).

Sau triunghiurile (T) *şi* (Δ) *au aceleaşi drepte* SIMSON.

Rezultă din cele arătate la § 1 că pentru aceasta este suficient să arătăm că laturile şi înălţimile triunghiului în chestiune sunt tangente curbei (Σ).

Că laturile sunt tangente, aceasta este evident. Rămân înălţimile. Punctele A_1 şi A_1' fiind diametral opuse, dreptele lui SIMSON corespunzătoare sunt perpendiculare. Pe de altă parte, triunghiurile $A_1'B_1'C_1'$ şi ABC sunt S fiindcă avem:

$$\alpha_1(-\beta_1)(-\gamma_1) = \alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha\beta\gamma.$$

Rezultă că dreapta lui SIMSON a punctului A_1, este înălţime în triunghiul format de dreptele lui SIMSON ale punctelor A_1', B_1', C_1'. Analog se arată că şi dreptele lui SIMSON ale punctelor B_1 şi C_1 sunt înălţimi ale aceluiaşi triunghiu (Δ) ceea ce demonstrează propoziţiunea enunţată.

4. *Triunghiurile* (T_1), (T_1') *şi* (Δ) *sunt egale.*

Primele două fiind simetrice în raport cu centrul cercului circumscris sunt evident egale. Triunghiul (Δ) format de dreptele lui SIMSON ale vârfurilor triunghiului (T_1') este asemenea acestui triunghiu, raportul de asemănare fiind $\sin\omega$, unde ω este unghiul

dreptelor lui SIMSON ale unui punct arbitrar pe cercul (O) în raport cu triunghiurile (T) şi (T_1')[1]). Deoarece avem $\omega = \frac{\pi}{2}$, rezultă că şi triunghiul (Δ) este egal triunghiurilor (T_1) şi (T_1').

5. Triunghiurile (Δ) se bucură de proprietăţi remarcabile. Aceste proprietăţi nefiind în directă legătură cu propoziţiunea ce urmăresc nu le expun aci. Enunţ totuşi una singură ce poate fi uşor demonstrată cu ajutorul consideraţiunilor ce preced.

Triunghiurile ortice a două triunghiuri fundamentale ale aceleiaşi hipocicloide cu trei puncte de înapoiere sunt triunghiuri S. Cu alte cuvinte triunghiurile (T) şi (Δ) au acelaşi cerc EULER, iar triunghiurile lor ortice sunt circumscrise la aceeaşi parabolă. Fie δ_a, δ_b, δ_c, respectiv ortopolurile diametrelor A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1'. Aceste puncte fiind punctele de intersecţie ale dreptelor lui SIMSON relative punctelor diametral opuse (A_1A_1'), (B_1B_1'), (C_1C_1') se găsesc pe cercul lui EULER al triunghiului ABC. Dar punctele δ_a, δ_b, δ_c, sunt în triunghiul $A_1'B_1'C_1'$ picioarele înălţimilor. Triunghiurile (T) şi (Δ) au deci acelaşi cerc EULER.

Consider acum punctul ω_a, astfel ca triunghiul $A_1A_1'\omega_a$, să fie S cu triunghiul ABC. Punctul ω_a fiind ortocentrul triunghiului dreptunghic $\omega_aA_1A_1'$ este simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC în raport cu ortopolul δ_a. Abscisa isotropă λ_a a punctului ω_a se obţine imediat scriind ecuaţiunea similară lui (1) pentru a exprima că triunghiurile (T) şi $\omega_aA_1A_1'$ sunt S. Avem:

$$-\alpha_1^2\lambda_a = \alpha\beta\gamma.$$

Analog se determină punctele ω_b, ω_c, şi abscisele lor isotrope λ_b, λ_c. Avem în definitiv:

$$\lambda_a\lambda_b\lambda_c = -\frac{\alpha^3\beta^3\gamma^3}{\alpha_1^2\beta_1^2\gamma_1^2} = -\alpha\beta\gamma.$$

Consider încă punctele H_a, H_b, H_c, unde înălţimile AH, BH, CH întâlnesc din nou cercul circumscris. Se găseşte uşor că abscisele isotrope μ_a, μ_b, μ_c, ale acestor puncte sunt:

$$\mu_a = -\frac{\beta\gamma}{\alpha},\quad \mu_b = -\frac{\gamma\alpha}{\beta},\quad \mu_c = -\frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

---

1) A se vedea: Asupra unei propoziţiuni în legătură cu dreapta lui SIMSON. G. M., vol. XLVII, pag. 215.

Avem deci:

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \mu_a \mu_b \mu_c .$$

Omoteticele triunghiurilor ortice ale triunghiurilor (T) şi (Δ) sunt deci circumscrise la aceeaşi parabolă. Rezultă că la rândul lor şi triunghiurile ortice sunt circumscrise unei parabole.

Deoarece triunghiul ortic şi triunghiul median al unui triunghiu dat sunt S iar două triunghiuri S cu un al treilea sunt S între ele, urmează că în enunţul de mai sus, „triunghiurile ortice" pot fi înlocuite prin „triunghiurile mediane".

6. Propoziţiunea ce mi-am propus poate fi acum uşor demonstrată. Fie M un punct arbitrar şi N_1, N_2, N_3 punctele ce au ca drepte SIMSON cele trei tangente duse din M, hipocicloidei (Σ). Triunghiurile ABC şi $N_1N_2N_3$ sunt triunghiuri S. De asemeni, triunghiul format de dreptele lui SIMSON ale punctelor diametral opuse vârfurilor N_1, N_2, N_3, este triunghiu fundamental pentru (Σ). Punctul M este evident ortocentrul acestui din urmă triunghiu. Sau aplicând propoziţiunile § 2 şi § 4 obţinem că:

Cele trei tangente duse dintr'un punct la hipocicloida cu trei puncte de înapoiere învăluită de dreptele lui SIMSON *sunt egale cu înălţimile triunghiului ale cărui vârfuri sunt punctele pentru care dreptele lui* SIMSON *coincid cu tangentele considerate.*

ŞERBAN GHEORGHIU.

CONSIDERAŢIUNI ASUPRA REZOLVĂRII ECUAŢIEI LUI LAPLACE IN COORDONATE TOROIDALE

In unele probleme de fizică matematică şi mai ales în teoria potenţialului se întrebuinţează cu succes transformarea

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a \operatorname{sh}\sigma \cos\varphi}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\varphi} \\ y = \dfrac{a \operatorname{sh}\sigma \sin\varphi}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\psi} \\ z = \dfrac{a \sin\psi}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\psi} \end{cases}$$

care ne permite să trecem dela sistemul dreptunghiular de coordonate (x, y, z) la sistemul de coordonate curbilinii (φ, ψ, σ).

Această transformare, zisă toroidală, aplicată ecuației lui LAPLACE: $\Delta U = 0$, o transformă într'una de forma

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\dfrac{\mathrm{sh}\sigma}{\mathrm{ch}\sigma - \cos\psi}\dfrac{\partial U}{\partial\psi}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(\dfrac{\mathrm{sh}\sigma}{\mathrm{ch}\sigma - \cos\psi}\dfrac{\partial U}{\partial\sigma}\right) + \\ \qquad + \dfrac{1}{(\mathrm{ch}\sigma - \cos\psi)\,\mathrm{sh}\sigma}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0. \end{cases}$$

Introducând schimbarea de variabilă

$$(3)\quad \begin{cases} U = \sqrt{\mathrm{ch}\sigma - \cos\psi}\,\Theta \\ s = \mathrm{ch}\sigma \end{cases}$$

ajungem la ecuația cu derivate parțiale

$$(4)\quad \frac{\partial}{\partial s}\left[(s^2-1)\frac{\partial\Theta}{\partial s}\right] + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\psi^2} + \frac{1}{s^2-1}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{4}\Theta = 0$$

pentru care putem căuta, cu metoda separării variabilelor, o soluție de forma

$$(5)\qquad \Theta = F(\psi)\,.\,\Phi(\varphi)\,.\,S(s).$$

Scopul acestei note este determinarea soluției (5).

Efectuând calculele ajungem la relația

$$(6)\quad \left[\frac{F''}{F} + (s^2-1)\frac{S''}{S} + 2s\frac{S'}{S} + \frac{1}{4}\right](s^2-1) = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

care cere ca $-\dfrac{\Phi''}{\Phi}$ să fie constant, de unde urmează că:

$$\Phi'' + C\Phi = 0, \quad \text{adică}$$

$$(7)\qquad \Phi = A\cos\sqrt{C}\varphi + B\sin\sqrt{C}\varphi$$

unde A și B sunt niște constante arbitrare.

In mod analog și expresia $-\dfrac{F''}{F}$ este o constantă D, adică avem

$$(8)\qquad F = L\cos\sqrt{D}\psi + M\sin\sqrt{D}\psi.$$

Introducând notaţiile

$$\sqrt{C} = m \quad \text{şi} \quad \sqrt{D} = n. \tag{9}$$

ecuaţia (6) se transformă în

$$(1-s^2)S'' - 2sS' + \left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{m^2}{1-s^2}\right]S = 0. \tag{10}$$

Ori soluţia acestei ecuaţii este dată de funcţiile asociate de genul al doilea ale lui LEGENDRE:

$$\left\{\begin{array}{l} S = \dfrac{\lambda(-1)^m \sqrt{\pi}\,(S^2-1)^{\frac{m}{2}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{m+n-\frac{1}{2}}\,dx}{2^{n+\frac{1}{2}}\, s^{m+n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}.x^n\,dx} \times \\ \\ G\left(\dfrac{m+n-1}{2}\ ,\ \dfrac{m+n}{2}+\dfrac{3}{4}\ ,\ n+1\ ,\ \dfrac{1}{s^2}\right) \end{array}\right. \tag{11}$$

unde λ este o constantă arbitrară, iar

$$G(\alpha, \beta, \gamma, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} y^n$$

este funcţia ipergeometrică.

T. VESCAN.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU“

Subsemnaţii membri în Comisia pentru acordarea premiului « VASILE CRISTESCU » — special de trigonometrie, pe anul 1942—43, — cercetând activitatea corespondenţilor *Gazetei Matematice*, — privitoare la această materie, nu am găsit nicio lucrare originală — articol, notă sau probleme propuse, care să satisfacă prevederile sus menţionatului premiu. Iar între rezolvitorii celor şapte probleme cu caracter pur trigonometric, un singur corespondent are la activul său cinci probleme rezolvate, fără a ieşi însă din comun.

In consecinţă, propunem amânarea premiului, pentru o activitate viitoare, mai fructuoasă.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU"

Prof. ALEXANDRU V. NICULESCU, Prof. AL. PANTAZI.

Adunarea generală din 16 Februarie 1944, aprobă raportul.

NOTE MATEMATICE

40. LEIBNIZ sau LEIBNITZ? Sub care din aceste două forme trebue scris numele cunoscutului matematician şi filosof? Germanii îl scriu LEIBNITZ, iar celelalte naţiuni, LEIBNIZ. Acum o nouă întrebare: Cum semna el scrisorile şi actele lui? Din acest punct de vedere, ALBERT CIM în cartea sa *Le Livre*, Vol. V, pag. 325, spune că s'au găsit 6.000 de scrisori ale lui LEIBNIZ semnate fără *t* şi altele scrise latineşte semnate LEIBNITIUS aşa că în corespondenţa lui cu francezii, italienii şi englezii semna LEIBNIZ. Aşa trebue să-l scrim şi noi.

I. I.

41. *Asupra problemei 5363.* In această problemă, rezolvată la pag. 184—185, Vol. XLIX, *Gazeta Matematică*, se cerea ca cu cifrele 1, 2,... 9, luate câte o singură dată, să se formeze un număr N şi patratul său N^2.

Iată o soluţie, care necesită numai 37 ridicări la patrat, în loc de 78, câte s'au efectuat în soluţia citată.

Deoarece $1+2+\ldots 9 = 45$, rezultă că $N^2+N=N(N+1)$ se divide prin 9, deci N sau $N+1$ este divizibil prin 9. Cum în soluţia dată s'a arătat că $351 < N < 937$ şi că N nu se termină prin 1, 5 sau 6, căci atunci N^2 se termină prin aceeaşi cifră, rezultă că numărul N poate fi unul din numerele

432, 512, 612, 692, 782, 792, 872,
413, 423, 513, *593*, 683, *693*, 783, 863, 873.
584, 594, *674*, *684*, *764*, 854, *864*,
387, 467, 567, 647, 657, 827, 837, *917*,
368, 378, *458*, *468*, *548*, 638, *648*, 728, 738, 918,
359, 369, 459, 539, 549, 629, 639, *719*, 729, *819*.

Dintre acestea, eliminăm numerele la care patratul ultimei cifre se termină cu o cifră conţinută printre cifrele lui N, rămânând astfel numai 37 numere, aşa că rezolvarea problemei necesită cel mult 37 ridicări la patrat, deci mai puţin decât jumătate din câte au fost necesare în soluţia citată.

Pentru a micşora şi mai mult ridicările la patrat, se pot examina terminaţiile lui N.

M. G.

42. *Asupra unei formule.* La pag. 116 din G. M. vol. XLVIII se stabileşte formula

$$(1) \qquad C_p^2 + 2C_{p-1}^2 + 3C_{p-2}^2 + \ldots + (p-1)\,C_2^2 = C_{p+2}^4$$

numărând în două feluri punctele de intersecţie ale diagonalelor unui patrulater convex. Dau în cele ce urmează o demonstraţie directă, plecând dela formula cunoscută

$$\sum_0^n C_{p+i}^p = C_{p+i+1}^{p+1}.$$

In virtutea acestei formule, avem succesiv:

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_{p-2}^2 + C_{p-1}^2 + C_p^2 = C_{p+1}^3$$

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_{p-2}^2 + C_{p-1}^2 = C_p^3$$

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_{p-2}^2 = C_{p-1}^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_2^2 + C_3^2 = C_4^3$$

$$C_2^2 = C_3^3.$$

Adunăm elementele de pe aceeaşi coloană:

$$(p-1)\,C_2^2 + (p-2)\,C_3^2 + \ldots + 3C_{p-2}^2 + 2C_{p-1}^2 + C_p^2$$
$$= C_{p+1}^3 + C_{p-1}^3 + \ldots + C_4^3 + C_3^3 + C_{p+2}^4$$

care este tocmai formula (1) cu termenii membrului întâi scrişi în sens invers.

Pe această cale se pot demonstra şi următoarele formule mai generale:

(2) $C_p^n + 2\,C_{p-1}^n + \ldots + (p-n+1)\,C_n^n = C_{p+2}^{n+2}$; $n < p$.

(3) $a_1 C_{p+1}^2 + a_2 C_p^2 + \ldots + a_{p-1} C_3^2 + a_p C_2^2 = a_1 C_{p+2}^3 + r\,C_{p+2}^4$

(4) $a_1 C_{p+1}^n + a_2 C_p^3 + \ldots + a_{p-n+1} C_{n+1}^n + a_{p-n+2} C_n^n$
$= a_p C_{p+2}^{n+1} + r\,C_{p+2}^{n+3}$

unde $a_1, a_2, \ldots$ sunt în progresie aritmetică de raţie r.

M. D. COTARIU.

43. *Asupra teoremei lui* ROBERT-DUCHÊSNE. Sub acest titlu, D-L C. PANTELIMON în *G. M.*, a. XLIX, pag. 219, caută a da adevărata formă a acestei teoreme, eliminând aproximaţia făcută de ROBERT-DUCHÊSNE.

In demonstraţia sa, D-L PANTELIMON a pornit de la o premisă falsă şi natural, a ajuns la o concluzie greşită.

1. Teorema lui SAINT-ROBERT, cunoscută şi sub numele de teorema scoborîrilor constante este exprimată prin relaţia:

$$\sin\beta = \sin\beta_0 . \cos S.$$

Această teoremă este riguros exactă presupunând traectoria parabolică iar punctele B şi C [1]) fiind astfel situate încât:

$$\overline{OP} = \overline{ON} = V_0 . t \qquad (V_0 = \text{const}).$$

Numai în acest caz, $(\overline{ON} = \overline{OP})$ se poate scrie:

$$\overline{NB} = \overline{PC} = \frac{1}{2} gt^2.$$

2. Considerând ipoteza făcută de D-L C. PANTELIMON:

$$\overline{OB} = \overline{OC} = D \quad \text{şi} \quad \overline{NB} = \overline{PC} = \frac{1}{2} gt^2$$

ca valabilă, se găseşte următoarea relaţie:

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{OB}} = \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\overline{PC}}{\overline{OC}} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos S}$$

sau $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta_0 . \cos S.$

1) Ne referim la figura dela pag. 220 din acest volum.

Comparând această expresie cu teorema lui SAINT-ROBERT se constată că ipoteza făcută de D-L C. PANTELIMON poate fi valabilă numai pentru cazul când β_0 este mic adică

$$tg\beta_0 \cong sin\beta_0 .$$

3. Pentru tragerile antiaeriene, se cunoaşte însă numai distanţa ţintei OM = D.

Neputând determina distanţa $\overline{OP}$ corespunzătoare pe linia de proiecţie se pune intrebarea: care este eroarea comisă în determinarea înălţătorului β, folosind formula lui SAINT-ROBERT în care s'a luat β_0 corespunzător lui $D = \overline{OM} = \overline{OB}$ în tragerea la orizontală?

Presupunem că folosind teorema lui SAINT-ROBERT, s'a obţinut un înălţător β, a cărui traiectorie trece prin C.

In triunghiul OCP avem:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{PC}^2 + 2\,\overline{OC}\,.\,\overline{PC}\,.\,\sin S.$$

Făcând înlocuirile:

$$\overline{PC} = \overline{NB} \quad , \quad \overline{OP} = \overline{ON} \quad , \quad \overline{ON}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{NB}^2$$

$$\overline{OC}^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \overline{OC}\,\sin s = y \quad , \quad h = \frac{V_0^2}{2g}$$

avem:

$$\overline{OB}^2 = D^2 = x^2 + y^2 + 8\,.\,h\,.\,y\,.\,\sin^2\beta_0 .$$

Această relaţie arată că $\overline{OB} = \overline{OC}$ când β_0 este mic şi deci putem scrie:

$$\overline{OB} \cong OC = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4. D-L C. PANTELIMON, în discuţia formulelor deduse face o nouă eroare, demonstrând că „*Valoarea unghiului de înălţător este independentă de distanţa liniară*".

In demonstraţia dată se face eroarea considerând că proiecţia vitezei pe orizontală, în tragerile în vid este funcţie de timp, adică:

$$V_x = V_0 \cos\beta_0 = \gamma\,.\,t.$$

Acest lucru se vede că este imposibil scriind ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = V_x = \text{const.}$$

Deci *„valoarea unghiului de înălțător este funcție de distanța liniară, considerând viteza constantă.*

5. In concluzie, pentru un fascicol de traiectorii cu $V_0 = \text{const.}$, considerate în vid:

— Teorema lui SAINT-ROBERT permite a se determina înălțătorul pentru tragerile în altitudine, în mod riguros exact, dacă se cunoaște distanța corespunzătoare pe linia de înălțare.

— Pentru tragerile a. a. teorema lui SAINT-ROBERT permite a se determina înălțătorul numai în cazul traiectoriilor întinse (β_0 mic).

— Unghiul de înălțător este funcție de distanță.

CPT. C. HEYTMANEK.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREȘTI

Secția Cadastru, Chimie și Silvicultură

Examenul din Octombrie 1943. Lucrări scrise

Algebra. I. Printr'un raționament sumar și cu datele numerice culese din observații proprii, să se calculeze:

1°. Greutatea aerului din această sală.

2°. Suprafața orașului București.

II. Valoarea lui g este, la suprafața unei planete, direct proporțională cu masa planetei și invers proporțională cu patratul razei ei.

La suprafața pământului, $g = 980$ cm/sec²; masa lunii este egală cu a 80-a parte din masa pământului, iar raza lunii, egală cu 3 : 11 din raza pământului.

Să se calculeze valoarea lui g la suprafața lunii.

III. In câți ani se triplează un capital depus cu dobândă simplă de 6% pe an? Dar dacă dobânda de 6% pe an este compusă?

IV. Să se verifice că ecuația

$$(x-a):b+(x-b):a=b:(x-a)+a:(x-b)$$

are o rădăcină egală cu zero și alta egală cu $a+b$; să se calculeze a treia rădăcină.

V. Media aritmetică a numerelor x, y este egală cu media geometrică a numerelor a, b și ambele medii sunt egale cu

$$(ax+by):(x+y).$$

Să se calculeze x și y în funcție de a și b; caz particular: $a=9$, $b=49$.

VI. Să se verifice că ecuaţia

$$a:(x+a)+b:(x+b)=c:(x+c)+d:(x+d)$$

are o rădăcină egală cu zero.

Care e condiţia ca ecuaţia să aibă două rădăcini egale?

Să se deslege ecuaţia în acest caz particular.

Trigonometria. I. Mă găsesc pe Valea Cerbului şi privesc Crucea Eroilor ridicată pe Caraiman la cota 2365 m, fie D baza şi E vârful ei, fie C punctul în care dreapta DE prelungită înţeapă planul orizontal în care mă găsesc.

Aleg în planul meu o bază AB lungă de 50 m şi măsor cu tachimetrul înalt de 1,2 m, următoarele patru unghiuri, pentru care găsesc valorile:

$$\sphericalangle CAB = 89^\circ 35'5'' \ , \quad \sphericalangle CBA = 89^\circ 35'5'',$$

$$\sphericalangle CAD = 21^\circ 44'0'' \ , \quad \sphericalangle CAE = 22^\circ 18'19''.$$

1°. La ce cotă deasupra nivelului mării mă găsesc?

2°. Ce înălţime are Crucea eroilor?

II. Cunoscând valorile $tg30^\circ$, $tg45^\circ$, $tg60^\circ$, să se calculeze:

$$tg15^\circ = tg(45^\circ - 30^\circ) = tg(60^\circ - 45^\circ) = tg(30^\circ : 2);$$

$$tg75^\circ = tg(30^\circ + 45^\circ) = tg(15^\circ + 60^\circ).$$

III. Să se arate că ecuaţia

$$p\cos 6x + 2(p^2+1)\sin 3x - 3p = 0$$

are rădăcini reale, oricare ar fi valoarea parametrului p; să se calculeze valorile lui x când $p = \sqrt{2}$.

BIBLIOGRAFIE

Europäische Revue. März/April 1944. XX. Jahr. Heft 3/4. Deutsche Verlags-Anstalt. Stuttgart-Berlin.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXIV. Nr. 2. Aprilie 1944. G. IUGA: O problemă de analiză nedeterminată. Note matematice, bibliografie, probleme rezolvate şi propuse.

Idem. Nr. 3 Mai 1944. G. IUGA: O problemă de analiză nedeterminată. O. N. ŢINO: Contribuţie la rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei nedeterminate omogene de gradul al treilea. Note matematice, bibliografice, probleme rezolvate şi propuse.

Ştiinţă şi Progres. Anul IX. Nr. 5—6. Martie-Aprilie 1944. Timişoara. AR. GRĂDINESCU: Armonia funcţională din corpul omului şi întreţinerea ei. D. V. IONESCU: Asupra unei formule care dă desvoltarea puterii de ordinul n

a unui trinom. TIB. MORARIU: Stâne în Carpaţii României. DR. D. HORTOPANU: O victorie a microbilor, bătălia dela Valmy. G. JANET: Mănăstiri din Nordul Moldovei. DANIEL POPESCU: Sculptorul D. PACIUREA (1875—1932). ZENO CENTEA: Şoseaua ca factor economic. ION PURICA: Catalizatorii şi importanţa lor pentru ştiinţă şi industrie. GABRIELA VICIU: Publicaţii noi. Probleme rozolvate şi propuse.

LE GÉNÉRAL V. NEGREI. *Le dernier théorème de* FERMAT. (Démonstration de ce théorème et quelques applications et théorèmes pour les cas où l'équation indiquée par le dernier théorème de FERMAT est résoluble en nombres entiers). Bucarest 1944.

Privitor la această broşură de 132 pagini, autorul ne spune la pagina 2: *„Cet ouvrage a été tiré dans une première édition en quelques exemplaires, dans laquelle s'est glissé quelques fautes".*

„Cette nouvelle édition corrigée et complétée remplace ainsi l'édition privée".

Cartea a fost trimisă D-lui ION IONESCU sub plic închis recomandat, de către autor. Nu se indică tipografia la care s'a tipărit cartea. Pe plic era trecută adresa autorului: Bucureşti, Strada Roma, Nr. 20. Plicul era închis şi înfăşurat cu o bandă albă pe care era tipărit: *Cet ouvrage aurait pu s'intituler: „Loisirs d'un ancien artilleur".*

Autorul dă la pagina 7 următorul enunţ ultimei teoreme a lui FERMAT: C, A, B *et* n *étant des nombres entiers, la relation ne peut exister que dans le caz où* n *est au plus égal à 2.*

La pagina 124 autorul dă concluziile la care a ajuns în studiul său, printre care prima este că *„Ultima teoremă a lui* FERMAT *este justă",* ceea ce este în contradicţie cu cele puse pe copertă sub titlul cărţii că teorema lui FERMAT este rezolubilă în numere întregi. Ar trebui ca un matematician să urmărească calculele şi demonstraţiile spre a se găsi de unde vine contradicţia.

I. I.

CERERI

331. In muzeul din Fălticeni se află o *„roabă calculatoare de arii"* construită de un ţăran român, anterior *„Planimetrului"*, construit de AMSLER, pe care geografii îl utilizează la calcularea suprafeţelor pe hărţi.

Informaţia am culeş-o din cartea de geografie: *România* (pentru cursul superior al Şc. sec. ed. II-a, pag. 243 de M. DAVID şi P. N. MIRODESCU.

Cum este alcătuită şi cum funcţionează această *„roabă calculatoare de arii"?*

I. V. MĂTIEŞ.

DIVERSE

a) **Redacţionale.** 1°. Din cauza evenimentelor de după 15 Martie 1944 care au făcut ca mulţi membri şi corespondenţi să-şi schimbe adresa şi care împiedică ca expedierea *Gazetei Matematice* să se mai facă din localul societăţii noastre, revista se va trimite numai acelora care-şi vor comunica adresa D-lui ING. GH. ILIESCU, Fabrica de Chibrituri, Str. Fabrica de Chibrituri Nr. 24—26, Bucureşti 6, de unde se va face şi expedierea revistei.

2°. Numărul 9 a apărut la 31 Mai în loc de 15 Mai din cauza unor formalităţi pe care Ministerul Propagandei le-a impus tipografiei.

3°. Numărul de faţă apare în 60 pagini, graţie contribuţiei D-lui Profesor Dr. T. VESCAN care suportă costul imprimării plusului peste numărul normal de 56 pagini spre a publica articolul intitulat: *Contribuţiuni asupra rezolvărei ecuaţiei lui* LAPLACE *în coordonate toroidale.*

b) **Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"**

1. AUGUST FRÖMTER. Lehrbuch für Grundrechnungsarten. Erster Buch. Das Rechnen mit unbenannten Zahlen, nach System KLEYER. Stuttgart 1888.

2. FRÖMTER und NEUBÜSER. Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Zweites Buch. Das Rechnen mit benannten Zahlen, nach System KLEYER. Stuttgart 1890.

3. J. G. MAIER. Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Drittes Buch. Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen nach System KLEYER. Stuttgart 1891.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1424. *Să se găsească locul centrelor iperbolelor echilatere care au un contact de ordinul al doilea cu o parabolă dată în un punct variabil şi care trec prin al doilea punct comun parabolei şi cercului său osculator în* M.

T. PATRICIU.

Soluţie geometrică. Să considerăm cazul mai general al unui fascicol punctual care conţine şi un cerc. Dacă A, B, A′, B′ sunt punctele de intersecţie ale cercului de centru ω cu parabolele P, P′ de parametrii p, p' (Fig. 1), axele lor sunt perpendiculare în acest caz special. Pe figură se notează tot cu P şi P′ şi axele celor două parabole.

Coardele AB, A'B' sunt egal înclinate pe axele parabolelor şi atunci tangentele paralele cu aceste axe sunt simetrice faţă de o aceeaşi axă şi deci punctele lor de contact sunt simetrice faţă de axa considerată. Fie m şi m' punctele de contact cu parabola P; ele sunt tocmai punctele unde diametrele coardelor AB, A'B' întâlnesc curba şi dacă M, M' sunt respectiv mijloacele acestor coarde, segmentele Mm, $M'm'$ sunt paralele şi simetrice faţă de axa parabolei P.

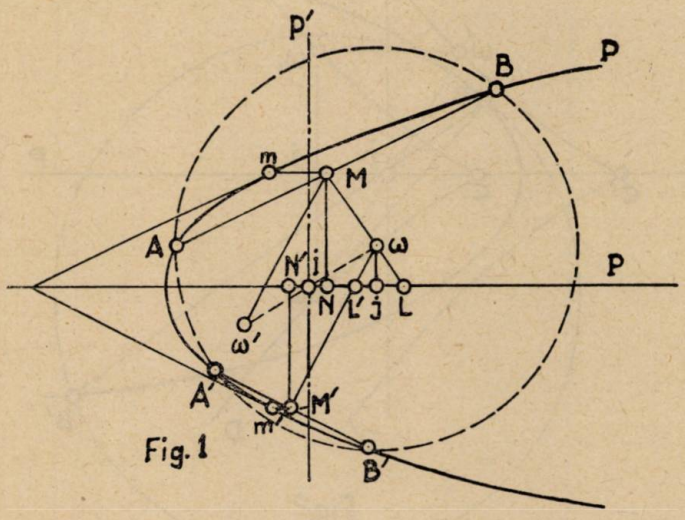


Fig. 1

Fie N, N' proiecţiile punctelor M, M' pe axa parabolei P. Consideraţiuni analoage pentru parabola P', ne arată că MN şi M'N' sunt simetrice faţă de axa parabolei P' şi deci mijlocul I al segmentului NN' este intersecţia axelor parabolelor P, P' sau centrul iperbolei lui APOLONIUS relativă la fascicolul considerat.

Axele iperbolei echilatere de centru ω' a fascicolului, sunt paralele cu axele parabolelor P, P'; ori coarda AB şi diametrul său conjugat Mω' sunt egal înclinate pe asimptotele iperbolei; prin urmare Mω' este simetrica dreptei Mω faţă de MN; tot aşa M'ω' este simetrica dreptei M'ω faţă de MN. Figura Mω'M'ω este un paralelogram şi deci ω' este simetricul lui ω faţă de I. Prin urmare: *In orice fascicol punctual care conţine şi un cerc, centrul acestui cerc, este simetricul centrului iperbolei echilatere faţă de*

intersecția axelor celor două parabole ale fascicolului, sau față de centrul iperbolei lui APOLONIUS *relativă la acest fascicol.*

Revenind acum la problema noastră, punctele A, B, A′ se confundă în B și cercul ω devine osculator la parabole. Ori

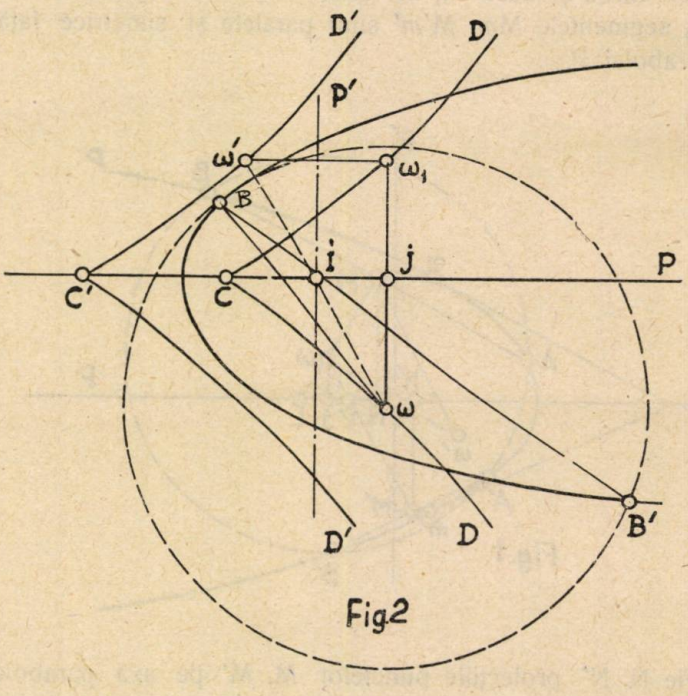


Fig.2

centrul ω descrie atunci desfășurata parabolei P care are ca ecuație

$$27py^2 - 8(x - p)^3 = 0.$$

Apoi ω_1, simetricul lui ω față de axa parabolei P, se găsește tot pe curba considerată și cum $IJ = p$, $\omega\omega_1 = 2p$, locul lui ω_1, va fi o curbă paralelă desfășuratei parabolei, deplasată spre vârful parabolei P cu $2p$. Ecuația locului va fi deci

$$8(X + p)^3 - 27pY^2 = 0.$$

Observații. 1°. Cum $IJ = p$, tot așa $\omega J = p'$, deci parametrii parabolelor P′ sunt ordonatele desfășuratei parabolei P.

2°. Dacă în locul parabolei P s'ar fi dat o iperbolă echilateră, atunci locul lui ω_1 este chiar centrul iperbolei considerate şi centrul iperbolei lui APOLONIUS descrie o curbă omotetică desfăşuratei iperbolei considerate, cu centrul de omotetie ω_1 şi în raportul $^1/_2$.

Această soluţie şi observaţiile dela fine a fost dată de D-l G-l G. I. POPESCU în 1909, când era Sub-Locotenent.

Soluţie analitică. Parabola şi cercul osculator determină un fascicol punctual din care face parte şi iperbola echilateră.

Dacă

$$(1) \qquad Y^2 - 2pX = 0$$

este ecuaţia parabolei date, cercul osculator în punctul (x, y) are ca ecuaţie

$$(2) \quad \left[X - x + \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]^2 + \left[Y - y - \frac{1+y'^2}{y''}\right]^2 - \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = 0$$

variabilele x şi y verificând relaţia (1) iar y', y'' reprezentând respectiv primele două derivate.

Ecuaţia fascicolului, după efectuarea reducerilor din ecuaţia cercului osculator, este

$$(3) \quad \begin{cases} (X-x)^2 + (Y-y)^2 + 2[(X-x)y' \\ -(Y-y)]\dfrac{1+y'^2}{y''} + \lambda(Y^2 - 2pX) = 0 \end{cases}$$

şi pentru a obţine iperbole echilatere trebue să luăm $\lambda = -2$.

Centrul se găseşte la intersecţia dreptelor

$$(4) \quad \begin{cases} X - x + \dfrac{1+y'^2}{y''}y' + 2p = 0 \\ -Y - y - \dfrac{1+y'^2}{y''} = 0. \end{cases}$$

Diferenţiind relaţia (1) avem

$$y' = \frac{p}{y} \quad , \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3} \quad , \quad x = \frac{y^2}{2p}$$

astfel că ecuaţiile (4) devin, după înlocuire şi efectuarea reducerilor

$$2pX + 2p^2 - 3y^2 = 0$$

$$p^2 Y - y^3 = 0$$

rezultând, după eliminarea lui y, ecuaţia locului centrelor iperbolei echilatere

$$8(X+p)^3 - 27pY^2 = 0$$

care comparată cu ecuaţia desfăşuratei parabolei, şi anume

$$8(X-p)^3 - 27pY^2 = 0$$

arată paralelismul acestor două curbe.

Parabola P' se obţine făcând $\lambda = -1$ în ecuaţia fascicolului.

Această soluţie analitică a fost dată de D-nii G-l Gh. Buicliu (în 1908, când era Sub-Lt.), G-l G. I. Popescu (în 1909), D-l Maior M. Focşeneanu (în 1926 când era S-Lt.), G. G. Constantinescu şi C. Mititelu (când erau studenţi).

PROBLEMA 4362. *Fie* $\varphi(N)$ *indicatorul lui* N. *Se cer numerile* k *mai mici decât 100 astfel ca egalitatea*

$$\varphi(N) = N - k$$

să fie imposibilă.

T. Popoviciu.

Soluţia. 1. E evident că egalitatea e imposibilă pentru k neîntreg sau nepozitiv. Fie deci k întreg şi pozitiv.

Se ştie că avem

$$\varphi(N) \leqq N - 1,$$

oricare ar fi N, egalitatea fiind adevărată dacă şi numai dacă N este prim.

Rezultă dar că, pentru $k = 1$, ecuaţia

$$\varphi(N) = N - k \tag{1}$$

este posibilă şi e satisfăcută de orice N prim. In acest caz ecuaţia (1) are deci o *infinitate* de soluţii în N.

2. Dacă $k > 1$ e destul deci să considerăm numai numerele N compuse, căci numai pentru un astfel de N ecuaţia (1) ar putea să fie posibilă.

Să demonstrăm întâi următoarea lemă de care vom avea nevoie mai apoi.

Lema. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt $n \geqq 2$ numere pozitive şi cel puţin egale cu 1, avem

$$(2) \quad x_1 x_2 \ldots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_n - 1) \geqq \sqrt{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

unde egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Demonstraţia se face prin inducţie complectă. Proprietatea este adevărată pentru $n = 2$. Dacă ţinem seamă de inegalitatea bine cunoscută

$$(3) \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1 x_2},$$

şi de $x_1 \geqq 1$, $x_2 \geqq 1$, avem

$$(4) \quad x_1 x_2 - (x_1 - 1)(x_1 - 1) = x_1 + x_2 - 1 \geqq 2\sqrt{x_1 x_2} - 1 \geqq \sqrt{x_1 x_2},$$

ceea ce demonstrează proprietatea. Să presupunem acum că proprietatea e adevărată pentru $n - 1$ numere x_i şi să o demonstrăm pentru n numere x_i. Avem

$$(5) \quad x_1 x_2 \ldots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_n - 1) =$$
$$= x_n [x_1 x_2 \ldots x_{n-1} - (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_{n-1} - 1)]$$
$$+ (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_{n-1} - 1) \geqq x_n [x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$$
$$- (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_{n-1} - 1)] \geqq x_n \sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}$$
$$\geqq \sqrt{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

ceea ce demonstrează complect lema noastră. Din (3), (4) şi (5) se deduce imediat cazul când avem egalitatea în (2).

3. Vom demonstra acum următoarea proprietatea exprimată de:

Teorema 1. Dacă N *este un număr compus, avem*

$$(6) \quad N - \varphi(N) \geqq \sqrt{N}$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă N *este patratul unui număr prim.*

Fie numărul N descompus în factori primi

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

unde n este numărul factorilor primi diferiţi ai lui N şi unde vom putea totdeauna presupune că $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Deoarece N este compus, avem

$$\alpha_1 \geqq 1, \ \alpha_2 \geqq 1, \ldots, \ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 1.$$

Putem acum scrie

$$(7) \qquad N - \varphi(N) = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_n^{\alpha_n - 1}$$
$$[p_1 p_2 \dots p_n - (p_1 - 1)\ (p_2 - 1) \dots (p_n - 1)],$$

deoarece se ştie că

$$\varphi(N) = p_1^{\alpha_1 - 1}\, p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_n^{\alpha_n - 1} (p_1 - 1)\ (p_2 - 1) \dots (p_n - 1).$$

Dacă $n = 1$, diferenţa (7) se reduce la $p_1^{\alpha_1 - 1}$, unde $\alpha_1 \geqq 2$. Avem însă, în acest caz,

$$p_1^{\alpha_1 - 1} \geqq p^{\frac{\alpha_1}{2}} = \sqrt{N} \quad , \quad \alpha_1 \geqq 2,$$

cum se poate uşor verifica. Egalitatea subsistă numai pentru $\alpha = 2$.

Dacă $n > 1$, aplicând numerelor $p_1, p_2, \dots, p_n$, cari sunt toate $\geqq 2$, lema dela Nr. 2, deducem

$$N - \varphi(N) > p_1^{\alpha_1 - 1}\, p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_n^{\alpha_n - 1} \sqrt{p_1 p_2 \dots p_n} \geqq \sqrt{N},$$

deoarece

$$p_i^{\alpha_i - \frac{1}{2}} \geqq p^{\frac{\alpha_i}{2}} \quad , \quad \alpha_i \geqq 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 1 este complect demonstrată.

Putem acum deduce şi următoarea proprietate interesantă.

Teorema 2. Dacă numărul dat k *este întreg şi mai mare decât* 1, *ecuaţia* (1) *în* N *are cel mult un număr finit de soluţii.*

Din cele ce preced rezultă că dacă $k > 1$, N nu poate fi prim. Teorema 1 ne arată atunci că, pentru o soluţie N a ecuaţiei (1), avem

$$k = N - \varphi(N) \geqq \sqrt{N},$$

deci

$$(8) \qquad N \leqq k^2,$$

ceea ce demonstrează teorema 2.

4. Pentru a răspunde acum problemei propuse ar fi destul să calculăm pe φ (N), pentru $N < 99^2 = 9801$ şi să vedem ce valori poate lua diferenţa $N - \varphi(N)$. Această cale însă nu e de loc practică, necesitând calcule lungi. O examinare mai atentă a celor stabilite mai sus ne va duce mai simplu la rezultat. In definitiv, limitaţia (8) a lui N este prea grosolană şi e mai bine să ţinem acum seamă de valoarea dată de (7) pentru k.

Pentru a vedea cari sunt valorile pe cari k nu le poate lua e suficient şi e mai bine să examinăm valorile pe cari k le poate lua.

Din analiza noastră rezultă întâi că *k ia toate valorile prime şi puteri de numere prime.*

Dacă luăm $N = p_1 p_2$, avem $k = p_1 + p_2 - 1$, unde p_1, p_2 sunt numere prime diferite. De aici deducem că *k ia toate valorile impare < 100.* Pentru a vedea acest lucru e suficient să descompunem pe $k+1$ într'o sumă de două numere prime diferite. Las pe seama cetitorilor să facă verificările necesare. Pe baza observaţiei de mai sus e suficient a face verificările pentru k diferit de o putere a unui număr prim.

Rămâne să examinăm valorile pare ale lui k. Atunci trebue ca N să fie par, deci $p_1 = 2$. Observăm întâi că expresiunea

$$(9) \quad p_1 p_2 \ldots p_n - (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_n - 1)$$

este crescătoare în raport cu fiecare din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ cari sunt toate, evident, > 1. Pe de altă parte evident că $p_1 = 2$, $p_2 \geqq 3$, $p_i \geqq i + 2$, $i > 2$, deci pentru $n \geqq 4$ expresiunea (9) este $\geqq 2 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (n+1)(3n+2) > 100$. De aici se constată că, deoarece ne interesează numai valorile $k > 100$, e destul să luăm $n < 4$.

Cazul $n = 1$, este complect studiat mai sus. Va fi deci destul să presupunem $1 < n < 4$.

Cazul $n = 2$ ne dă pentru k valori de forma

$$(10) \qquad k = 2^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 + 1),$$

unde $\alpha_1 \geqq 1$, $\alpha_1 \geqq 1$ şi p_2 un număr impar. O verificare uşoară ne arată că singurele numere pare $k < 100$ cari nu sunt de forma (10) sunt

(11) 10, 22, 26, 34, 46, 50, 52, 58, 66, 70, 78, 82, 86, 92, 94.

Pentru această verificare e destul să cunoaştem numerele prime până la 100.

Pentru a vedea dacă valorile (11) pot fi luate de k, trebue să mai considerăm cazul $n = 3$, care ne dă pentru k valori de forma

$$(12) \qquad k = 2^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} p_3^{\alpha_3 - 1}(p_2 p_3 + p_2 + p_3 - 1),$$

unde $\alpha_1 \geqq 1$, $\alpha_2 \geqq 1$, $\alpha_3 \geqslant 1$ şi p_2, p_3 sunt numere prime impare diferite. Pentru verificare e destul a lua $p_3 < 29$, deoarece

$$3 \cdot 29 + 3 + 29 - 1 = 118 > 100$$

şi se găseşte uşor că dintre numerele (11) numai

22, 46, 66, 70, 78, 82, 92, 94

sunt de forma (12).

In definitiv deci soluţiile problemei 4362 sunt următoarele 7 numere

10, 26, 34, 50, 58, 86.

Observări. 1. Căutarea valorilor *impare* ale lui k, aşa cum am văzut mai sus, permite să enunţăm ca destul de probabilă următoarea proprietate:

Teorema 3 (probabilă). *Numărul* $k = N - \varphi(N)$ *poate lua orice valoare impară.*

Cred însă că demonstrarea acestei proprietăţi prezintă serioase dificultăţi.

Există în teoria numerelor o celebră proprietate numită teorema empirică sau ipoteza lui GOLDBACH şi care se enunţă sub forma următoare:

Orice număr par este suma a două numere prime.

Această teoremă a lui GOLDBACH nu a putut fi demonstrată până în prezent (şi nici nu s'a putut infirma prin exemple). Admiţând că teorema lui GOLDBACH este adevărată, teorema 3 nu rezultă încă. Dacă însă admitem ca adevărată următoarea formă ceva mai precisă a teoremei lui GOLDBACH:

Orice număr par (> 4) *este suma a două numere prime diferite,* atunci teorema 3 rezultă şi anume rezultă că există un N produs de factori primi diferiţi pentru care avem (1). S'a reuşit totuşi să se arate că ipoteza lui GOLDBACH, chiar sub forma a doua mai precisă, este verificată pentru toate numerele pare până la 5000. Putem dar afirma că numărul k ia orice valoare impară < 5000. Ţin să mai adaog că teorema 3 nu este echivalentă cu teorema lui GOLDBACH deoarece $k + 1$ poate lua a priori şi alte forme decât cele cerute în teorema lui GOLDBACH.

2. Când k are o valoare dată şi dacă avem la îndemână o tablă de numere prime suficient de întinsă, putem determina toate seluţiile ecuaţiei (1).

3. Metoda precedentă e evident aplicabilă şi pentru cazul când în loc de 100 se ia o altă limitaţie superioară a lui k.

T. P.

PROBLEMA 4376. *Fie* l_a, l_b, l_c *lungimile bisectoarelor exterioare limitate la laturile* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ *ale unui triunghiu;* O, I, H *centrele cercurilor circumscris, înscris şi ortocentrul triunghiului. Să se demonstreze relaţia dintre arii:*

$$\frac{OIH}{ABC} = \frac{abc}{l_a l_b l_c}.$$

V. THÉBAULT.

Fie (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ coordonatele baricentrice *absolute*, ale punctelor D, D', D'' din planul triunghiului ABC față de acest triunghiu fundamental. Se știe [1]) că între suprafețele triunghiurilor ABC, DD'D'' și coordonatele baricentrice *absolute* ale vârfurilor D, D', D'' există relația

$$DD'D'' = \frac{1}{(ABC)^2} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

Aplic această formulă la cazul problemei de față, pentru care notez $O(\alpha, \beta, \gamma)$; $I(\alpha', \beta', \gamma')$; $H(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Se știe că

$$O\left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{R\cos A}{2} \\ \beta = \dfrac{R\cos B}{2} \\ \gamma = \dfrac{R\cos C}{2} \end{array}\right\}; \quad I\left\{\begin{array}{l} \alpha' = \dfrac{ar}{2} \\ \beta' = \dfrac{br}{2} \\ \gamma' = \dfrac{cr}{2} \end{array}\right\}; \quad H\left\{\begin{array}{l} \alpha'' = a\,R\cos B\cos C \\ \beta'' = b\,R\cos C\cos A \\ \gamma'' = c\,R\cos A\cos B \end{array}\right\}.$$

Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \frac{abc\,R^2 r}{4} \begin{vmatrix} \cos A & \cos B & \cos C \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos B\cos C & \cos C\cos A & \cos A\cos B \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc\,R^2 r}{4} \Sigma \cos A\,[\cos^2 C - \cos^2 B].$$

Dar

$$\cos^2 C - \cos^2 B = (\cos C - \cos B)(\cos C + \cos B) =$$

$$= 2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2} \times 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} =$$

$$= \sin(B+C)\sin(B-C) = \sin A\sin(B-C).$$

---

1) C. Coșniță. *Coordonnées Barycentriques*, pag. 51.

Dacă înlocuim *sin* şi *cos* în funcţie de laturi, avem

$$\Sigma \cos A(\cos^2 C - \cos^2 A) = \Sigma \sin A \sin(B - C) =$$

$$= \Sigma \frac{a}{2R} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \left[\frac{b}{2R} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - \frac{c}{2R} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right]$$

$$\therefore \quad \Sigma \cos A(\cos^2 C - \cos^2 A) = \frac{1}{8R^2} \Sigma \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{bc} =$$

$$= \frac{1}{8abcR^2} \Sigma a(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2).$$

Calculând separat pe ultimul Σ, se găseşte

$$\Sigma a(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)^2.$$

Aşa că în definitiv avem

$$\Sigma \cos A(\cos^2 C - \cos^2 A) = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)^2}{8abcR^2} =$$

$$= \frac{(a - b)(b - c)(c - a)p^2}{2abcR^2}.$$

Inlocuind în expresiunea lui Δ, găsim

$$\Delta = \frac{abcR^2 r}{4} \times \frac{(a - b)(b - c)(c - a)p^2}{2abcR^2} = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)p^2 r}{8}.$$

Cu acestea, raportul suprafeţelor triunghiurilor din enunţ devine

$$\frac{OIH}{ABC} = \frac{\Delta}{(ABC)^3} = \frac{\Delta}{S^3} = \frac{\Delta}{p^3 r^3} = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{8pr^2}. \qquad (2)$$

Se cunosc formulele

$$l_a = \frac{2bc}{b - c} \sin \frac{A}{2} = \frac{2bc}{b - c} \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}; \ldots$$

aşa că pentru produsul $l_a l_b l_c$ avem

$$l_a l_b l_c = \frac{8a^2 b^2 c^2}{(b - c)(c - a)(a - b)} \cdot \frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{abc} =$$

$$= \frac{8abcpr^2}{(a - b)(b - c)(c - a)}$$

şi în definitiv

$$\frac{abc}{l_a l_b l_c} = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{8pr^2}. \qquad (3)$$

Comparând (2) cu (3) se verifică relaţia din enunţ

$$\frac{OIH}{ABC} = \frac{abc}{l_a l_b l_c} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8pr^2} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8rS}.$$

MIRCEA A. NEGREA
(Brăila).

Notă. Din relaţiile (2) ale soluţiei precedente se deduce că suprafaţa σ a triunghiului OIH este

$$\sigma = \frac{1}{8r}(a-b)(b-c)(c-a) \qquad (1)$$

sau, numai în funcţie de laturi

$$\sigma = \frac{p(a-b)(b-c)(c-a)}{8\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}. \qquad (2)$$

Formula (1) este cunoscută. Ea a fost găsită de P. SONDAT [1]) şi stabilită mai apoi şi de E. LEMOINE [2]) cu ajutorul relaţiilor între elementele lineare şi trigonometrice ale unui triunghiu.

D-l V. THÉBAULT a dat o soluţie sintetică simplă cu ajutorul unei proprietăţi a ortopolului unei drepte în raport cu un triunghiu [3]). Reproducem aci în rezumat soluţia D-lui V. THÉBAULT, pentru originalitatea ei. Fie x, y distanţele ortocentrului şi al punctului lui FEUERBACH φ la dreapta OI şi α, β, γ unghiurile pe care această dreaptă le face cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului. Se ştie că

$$I = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{R}{4\overline{OI}^3}(a-b)(b-c)(c-a),$$

căci φ este ortopolul diametrului OI. Dar dacă I' este simetricul lui I faţă de O_9, patrulaterul OIHI' este un paralelogram; x este deci distanţa punctului I' la OI şi

$$\frac{x}{y} = \frac{II'}{I\varphi} = \frac{2IO_9}{I\varphi} = \frac{R-2r}{r}.$$

Se deduce

$$x = \frac{1}{4r \cdot OI}(a-b)(b-c)(c-a)$$

şi

$$\sigma = \frac{1}{2}OI \times x = \frac{1}{8r}(a-b)(b-c)(c-a).$$

---

1) *Nouvelles Annales*, 1890, pag. 49.
2) „ „ 1891, pag. 42.
3) *Mathesis*, 1933, pag. 309/10.

2°. D-l AD. MINEUR a dat după aceea tot în *Mathesis*, Vol. XLVII, pag. 311, formula

$$OHK = 3OGK = -\frac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{8S(a^2+b^2+c^2)}$$

K fiind punctul lui LEMOINE, iar G centrul de grutate al triunghiului ABC.

3°. Se pot stabili formule analoage pentru orice alte grupe de trei puncte din punctele caracteristice ale triunghiului, întrebuinţând formula

$$Supr.\ P_1P_2P_3 = \frac{R^2}{2}\begin{vmatrix} \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}$$

în care α_i, β_i, γ_i sunt coordonatele baricentrice *absolute* ale punctelor P_i faţă de un triunghiu ABC. Această formulă a fost stabilită de D-l AD. MINEUR în *Mathesis*, Vol. XLVII, pag. 311.

4°. O bună soluţie, puţin diferită de a D-lui M. A. NEGREA, s'a primit recent şi dela D-l P. P. DRĂGHICESCU.

PROBLEMA 5301. *Se dă o iperbolă echilateră cu vârfurile în* A *şi* A'. *şi se duce un cerc* (Γ) *tangent axei transverse în* A'.

1°. *Să se determine raza cercului* (Γ) *astfel încât să fie tangent iperbolei şi să se arate că proiecţia punctului de contact pe axa transversă se poate găsi printr'o construcţie grafică.*

2°. *Să se găsească locul geometric al intersecţiei coardelor comune iperbolei şi cercului* (Γ), *când acesta este variabil.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nii: TUDOR GOSPODIN (prof. Cluj), D-TRU RIPIANU, MIRCEA D. POPA (liceul militar, Iaşi), EUGEN N. WEGENER (Bucureşti) şi PAUL P. DRĂGHICESCU (liceul militar, Iaşi).

Ecuaţia iperbolei echilatere este:

$$(1) \qquad x^2 - y^2 - a^2 = 0,$$

iar a cercului tangent axei Ox în $A'(-a, 0)$, cu raza $r = \lambda$:

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2ax - 2\lambda y + a^2 = 0.$$

1°. Pentru ca iperbola şi cercul să fie tangente trebue ca ecuaţia care ne dă fie absciselе, fie ordonatele să aibă două rădăcini confundate. Să căutăm absciselе. Adunând (1) cu (2) obţinem:

$$x^2 + ax - \lambda y = 0,$$

de unde scoatem pe y şi-l înlocuim în (1). Găsim:

$$(3) \qquad x^4 + 2ax^3 + (a^2 - \lambda^2)\, x^2 + a^2\lambda^2 = 0$$

ecuaţie care admite rădăcina $x = -a$, deci putem împărţi cu $(x + a)$ şi ne rămâne:

$$(4) \qquad x^3 + ax^2 - \lambda^2 x + a\lambda^2 = 0.$$

Condiţia ca această ecuaţie să admită o rădăcină dublă se poate pune fie obligând-o să aibă o rădăcină comună cu derivata sa, fie folosind relaţiile între rădăcini şi coeficienţi. Dacă procedăm prin prima metodă e bine să facem ecuaţia (4) omogenă şi să căutăm rădăcina comună între f'_x şi f'_y. Găsim

$$x = \frac{5a\lambda^2}{a^2 + 3\lambda^2}$$

care întrodusă în derivata lui (4) ne dă

$$\lambda^4 - 11a^2\lambda^2 - a^4 = 0 \quad \therefore \quad \lambda = a\sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}}.$$

Am aflat raza λ a cercului. Aceasta dusă în valoarea rădăcinii comune ne dă abcisa punctului de contact

$$x = a\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

care fiind egală cu latura decagonului stelat înscris în cercul de rază a, se poate construi grafic, după cum se ştie.

Dacă se porneşte dela relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, atunci e preferabil să se elimine λ^2 şi se obţine întâi abscisa punctului de contact şi apoi raza cercului.

2°. Conicele ce trec prin intersecţia iperbolei (1) cu cercul (2) sunt de forma:

$$x^2 + y^2 + 2ax - 2\lambda y + a^2 + k\,(x^2 - y^2 - a^2) = 0$$

$$\therefore \quad (5) \quad (1 + k)\, x^2 + (1 - k)\, y^2 + 2ax - 2\lambda y + (1 - k)\, a^2 = 0.$$

Pentru ca să se descompună în două drepte va trebui să avem:

$$\begin{vmatrix} 1+k & 0 & a \\ 0 & 1-k & -\lambda \\ a & -\lambda & a^2(1-k) \end{vmatrix} = 0.$$

Sau:

(6) $$a^2k^2(1-k)+\lambda^2(1+k)=0.$$

De altă parte punctul comun al celor două drepte e dat de sistemul format de derivatele parţiale ale ecuaţiei (5):

(7) $$(1+k)x+a=0 \quad ; \quad (1-k)y-\lambda=0.$$

Eliminând pe λ şi k între (6) şi (7) găsim locul căutat.
Prima ecuaţie din (7) ne dă:

$$1+k=-\frac{a}{x} \text{ şi deci } 1-k=\frac{2x+a}{x},$$

iar a doua ne dă:

$$\lambda=\frac{2x+a}{x}y.$$

Acestea duse în (6) ne dă locul geometric

(8) $$a(x+a)^2-(2x+a)y^2=0.$$

Pentru reprezentare grafică scoatem din (8):

$$y=\pm(x+a)\sqrt{\frac{a}{2x+a}}.$$

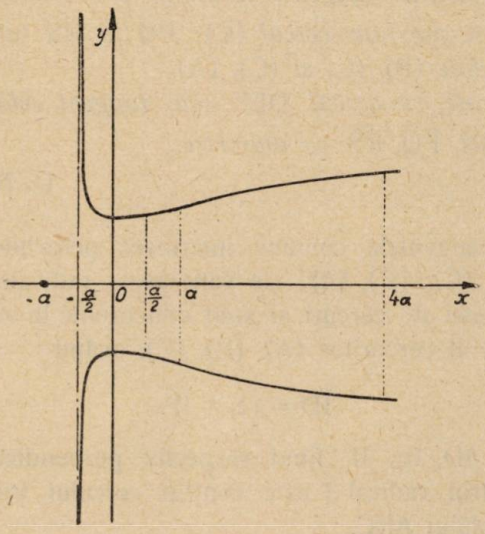
Curba are ca punct izolat $A'(-a, 0)$. Domeniul de realitate este pentru $x > -\frac{a}{2}$.

Derivatele sunt:

$$y'=\sqrt{a}\,\frac{x}{(2x+a)^{3/2}} \quad ; \quad y''=\sqrt{a}\,\frac{a-x}{(2x+a)^{5/2}}.$$

Tabloul de variaţie se poate alcătui uşor:

x	$-\infty$ $-a$	$-\frac{a}{2}$	0	a	$4a$	$+\infty$
y'		∞ $-$ $-$	0 $+$ $+$	$+$	$+$	
y''		$+$		0 $-$	$-$	
y	0	$\infty \searrow$	$a \nearrow$ min.	$\frac{2}{3}a\sqrt{3} \nearrow$ inflex.	$\frac{5}{3}a \nearrow$	$+\infty$



Curba are asimptota $x = -\frac{a}{2}$, minimum pe axa Oy şi punctul de inflexiune $\left(a, \frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)$. A doua ramură se obţine prin simetrie faţă de Ox.

D-l Constantin Pantelimon a dat o soluţie în care determină cercul tangent iperbolei prin condiţia de a găsi centrul pe dreapta $x = -a$ şi în acelaşi timp pe normala la iperbolă. Pe o cale simplă ajunge la abscisa punctului de contact. Partea a doua ca la prima soluţie.

D-l Paul P. Drăghicescu a dat o bună soluţie, dar dintr'o eroare de calcul a obţinut o altă ecuaţie pentru locul geometric.

Obs. 1°. Dacă se face ecuaţia (5) omogenă, condiţia ca să existe un punct dublu este :

$$f'_x = 0 \ , \ f'_y = 0 \ , \ f'_z = 0.$$

Ecuaţia locului se poate obţine eliminând pe λ şi k între aceste trei ecuaţii.

2°. Studiul complet (cu punctele de inflexiune) al curbei a fost făcut numai de D-l RIPIANU.

PROBLEMA 5413. *Sunt date în plan trei cercuri* (A), (B), (C); *perechile* (A), (B); (B), (C); (C), (A) *fiind tangente exterior în* D, E, F. *Fie* $\overline{MN}$ *tangenta comună exterioară a cercurilor* (A) *şi* (B), *care nu taie cercul* (C); $\overline{PQ}$ *şi* $\overline{RS}$ *tangentele analoage la perechile* (B), (C) *şi* (C), (A).

Să se arate, că cercul DEF *este tangent celor trei cercuri descrise pe* $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ *ca diametre.*

O. N. ŢINO.

Ducem tangentele comune interioare perechilor de cercuri (A), (B); (B), (C); (C), (A); ele sunt axele radicale respectiv ale celor trei perechi de cercuri şi sunt concurente în acelaşi punct I, centrul radical al cercurilor (A), (B), (C), având

$$\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}.$$

Dreptele ID, IE, IF fiind respectiv perpendiculare pe AB, BC, CA, centrul radical I este centrul cercului tritangent DEF, înscris triunghiului ABC.

Fie I_1, I_2, I_3 punctele unde axele radicale ID, IE, IF taie respectiv tangentele comune $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$. Avem:

$$\overline{I_1M} = \overline{I_1N} = \overline{I_1D} \ ; \ \overline{I_2P} = \overline{I_2Q} = \overline{I_2E} \ ; \ \overline{I_3R} = \overline{I_3S} = \overline{I_3F},$$

deci cercurile descrise pe $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ ca diametre trec respectiv prin punctele D, E, F, fiind tangente în aceste puncte dreptelor AB, BC, CA.

Cercul DEF, având în punctul D aceeaşi tangentă cu cercul MDN, este tangent cercului MDN în punctul D. In acelaşi fel arătăm, că cercul DEF este tangent cercurilor PEQ şi RFS respectiv în punctele E şi F.

Observare. Cercurile descrise pe cele două tangente comune exterioare $\overline{MN}$ şi $\overline{MN'}$, ale celor două cercuri (A) şi (B), ca diametre, sunt simetrice în raport cu dreapta AB şi deci tangente ei în acelaşi punct D. Aşa dar, cercul DEF *este tangent celor şase cercuri descrise pe* $\overline{MN}$, $\overline{M'N'}$, $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q'}$, $\overline{RS}$, $\overline{R'S'}$ *ca diametre.*

Au rezolvat problema Domnii: C. D. EFTIMIE, MIRCEA L. RUSU, OCTAVIAN E. GHEORGHIU, AUREL D. POPA, IOAN I. PINTILIE, CONSTANTIN PANTELIMON, DUMITRU GH. VASILIU, ŞERBAN STOIANOVICI, PAUL P. DRĂGHICESCU, GH. D. VOICU, MARIN GH. POPESCU, AUREL ANDREI, NECULAI N. POPA, RADU P. VOINEA, FLORIN CĂRUNTU, GHEORGHE T. PUCHIU, MIREL D. STOENESCU, NIC. A. ŞTEFĂNESCU, MIRCEA D. POPA, ŞTEFAN TILICĂ, CONST. C. MILEA şi IOAN C. NEGRESCU.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5434. *Intr'un triunghiu* ABC *medianele* BB' *şi* CC' *fac respectiv unghiurile* β *şi* γ *cu latura* BC.

Să se arate, că avem relaţia

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}.$$

O. N. ŢINO.

Soluţie dată de Domnii: MIRCEA A. NEGREA şi HORIA M. BODNĂRESCU.

Fie G punctul de întâlnire al medianelor triunghiului ABC. Aplicând relaţia dintre laturi şi sinusurile unghiurilor opuse în triunghiul BGC, avem

$$\frac{\sin\beta}{\overline{CG}} = \frac{\sin\gamma}{\overline{BG}} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\overline{BC}} \qquad (1)$$

din care deducem în baza proprietăţilor rapoartelor egale

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\overline{BC}} = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\overline{CG}\cos\gamma - \overline{BG}\cos\beta} = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\frac{2}{3}(\overline{CC'}\cos\gamma - \overline{BB'}\cos\beta)}. \qquad (2)$$

Din triunghiurile CC'B şi BB'C avem relaţiile

$$\overline{BC} = \overline{CC'}\cos\gamma + \frac{\overline{AB}}{2}\cos B \quad ; \quad \overline{BC} = \overline{BB'}\cos\beta + \frac{\overline{AC}}{2}\cos C \qquad (3)$$

pe care scăzându-le obţinem

$$\overline{CC'}\cos\gamma - \overline{BB'}\cos\beta = \frac{\overline{AC}}{2}\cos C - \frac{\overline{AB}}{2}\cos B \qquad (4)$$

deci soluţia (2) devine

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\overline{BC}} = 3\,\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\overline{AC}\cos C - \overline{AB}\cos B} \qquad (5)$$

Dar

$$\overline{BC}=2R\sin A=2R\sin(B+C)\ ,\ \overline{AC}=2R\sin B\ ,\ \overline{AB}=2R\sin C \qquad (6)$$

ca urmare relaţia (5) devine

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}.$$

Au rezolvat bine problema pe alte căi Domnii: SLT. ŞTEFAN TILICĂ, CONSTANTIN PANTELIMON, MARIN G. POPESCU, MIRCEA D. POPA, PAUL P. DRĂGHICESCU, MIREL D. STOENESCU, DUMITRU GH. VASILIU, VASILE D. PĂLĂCEANU, IOAN I. PINTILIE, EUGEN GH. VIJELIE, MATEI M. CHINTESCU, ERVIN DRAGOMIR ADREIAN şi EUGEN N. WEGENER.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5688. *Două cercuri egale* (A) *şi* (B) *se taie în punctele* C *şi* D. *Prin punctul* D *trece un cerc* (I), *variabil ca poziţie, însă egal cu cercurile* (A) *şi* (B).

Cercul (I) *taie cercurile* (A) *şi* (B) *a doua oară în* M *şi* N.

1. *Care este locul punctului* P, *intersecţia tangentelor în* M *şi* N *la cercul* (I)?

2. *Care este locul centrului* O *al cercului* CMN?

O. N. ŢINO.

1. Avem prin ipoteză

$$\overline{ID} = \overline{IM} = \overline{IN} = \overline{AD} = \overline{AM} = \overline{BD} = \overline{BN},$$

deci AMID şi BNID sunt romburi şi ca urmare BN şi AM fiind paralele cu DI, sunt paralele între ele şi cum $\overline{BN}$ şi $\overline{AM}$ sunt egale, patrulaterul AMNB este paralelogram, adică $\overline{AB}$ şi $\overline{MN}$ *sunt şi ele paralele şi egale între ele.*

Ducând prin A şi B semidreptele Aω şi Bω respectiv paralele şi de acelaşi sens cu MP şi NP, obţinem triunghiul AωB, care este egal cu MPN, superpozabile printr'o translaţie de direcţia şi mărimea segmentului AM, urmează că $\overline{\omega P} = \overline{AM} = \overline{BN}$ = raza cercurilor egale R. Dar MP, fiind tangentă cercului (I), este perpendiculară pe MI, deci pe paralela ei AD şi cum AD este o dreaptă fixă, direcţia lui MP şi deci a lui Aω este constantă. In acelaşi fel rezultă că direcţia semidreptei Bω paralelă la tangenta NP, este constantă. Punctele A şi B fiind fixe şi direcţiile Aω, Bω constante, *punctul* ω, *este fix.*

Prin urmare, punctul P. variabil în plan, rămânând la o distanţă constantă egală cu R faţă de punctul ω, *locul său este un cerc, cu centrul în* ω *egal cu cercurile date.*

2. Să considerăm cazul figurii în care M şi N sunt de o parte şi de alta a punctului D.

Punctul O, centrul cercului CMN, se găseşte la intersecţia perpendicularelor AO şi BO în mijlocul laturilor CM, CN pe aceste laturi, deci unghiul AOB este suplementul unghiului MCN,

adică $$\widehat{AOB} = 2dr - \widehat{MCN}.$$

Dar

$$\widehat{MCN} = \widehat{MCD} + \widehat{DCN} = \frac{1}{2}\widehat{MAD} + \frac{1}{2}\widehat{DAN} = \frac{1}{2}\widehat{MID} + \frac{1}{2}\widehat{DIN} = \frac{1}{2}\widehat{MIN},$$

iar $\widehat{MIN} = \widehat{ADB}$ superpozabile printr'o translaţie de direcţie şi mărime $\overline{ID}$, deci

$$\widehat{MCN} = \frac{1}{2}\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB},$$

ca urmare

$$\widehat{AOB} = 2dr - \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \text{const.}$$

Fie AE şi BE semidreptele paralele şi de acelaşi sens $\overline{MC}$ şi NC. Avem :

$$\widehat{AEB} = 2dr - \widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}.$$

Punctul O, fiind vârful unui unghiu de măsură constantă ale cărui laturi trec prin punctele fixe A şi B, *locul său este segmentul de cerc descris pe* $\overline{AB}$, *de aceeaşi parte cu* D *faţă de* AB, *şi capabil de unghiul*

$$\left(2dr - \frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}\right).$$

Celălalt segment al cercului AOB trece prin E.

Triunghiul ACB fiind isoscel, iar măsura unghiului ACB fiind egală cu a arcului AOB (care este de două ori măsura unghiului AEB), punctul C este centrul cercului AOBE. Prin urmare, în cazul figurii considerate, *punctul* O *se mişcă pe arcul* AOB *al cercului cu centrul în* C *şi egal cu cercurile date* (A) *şi* (B).

b) In cazul figurii în care punctele M ; N sunt de aceeaşi parte a punctului D, avem

$$\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{MCN} = \left|\overset{\frown}{DCN} - \overset{\frown}{DCM}\right| = \left|\frac{1}{2}\overset{\frown}{NBD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{MAD}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\overset{\frown}{NID} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{MID} - \right| = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MIN} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB},$$

deci *locul punctului* O *este un segment de cerc descris pe* $\overline{AB}$, *de partea opusă lui* D *faţă de* AB, *capabil de unghiul* $\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}$.

Cu alte cuvinte pentru aceste poziţii ale cercului (I), centrul O se mişcă pe arcul BEA al cercului cu centrul în C şi egal cu cercurile (A) şi (B).

Aşa dar, *locul punctului* O, *centrul cercului* CMN, *este cercul cu centrul în* C *şi egal cu cercurile* (A) *şi* (B).

Observarea I-a. Locul centrului I, al cercului variabil (I) trecând prin D şi egal cu cercurile (A) şi (B), este evident cercul cu centrul în D şi trecând prin centrele A şi B.

Observarea II-a. Având $\overline{OC} = \overline{AC} = R$, cercul CMN este egal cu cercurile (A) şi (B).

Regăsim astfel clasica proprietate anunţată pentru prima dată de Profesorul G. ŢIŢEICA, anume :

Dacă trei cercuri egale dintr'un plan trec prin acelaşi punct, celelalte trei puncte de intersecţie ale lor se găsesc pe un cerc egal cu aceste cercuri.

Rostul problemei propuse de noi de altminteri a fost de a reaminti cetitorilor revistei *Gazeta Matematică* această interesantă proprietate.

Această observare a fost dată şi de D-l PETRE BOLDESCU, care de altfel a mai dat o altă demonstraţie elementară proprietăţii Profesorului G. ŢIŢEICA, în revista „*Pitagora*".

Observarea III-a. Dacă cercurilor date (A) şi (B) sunt şi ortogonale, centrul ω al locului lui P este în C.

Locul punctelor P şi O este acelaşi cerc cu centrul în C şi egal cu cercurile date (A) şi (B).

Prima parte a acestei observări a fost dată şi de D-l DUMITRU GH. VASILIU.

Observarea IV-a. Domnii PETRE BOLDESCU şi D. GH. VASILIU transformând prin inversiune în raport cu D proprietatea dată în problema propusă de noi, enunţă următoarea proprietate.

Laturile unui unghiu dat XOY *sunt tangente unui cerc dat* (Γ) *cu centrul* (I). *O tangentă variabilă la cercul* (Γ) *taie pe* OX *şi* OY *respectiv în* M *şi* N. *Locul punctului* P *de intersecţie al cercurilor, tangente la* OX *şi* OY, *respectiv în* M *şi* N, *şi trecând prin punctul* I, *este un cerc.*

Au rezolvat problema propusă Domnii: PETRE B. BOLDESCU (Câmpulung-Muscel); MARIN GH. POPESCU (Piteşti); DUMITRU GH. VASILIU (Iaşi); OCTAV C. GHEORGHIU (Iaşi).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5698. *Să se rezolve sistemul:*

$$\sin(x-y)+\cos(x+y)=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

La problema aceasta înlocuind partea a doua a ecuaţiilor prin a *şi* b *şi socotindu-le drept coordonatele unui punct din plan, să se determine regiunile pentru care sistemul:*

$$\sin(x-y)+\cos(x+y)=a$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=b$$

este posibil.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluția I-a dată de D-l C. BAKONYI (Timișoara).

Incepem cu sistemul general din a doua parte a problemei. Transformând suma din prima ecuație în produs, avem:

$$\sin(x-y)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=a.$$

La a doua ecuație vom observa că

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

arcele fiind complementare. Astfel sistemul propus este echivalent cu sistemul:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{a}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=b. \end{cases}$$

Dacă punem

$$u=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\ ,\quad v=\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$$

vom scrie mai scurt:

$$(1')\qquad u+v=b\ ,\quad uv=\frac{a}{2}\ ,$$

deci u și v sunt rădăcinile ecuației.

$$(2)\qquad 2z^2-2bz+a=0.$$

Condițiile pentru ca sistemul dat, sau echivalentul său (1), să fie posibil sunt:

I. Realizantul ecuației (2) să fie pozitiv:

$$(3)\qquad b^2-2a>0.$$

II. u și v fiind un sinus și nu cosinus, trebue ca

$$-1\leqslant u\leqslant 1\ ;\quad -1\leqslant v\leqslant 1,$$

deci

$$-2\leqslant u+v\leqslant 2\quad \text{și}\quad -1\leqslant uv\leqslant 1.$$

Ținând seamă de (1') rezultă:

$$(4)\qquad -2\leqslant b\leqslant 2\ ;\quad -2\leqslant a\leqslant 2.$$

III. Deoarece (-1) şi $(+1)$ sunt înafara intervalului dintre rădăcini, iar trinomul din ecuaţia (2) are coeficientul lui z^2 pozitiv, înlocuind pe z cu aceste valori trebue să obţinem cantităţi pozitive, deci:

(5) $P(-1) = a + 2b + 2 > 0$; $P(1) = a - 2b + 2 > 0$.

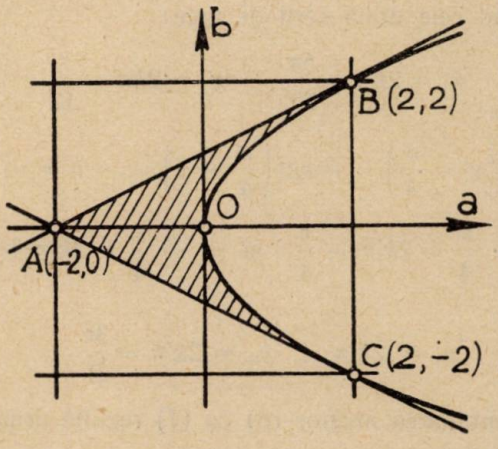
Determinarea regiunilor. Fie M (a, b) un punct din planul axelor perpendiculare Oa, Ob.

Relaţiile (4) ne spun că M trebue să fie interior patratului format de dreptele:

$$a = \pm 2 \quad \text{şi} \quad b = \pm 2.$$

Relaţia (3) ne arată că M trebue să fie exterior parabolei $b^2 - 2a = 0$. (Determinarea regiunii se face uşor cu un punct de pe axa Ob).

Relaţiile (5) ne spun că M trebue să fie în unghiul format de dreptele $a \pm 2b + 2 = 0$, în care se află şi origina, deoarece origina verifică ambele inegalităţi (5). Aceste două drepte sunt *tangente* parabolei în punctele B (2, 2), C (2, — 2), şi se întâlnesc în punctul A (— 2, 0).



Din discuţia de mai sus rezultă că singura regiune care convine este cea interioară triunghiului mixtiliniu (T) format de arcul de parabolă BOC şi de tangentele AB, AC.

Observaţii. Din condiţiile (4) este deajuns numai una.

* * *

Sistemul particular este posibil, căci punctul

$$M\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$$

este interior triunghiului (T).

Ecuaţia (2) devine:

$$2z^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,z+\sqrt{\frac{3}{2}}=0,$$

cu rădăcinile

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Putem lua:

$$a)\ u=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{sau}\quad b)\ u=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ v=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

In cazul a) avem:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=u=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\therefore\quad x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

sau despărţind cele două serii de arce:

$$(6)\qquad x_1=2k\pi+\frac{5\pi}{12}\ ;\ x_2=2k\pi+\frac{\pi}{12}.$$

$$\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=-v=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\quad y-\frac{\pi}{4}=2k'\pi-\frac{\pi}{4}\quad\text{şi}\quad y-\frac{\pi}{4}=2k'\pi+\pi+\frac{\pi}{4}$$

deci:

$$(7)\qquad y_1=2k'\pi\ ;\ y_2=2k'\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

Din combinarea arcelor (6) cu (7) rezultă următoarele patru grupe de soluţii:

(I) $x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}$, $y=2k'\pi$; (II) $x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}$, $y=2k'\pi+\frac{3\pi}{2}$

(III) $x=2k\pi+\frac{\pi}{12}$, $y=2k'\pi$; (IV) $x=2k\pi+\frac{\pi}{12}$, $y=2k'\pi+\frac{\pi}{2}$.

In cazul b) avem:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=u=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad,\quad \text{deci } x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

sau separând seriile de arce:

$$(8)\qquad x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad;\quad x_2=2k\pi.$$

$$\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=-v=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{deci}\quad y-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}2k'\pi-\dfrac{\pi}{3}\\ 2k'\pi+\pi+\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

sau despărţind arcele:

$$(9)\qquad y_1=2k'\pi-\frac{\pi}{12}\quad;\quad y_2=2k'\pi-\frac{5\pi}{12}$$

grupând pe (8) cu (9) găsim încă patru soluţii ale sistemului propus:

$$\text{(V)}\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ y=2k'\pi-\frac{\pi}{12};\ \text{(VI)}\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ y=2k'\pi-\frac{5\pi}{12}$$

$$\text{(VII)}\ x=2k\pi,\ y=2k'\pi-\frac{\pi}{12};\ \text{(VIII)}\ x=2k\pi,\ y=2k'\pi-\frac{5\pi}{12}.$$

Sistemul propus admite deci *opt* soluţii, fiecare soluţie fiind alcătuită dintr'o serie de arce pentru x şi altă serie pentru y.

* * *

Soluţia a II-a dată de D-l N. V. IONESCU (clasa a VIII-a liceul „Radu Greceanu", Slatina).

Desvoltând sinusurile şi consinusurile din sistemul propus, se observă că el se mai poate scrie:

$$(\sin x+\cos x)\ (\cos y-\sin y)=a$$

$$(\sin x+\cos x)+(\cos y-\sin y)=b\sqrt{2}.$$

Dacă punem

$$\sin x+\cos x=u\quad\text{şi}\quad \cos y-\sin y=v$$

avem:

$$u+v=b\sqrt{2}\quad;\quad uv=a,$$

deci u şi v sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$(10)\qquad z^2-b\sqrt{2}\,z+a=0.$$

Condiţiile de posibilitate sunt:

I. Realizantul să fie pozitiv, deci $2\,(b^2 - 2a) > 0$.

II. Inmulţind cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ expresiile lui u şi v putem scrie:

$$u\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad v\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad -\sqrt{2} \leqslant u \leqslant \sqrt{2} \quad ; \quad -\sqrt{2} \leqslant v \leqslant \sqrt{2},$$

deci:

$-2\sqrt{2} \leqslant u + v \leqslant 2\sqrt{2}$ care ne conduce la $-2 \leqslant b \leqslant 2$.

III. Deoarece $(-\sqrt{2})$ şi $(+\sqrt{2})$ sunt înafara intervalului dintre rădăcini, înlocuind pe z cu aceste valori trebue să obţinem cantităţi pozitive, deci:

$$P(-\sqrt{2}) = a + 2b + 2 > 0 \quad P(+\sqrt{2}) = a - 2b + 2 > 0.$$

Am regăsit condiţiile dela prima soluţie. Interpretarea e aceeaşi.

Sistemul particular se rezolvă calculând rădăcinile ecuaţiei (10). Luăm ca exemplu una din soluţii:

$$u = \sqrt{\frac{3}{2}}, \; v = 1.$$

Avem deci

$$(11) \qquad \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \cos y - \sin y = 1.$$

Inmulţind cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ obţinem:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

şi de aci calea e aceeaşi ca la prima soluţie.

Observări. 1. La această problemă s'au primit *douăzeci* de soluţii, dintre care *cinci* au tratat numai sistemul particular. Numai cei doi corespondenţi care au dat soluţiile publicate mai sus, au făcut studiul complet, au dat regiunea planului exactă şi nu au făcut greşeli de calcul.

Dintre ceilalţi corespondenţi menţionăm pe D-nii Slt. D. Cioc, Claudiu Seni şi Şt. Damian cari au făcut studiul complet cu o eroare la determinarea regiunii convenabile; D-nii Gr. Nadolu, Aldea V. Minea, Marcel D. Cotariu, Vlad Gh. Jurist care au dat cu exactitate toate soluţiile sistemului particular.

Căutăm acum derivatele de ordinul al doilea. Astfel pentru x'' se obține făcând unele reduceri

$$x'' = -C_1 \cdot \frac{x'(f'_x \cdot f''_{x \cdot y} - f'_y \cdot f''_{x^2}) + y'(f'_x \cdot f''_{y^2} - f'_y \cdot f''_{xy})}{(f'_x + kf'_y)^2}.$$

In această relațiune înlocuim derivatele x' și y' cu valorile lor din (2). Avem

$$x'' = -C_1 \cdot \frac{f_x^2 \cdot f''_{y^2} - 2f'_x \cdot f'_y \cdot f''_{xy} + f'^2_y \cdot f''_{x^2}}{(f'_x + kf'_y)^3}.$$

In mod analog se găsește

$$y'' = -C_1 \cdot k \frac{f_x^2 \cdot f''_{y^2} - 2f'_x \cdot f'_y \cdot f''_{xy} + f'^2_y \cdot f''_{y^2}}{(f'_x + kf'_y)^3}.$$

Să considerăm acum relațiunile care dau componentele F_t și F_n ale forței F

$$F_t = m\frac{d^2s}{dt^2} \quad , \quad F_n = m\frac{v^2}{R}$$

unde S este arcul de curbă, iar R raza de curbură a traiectoriei. Pentru cazul problemei vom utiliza numai componenta tangențială. Anume pornim dela relațiunea

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = x'^2 + y'^2$$

pe care o derivăm în raport cu t

$$\frac{ds}{dt} \times \frac{d^2s}{dt^2} = x' \cdot x'' + y' \cdot y''.$$

Inlocuim aci derivata $\frac{ds}{dt}$ precum și pe x', x'', y' și y''. Avem

$$C_1 \cdot \frac{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}{f'_x + kf'_y} \quad ; \quad \frac{F_t}{m} = C_1^2 \cdot \frac{f'_y - k \cdot f'_x}{f'_x + k \cdot f'_y} \cdot \varphi(x, y$$

sau

$$(3) \qquad F_t = m \cdot C_1 \cdot \frac{f'_y - k \cdot f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \cdot \varphi(x, y)$$

unde am pus

$$\varphi(x, y) = \frac{f'^2_x \cdot f''_{y^2} - 2f'_x \cdot f_y \cdot f''_{xy} + f'^2_y \cdot f''_{y^2}}{(f'_x + kf'_y)^3}.$$

Se știe că forța este dirijată în concavitatea traiectoriei, iar prin enunțul problemei ea face cu Ox un unghiu constant α a cărui tangentă este k. Fie acum u, unghiul făcut de tangentă la

curba $f(x, y) = C$ cu axa Ox şi θ unghiul forţei F cu componenta tangenţială F_t. Atunci avem

$$(4) \qquad F = \frac{F_t}{\cos\theta} = F_t \cdot \times \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}.$$

Apoi din triunghiul format de tangenta la curbă, forţa F şi Ox, avem

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(u - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}u - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}u \cdot \operatorname{tg}\alpha} = -\frac{f'_x + kf'_y}{f'_y - k \cdot f'_x}.$$

De aci deducem

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}{f'_y - kf_x}.$$

In relaţiunea (4), purtăm această valoare, şi înlocuim şi valoarea componentei F_t din (3) Vom avea rezultatul

$$F = m \cdot C_1 \sqrt{1 + k^2} \times \varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ având expresia dată mai sus.

Dacă luăm $k = 1$, găsim problema 5874, propusă la pag. 200, vol. XLIX, *Gazeta Matematică*.

Notă. 1°. Soluţia D-lui I. ST. TEODORESCU se poate simplifica mult, observând că

$$F^2 = X^2 + Y^2 = m^2 (x''^2 + y''^2),$$

în care vom înlocui x'' şi y'' prin expresiile obţinute.

2°. O soluţie, în care se presupune că X şi Y sunt independente de timp, am dat în *Probleme şi propoziţiuni din dinamica punctului*, pag. 19, Ex. 4.

3°. Iată o nouă soluţie, mai complicată, dar care este generală, aplicabilă deci şi altor cazuri.

In lucrarea de mai sus, Ex. 6, pag. 19, este arătată teorema lui DAINELLI, după care forţa care face ca un punct material să descrie o traiectorie din familia de curbe plane $f(x, y) = C$ are ca proiecţii

$$X = u(f_x f_{yy} - f_y f_{xy}) + \frac{1}{2} f_y (f_x u_y - f_y u_x),$$

$$Y = u(f_y f_{xx} - f_x f_{xy}) + \frac{1}{2} f_x (f_y u_x - f_x u_y),$$

în care $u(x, y)$ este o funcţie arbitrară de x şi y.

Dacă introducem aceste expresii în $Y = kX$, găsim

$$(f_x + kf_y)(f_y u_x - f_x u_y) + 2[f_y f_{xx} - (f_x + kf_y) f_{xy} + kf_x f_{yy}] u = 0,$$

ecuaţia cu derivate parţiale în raport cu funcţia u care, integrată, dă rezultatul cerut.

M. G.

2. Patru soluţii, asemănătoare cu *prima* dată mai sus, ar fi fost menţionate, dacă n'ar fi semănat prea mult între ele.

3. Printre erorile întâlnite, înafară de greşeli de calcul, cred că e bine să atrag atenţia asupra următoarelor :

1. Unii corespondenţi au dat numai o parte din soluţii şi pentru acelea numai arcele din primul cadran.

2. Majoritatea soluţiilor sunt asemănătoare soluţiei a II-a. Ecuaţiile (11) au fost rezolvate prin *ridicare la patrat*, ceea ce introduce rădăcini în plus. In general nu e bine să se procedeze astfel, iar dacă se face, trebuesc înlăturate soluţiile ce nu convin.

G. D. S.

PROBLEMA 5727. *Să se arate că între* 1 *şi* N *sunt mai puţine numere prime decât între* N *şi* N^2 *şi mai multe decât între* N *şi* 2N.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-l C. C. TINCU.

In „*Teoria Indicatorilor*“ de I. LINTEŞ la pag. 101 găsim: „*Intre* A *şi* B *este un număr mai mic de numere prime decât între* k . A *şi* k . B *pentru* $k > 1$“.

Pentru $A = 1$, $B = N$ şi $k = N$ avem prima parte a problemei.

De asemenea la pag. 102 găsim:

„*Intre* 1 *şi* $(k-1)$. N *sunt mai multe numere prime decât* între $(k-1)$. N *şi* k . N“.

Pentru $k = 2$ avem partea II-a a problemei.

Au mai rezolvat prima parte a problemei folosind Nota 23 din G. M., XLVIII, pag. 32, D-nii: N. PITIŞ şi C. STAICU.

PROBLEMA 5768. *Să se demonstreze că patrulaterul cu vârfurile în punctele lui* FEUERBACH, *ale unui triunghiu, nu este niciodată patrat.*

ŞT. S. MIHĂIESCU.

Fie ABC un triunghiu oarecare, ω centrul cercului lui EULER, I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor tritangente, iar F, F_a, F_b, F_c punctele lui FEUERBACH.

Vom arăta că patrulaterul $F F_a F_b F_c$ nu poate fi niciodată dreptunghiu. Presupunem F între F_b şi F_c. Prespun că am avea:

$$F F_b \perp F F_c \quad \text{şi deci} \quad \omega \text{ pe } I_b I_c$$

şi

$$F_b F \perp F_b F_a \quad \text{şi deci} \quad \omega \text{ pe } I I_a .$$

Rezultă: $\omega \equiv A$

ceea ce nu este posibil.

P. P. DRĂGHICESCU.

PROBLEMA 5774. *Să se determine legea forţelor care face ca un mobil să descrie traiectoriile*

$$f(x, y) = C$$

ştiind că proiecţiile forţei pe axe sunt într'un raport dat k.

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-l I. ST. TEODORESCU.

Fie F forţa sub acţiunea căreia un mobil M descrie traiectoriile $f(x, y) = C$; componentele ei pe axe, satisfăcând relaţia $Y = kX$

Din ecuaţiile generale ale mişcării şi din relaţia de condiţie, se deduce ca o consecinţă imediată ecuaţia

$$\frac{d^2y}{dt^2} - k \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

sau integrând

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} - k \cdot \frac{dx}{dt} = C_1.$$

Să derivăm acum în raport cu timpul t, ecuaţia $f(x, y) = C$ variabilele x, y fiind funcţiuni de t

$$x' \cdot f'_x + y' \cdot f'_y = 0.$$

Această relaţie împreună cu precedenta formează un sistem de ecuaţii care ne dau derivatele x' şi y'

$$(2) \qquad x' = -\frac{C_1 \cdot f'_y}{f'_x + k \cdot f'_y} \qquad y' = \frac{C_1 \cdot f'_x}{f'_x + k \cdot f'_y} .$$

PROBLEMA 5801. *Cu trei numere în progresie aritmetică, scrise unul după altul, să se formeze un patrat de patru cifre.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie N un număr format prin sudarea termenilor progresiei

$$\div a - r \,.\, a \,.\, a + r \qquad (1)$$

luaţi într'o ordine oarecare. Numărul cel mai mic $a - r$ nu poate fi de 2 cifre căci atunci N ar avea cel puţin 6 cifre. De asemeni $a + r$ nu poate fi de 3 cifre pentrucă atunci nu ar mai rămâne decât o cifră pentru scrierea numerelor $a - r$ şi a. Apoi $a + r$ nu poate fi de o cifră, căci atunci $a - r$ şi a ar fi de câte o cifră şi N ar avea trei cifre. Se poate însă ca $a + r$ să fie *formal* de 2 cifre, de forma *ob* de exemplu.

In concluzie $a + r$ este un număr de 2 *cifre* sau *formal de 2 cifre* iar $a - r$ şi r sunt numere de câte o cifră.

Permutând între ele, în toate modurile posibile, numerele şirului (1) se obţin 6 numere N. Considerăm de exemplu permutarea

$$1).\quad N = (a - r)\ a\ (a + r)$$

$$= 1000\ (a - r) + 100a + a - r = 1101a - 90r = 3\ (367a - 33r).$$

Se observă ca N se divide cu 3; pentru a fi patrat perfect trebue ca şi paranteza să se dividă cu 3, adică a să se dividă cu 3, căci 367, coeficientul lui a, este prim cu 3 iar $33r$, partea a doua a parantezei se divide cu 3.

Formăm celelalte 5 egalităţi analoage cu 1) şi găsim că în toate cazurile

$$a = 3m \leqq 9 \quad \text{deci} \quad a = 3,\ 6 \text{ sau } 9$$

$a = 0$ se exclude pentrucă atunci sau $a - r < 0$, ceea ce nu are sens, sau $r = 0$ şi atunci N are forma banală 0000.

Făcând în 1) $a = 3$ şi dând lui r pe rând valorile 0, 1, 2, 3 găsim că paranteza are respectiv valorile

$$3 \times 367\ ,\ 3 \times 256\ ,\ 3 \times 145\ ,\ 3 \times 034$$

din care numai 3×256 dă soluţie căci 256 este patrat perfect. Avem deci pentru cazul 1) şi $a = 3$ soluţia

$$N^2 = 9 \times 16^2 = 48^2 = 2304 \text{ cu } \div 2\,.\,3\,.\,04$$

Examinând la fel celelalte valori ale lui a şi restul de 5 egalităţi analoage cu 1) se găseşte că problema are următoarele 10 soluţii, scrise în ordinea crescândă:

1°. $6^2 = 0036$ cu $\div 0.03.6$; 2°. $18^2 = 0324$ cu $\div 2.03.4$;
3°. $24^0 = 0576$ cu $\div 05.6.7$; 4°. $33^2 = 1089$ cu $\div 8.9.10$;
5°. $36^2 = 1296$ cu $\div 6.9.12$; 6°. $48^2 = 2304$ cu $\div 2.3.04$;
7°. $54^2 = 2916$ cu $\div 2.9.16$; 8°. $78^2 = 6084$ cu $\div 4.6.08$;
9°. $84^2 = 7056$ cu $\div 05.6.7$; 10°. $96^2 = 9216$ cu $\div 2.9.16$.

Notă. 1°. D-l P. P. DRĂGHICESCU, a dat o foarte bună soluţie analoagă, omiţând primele 3 soluţii de formă.

2°. D-l C. C. ILIESCU (Colegiul Naţional „N. Filipescu") a omis soluţiile 2°, 3° şi 4°. D-sa este singurul care a găsit soluţia 1°.

3°. D-l S-LT. I. ENACHE a găsit numai soluţiile 5°, 6° şi 7°.

4°. D-nii: S-LT M. AL. VASILESCU-STABU; V. D. PĂLĂCEANU (Liceul Militar, Timişoara); M. D. COTARIU (Brăila; G. GH. DONŢU (Iaşi) şi E. N. WEGENER au dat numai soluţiile 6°, 7° şi 10°.

5°. Au găsit numai soluţiile 5° şi 7°, d-nii: MIRCEA I. PĂTRĂŞCIOIU (Liceul Buzău); D. D. NACHE, ALFONS IFRIM (Liceul militar, Iaşi; CPT. E. ST. IACOB; S-LT. CORNELIU IONESCU-FULGER şi I. V. ROGOZ (Liceul militar, Timişoara).

6°. D-nii: VICTOR PIŢIGOI (Col. Naţ. „Sf. Sava", Bucureşti); BARBU I. POPESCU, G. G. VRÂNCEANU, C. C. ŢINCU (Liceul militar, Timişoara); P. D. COLUMBEANU (Col. Naţ. „N. Filipescu", Predeal) şi AL. V. HUIDEŞ (Liceul militar, Iaşi) au găsit singura soluţie 7° iar D-nii AUREL TOFAN (Liceul militar, Iaşi), TR. DUMITRESCU, E. CARAMALĂU (Liceul „Traian", Turnu-Severin) şi CONSTANTIN I. CHIRIAC au dat numai soluţia 5°, pe când D-l C. I. STAICU (Liceul militar, Cernăuţi) a dat numai soluţia 6°.

7°. Din examinarea egalităţii 1) dela soluţia acestei probleme se deduce următoarea teoremă interesantă: *Dacă scriind unul după altul trei termeni* (şi mai general $3n$ termeni) consecutivi *ai unei progresii aritmetice se obţine un patrat perfect, atunci termenul mediu al celor trei* (*sau* $3n$) *numere este multiplu de* 3.

Fie $\div (a-r)_m \ . \ a_p \ . \ (a+r)_q$

cei 3 termeni consecutivi, unde indicii m, p, q indică numărul cifrelor termenului respectiv.

Asociind într'un fel oarecare cele 3 numere, de exemplu permutaţia $(a+r)\ (a-r)\ a$ se formează numărul

$$N = (a+r)\ 10^{m+p} + (a-r)\ 10^q + a = a \times (10^{m+p} + 10^q + 1) + r\,(10^{m+p} - 1).$$

Se vede că $10^{m+p} - 1$ se divide cu 9 iar coeficientul lui a se divide cu 3. Pentru ca N să fie patrat trebue ca neapărat a să se dividă cu 3, ceea ce demonstrează teorema.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 5828. *Să se arate că, cel mai mare şi cel mai mic număr de acelaşi număr de factori primi, au acelaşi număr de divizori, dacă suma exponenţilor este aceeaşi.*

COMANDOR I. LINTEŞ.

Fie $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$ un număr care are m factori primi. Dacă avem:

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = C$$

atunci:

$$N_{max.} = a . b . c \ldots l^{C-(m-1)}$$

şi

$$N_{min.} = a^{C-(m-1)} . b . c \ldots l.$$

Deci în ambele cazuri avem:

$$n(N) = 2^{m-1} . (C - m + 2).$$

Dacă însă factorii primi nu sunt aceiaşi, atunci în locul factorilor primi: $a, b, c, \ldots l$, vom lua:

$a_1, b_1, c_1, \ldots l_1$ pentru $N_{max.}$ şi $a_2, b_2, c_2, \ldots l_2$ pentru $N_{min.}$, ştiind că: $a_1, b_1, c_1, \ldots l_1$ sunt în general mai mari ca $a_2, b_2, c_2, \ldots l_2$.

Au rezolvat bine problema D-nii: M. COTARIU, M. AL. VASILESCU-ŞTABU şi GH. GH. VRÂNCEANU.

PROBLEMA 5856. *Fiind dat un con circular drept, de deschidere α, înscris într'o sferă dată, să se arate că există totdeauna un al doilea con circular drept, de deschidere $\theta \neq \alpha$, înscris în aceeaşi sferă, care are aceeaşi suprafaţă totală cu conul dat.*

O. N. ŢINO.

Fie S vârful conului dat, $\overline{AA'}$ şi I diametrul şi centrul cercului de bază al lui: fie asemenea $\overline{BB'}$ şi L diametrul şi centrul conului de deschidere $\theta \neq \alpha$, înscris în aceeaşi sferă (O); R raza sferei (O).

Avem imediat

$$\overline{AI} = R \sin 2\alpha \quad ; \quad \overline{SA} = SS' \cos\alpha = 2R \cos\alpha,$$

deci însemnând cu S_A suprafaţa totală a conului circular drept dat, avem:

$$S_A = \pi \overline{AI} \cdot \overline{SA} + \pi \overline{AI}^2$$

sau

$$S_A = \pi R^2 \sin 2\alpha \, [2\cos\alpha + \sin 2\alpha]$$

sau încă

$$S_A = 4\pi R^2 [\sin\alpha + \sin^2\alpha - \sin^3\alpha - \sin^4\alpha] \quad (1)$$

Suprafaţa totală a conului căutat se obţine din S_A înlocuind pe α prin θ, iar condiţia care determină pe θ este următoarea:

$$\sin^4\theta + \sin^3\theta - \sin^2\theta - \sin\theta = \sin^4\alpha + \sin^3\alpha - \sin^2\alpha - \sin\alpha, \quad (2)$$

sau sub altă formă:

$$[\sin\theta - \sin\alpha] \, [\sin^3\theta + \sin\alpha \sin^2\theta + \sin^2\alpha \sin^3\theta + \sin^2\theta + \sin\alpha \sin\theta + \sin^2\alpha - \sin\theta - \sin\alpha - 1] = 0. \quad (3)$$

Observând că θ şi α sunt cuprinse în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ extremităţile excluse, ecuaţia $\sin\theta - \sin\alpha = 0$ are numai soluţia $\theta = \alpha$. Rămâne deci să arătăm că ecuaţia

$$\sin^3\theta + (1 + \sin\alpha) \sin^2\theta + (\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1) \sin\theta + \sin^3\alpha + \sin^2\alpha - \sin\alpha - 1 = 0 \quad (4)$$

are o rădăcină reală pozitivă $\sin\theta_0$ diferită de $\sin\alpha$.

Pentru înlesnirea calculului să punem $\sin\theta = x$ şi $\sin\alpha = u$, ecuaţia (4) devine cu aceste notaţii

$$f(x) \equiv x^3 + (1+u)\, x^2 + (u^2 + u - 1)\, x + u^3 + u^2 - u - 1 = 0 \quad (5)$$

Observăm în primul rând că

$$u^3 + u^2 - u - 1 = (u+1)^2 \, (u-1) < 0,$$

deoarece $0 < u < 1$, deci oricare ar fi semnul lui $(u^2 + u - 1)$, polinomul ecuaţiei (5) prezintă o singură variaţie, deci ecuaţia (5), conform teoremei lui DESCARTES, are o singură rădăcină reală pozitivă. In al doilea rând această rădăcină pozitivă este cuprinsă în intervalul (0, 1), căci

$f(o) = u^3 + u^2 - u - 1 < 0$ şi $f(+1) = u^3 + 2u^2 + u = u\,(u+1)^2 > 0$.

Cu un singur caz de excepţie, această rădăcină pozitivă a ecuaţiei (5) *nu este* u.

In adevăr, punând condiția ca $x = u$ să fie rădăcina pozitivă a ecuației (5), avem:

$$f(u) = 4u^3 + 3u^2 - 2u - 1 = (u+1)(4u^2 - u - 1)$$

și avem $f(u) = 0$ numai pentru valoarea

$$u = \sin\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{17}}{8}.$$

Rezultă de aci, că în cazul general [pentru $\alpha \not\equiv \alpha_0$] există un al doilea con circular drept de deschidere $\theta \not\equiv \alpha$ având aceeași suprafață totală cu conul dat.

Observare. Rezultatul obținut mai sus, poate fi pus în evidență. prin o metodă indirectă, anume punând $y = \frac{S_A}{4\pi R^2}$; se vede că y și S_A, când α variază între *zero* și $\frac{\pi}{2}$, au variațiile corespunzătoare, *maximul* și *minimul* lui S_A corespunzând ale lui α pentru care y este respectiv *maxim* sau *minim*. Insă calculând derivata lui y în raport cu α, avem

$$y'_\alpha = \cos\alpha\,(1 + \sin\alpha)\,(4\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1),$$

deci singura valoare α_0 a lui α, cuprinsă în intervalul deschis $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, care anulează derivata y'_α este aceea dată de

$$\sin\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{17}}{8}.$$

Formând tabloul variației, avem:

α	0		α_0		$\frac{\pi}{2}$
y'_α		+ +	0	— —	
y		↗	$M = \frac{141+5\sqrt{17}}{8} \sim 0{,}31$	↘	

Reprezentând curba (C) a acestei variații, și observând că pentru o valoare dată lui S_A avem o valoare dată pentru y, anume

$$y_0 = \frac{S_A}{4\pi R^2},$$

rezultă că pe curba (C) sunt două puncte, care au ordonata egală cu y_0, intersecţiile dreptei $y = y_0$ cu curba (C). Cele două puncte se confundă numai în cazul când S_A este maxim, adică numai pentru

$$\alpha = \alpha_0 \left(\sin\alpha_0 = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \right).$$

Se vede de aci că acel caz de excepţie găsit prin metoda directă este de fapt un caz limită.

Au rezolvat problema Domnii: NICOLAE V. IONESCU (Student Politechnică, Bucureşti); MIHAI D. R. CONSTANTINESCU (Ploeşti); ILIE N. CONSTANTINESCU (Brăila).

D-l EUGEN CARAMALĂU (Turnu-Severin), a întrebuinţat pentru rezolvare metoda a doua.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5874. *Traiectoriile* $f(x, y) = C$ *sunt descrise sub acţiunea unei forţe paralele la dreapta* $x = y$. *Să se arate că forţa este dată de*

$$F = C\,(f'_x + f'_y)^{-3}\,[f'^2_y f''_{xx} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + f'^2_x f''_{yy}],$$

C *fiind o constantă.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţia acestei probleme este cuprinsă în soluţia problemei 5774, care se publică la pag. 640 din acest număr.

EXERCIŢII

34. *Să se găsească numărul* $M = aabbcc$ *ştiind că* $M + 3 = N^2$.

S-LT. M. AL. VASILESCU-STABU.

R. Nu ne ocupăm de soluţiile formale corespunzătoare lui $a = 0$. Conform enunţului înseamnă că $c + 3$ se termină cu terminaţie de patrat, şi adică

$c + 3$ se termină cu 0, 1, 4, 5, 6 sau 9

$\therefore$ $c = 7, 8, 1, 2, 3, 6.$

Dacă $c = 7$

$M = aabb77$ şi $M + 3 = aabb80 \neq N^2$.

Când $c = 8$

$$M = aabb88 \quad \text{şi} \quad M + 3 = aabb91 \neq N^2$$

Pentru $c = 1$, avem

$$M = aabb11 \quad \text{şi} \quad M + 3 = aabb14 \neq N^2$$

căci M + 3 nu are terminaţie de patrat. In schimb găsim că pentru ultimele valori ale lui c, numerele

$$aabb25 \; ; \; aabb36 \; ; \; aabb69$$

ar putea fi patrate perfecte.

Luăm

$$N^2 = aabb25 = 11\,(100a+b) \times 100 + 25 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad (N - 5)\,(N + 5) = 11\,(100a + b) \times 100 \qquad (2)$$

$$110025 \leqslant N^2 \leqslant 999925 \quad \therefore \quad 332 \leqslant N \leqslant 999 \qquad (3)$$

Din (1) se vede că N este *mult.* 5, din (2) se vede că N — 5 sau N + 5 este *mult.* 11, iar (3) ne dau limitele lui N deci ale lui N — 5 şi N + 5. Fie deci $N = 5m$, care dus în (2) dă

$$(m - 1)\,(m + 1) = 4 \times 11 \times (100a + b).$$

Această egalitate arată că $m - 1$ sau $m + 1$ se divide prin 11. Să luăm

$$m - 1 = 11n \quad \therefore \quad n\,(11n + 2) = 4 \times (100a + b).$$

Trebue ca n să fie pereche, deci $n = 2p$ şi revenind la N, găsim

$$N = 110p + 5$$

faţă de limitele (3) putem lua pentru N valorile

335, 445, 555, 665, 775, 885, 995

din care dau soluţii

$$335^2 = 112225 \; , \; 665^2 = 442225 \quad \text{şi} \quad 995^2 = 990025.$$

Pe aceeaşi cale se mai găseşte soluţia

$$880^2 = 774400$$

Problema are patru soluţii.

PROBLEME PROPUSE

5965. Se dă ecuaţia:

$$13x + 17y = a,$$

şi se cere să se determine a aşa ca ecuaţia să nu poată avea mai mult de 25 soluţiuni în numere întregi şi pozitive. Se va presupune pe rând că se admit sau nu soluţiuni nule pentru x şi y.

I. IONESCU.

5966. Să se găsească numărul de patru cifre $\overline{aabb}$ știind că $9 + \overline{aabb}$ este patrat perfect.

S-LT M. AL. VASILESCU-STABU.

5967. Să se găsească un număr întreg și pozitiv n astfel ca să avem

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = n,$$

d_1, d_2, d_3, d_4 fiind patru divizori pozitivi și diferiți ai lui n.

TIBERIU POPOVICIU.

5968. Fie determinantul

$$D_n^m = \begin{vmatrix} F(x_1, a_1) & F(x_1, a_2) \ldots & F(x_1, a_n) \\ F(x_2, a_1) & F(x_2, a_2) \ldots & F(x_2, a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(x_n, a_1) & F(x_n, a_2) \ldots & F(x_n, a_n) \end{vmatrix}$$

în care

$$F(x_k, a_i) \equiv A_0 x_k^m + A_1 x_k^{m-1} a_i + \ldots + A_m a_i^m.$$

Să se calculeze determinanții D_n^{n-2}, D_n^{n-1}, D_n^n.

MIRCEA ADAM.

5969. Să se rezolve ecuația

$$\begin{vmatrix} a+\sin x & a & a & a & a & a \\ a & a+\cos x & a & a & a & a \\ a & a & a+\operatorname{tg} x & a & a & a \\ a & a & a & a+\operatorname{cotg} x & a & a \\ a & a & a & a & a+\sec x & a \\ a & a & a & a & a & a+\operatorname{cosec} x \end{vmatrix} = 0.$$

Discuție. Caz particular $a = 1$.

E. WEGENER.

5970. Să se demonstreze că pentru $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, avem

$$x \sin x + a \cos x > a e^{-a},$$

unde a este un număr real.

I. V. MĂTIEȘ.

5971. Să se rezolve ecuația

$$\cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x = 0.$$

CPT. E. ST. IACOB.

5972. Să se arate geometric că între elementele unui triunghiu avem

$$b \cos B + c \cos C = a \cos (B - C)$$

și să se deducă o formulă similiară pentru *sinus*.

SLT. CONST. PANTELIMON.

5973. Fie M, N două puncte în planul triunghiului ABC și M_1, M_2, M_3, respectiv N_1, N_2, N_3 asociatele lor.

Punctele (N_2M, N_3M_1), (M_2N, M_3N_1) sunt situate pe latura BC pe care o divid armonic.

N. N. MIHĂILEANU.

5974. Se dă conica Γ tăiată în E și F de o dreaptă Δ. Fie Δ' conjugata dreptei Δ; P polul lui Δ și M acela al lui Δ' față de Γ; O intersecția dreptelor Δ, Δ' (F fiind între O și E). Dreapta MP taie pe Γ în A și B, ultimul punct fiind între M și P. Se notează cu N și L intersecțiile (PF, OB), (AO, PE) și se cere să se demonstreze că punctele L, M, N sunt colineare.

G-L GH. BUICLIU.

5975. Se dă parabola $y^2 = 2x$, iar prin punctul R (1, 0) se duce o dreaptă variabilă, care taie parabola în punctele M_1, și M_2. Să se afle locul geometric al punctelor de intersecție dintre bisectoarele unghiului M_1OM_2 cu dreapta variabilă M_1RM_2. Să se reprezinte acel loc.

GH. GH. BROȘTEANU.

5976. O placă metalică în formă de patrat OABC, de greutate G, este purtată pe umerii a trei lucrători M, N, P. Lucrătorul M ține placa de latura OA la trei pătrimi de O. De unde trebue să o susțină ceilalți doi, pentru ca fiecare să suporte aceeași greutate?

GEORGE GH. DONȚU.

5977. O emisferă plină, de greutate $g = 6$ kg și rază R este așezată cu concavitatea în sus pe podeaua unei camere astfel încât ea este tangentă cu extremitatea sa de sus zidului vertical

al camerei. Pe ea se aşează patru sfere mici de raze egale de greutăţi respectiv 1, 2, 3, 4 kg, astfel încât sunt tangente între ele şi tangente cercului mare al emisferei. Să se determine modul de aranjare al acestor sfere mici pentru ca presiunea pe peretele vertical să fie maximă, presupunând că nu avem frecare şi corpurile sunt în echilibru. (Se presupune că numai emisfera se reazimă de perete, iar sferele nu se ating de perete).

Care este valoarea acestei presiuni?

D. D. BOIANGIU.

5978. Când explodează un obuz într'o ţeavă de tun, ea se sparge în fâşii de-a-lungul unor generatrice, similar doagelor unui butoi. Cum se explică aceasta?

COMANDOR I. LINTEŞ.

5979. Fie $u(x)$ o funcţie reală, integrabilă în intervalul (a, b) şi k un parametru real.

1. Să se stabilească inegalităţile

$$(b-a)^2 \leqslant \int_a^b e^{2ku}\,dx \times \int_a^b e^{-2ku}\,.\,dx \leqslant (b-a)^2\, ch^2\, k\,(M-m)$$

în ipoteza

$$0 \leqslant m \leqslant u(x) \leqslant M$$

x aparţinând intervalului considerat. In cazul particular $u = x$, să se deducă inegalităţile

$$x^2 \leqslant sh^2\, x \leqslant x^2\, ch^2\, x.$$

2. In ce condiţii produsul celor două integrale e o funcţie crescătoare de parametrul k?

RADU BĂDESCU.

ERATĂ. 1°. La articolul *„O metodă pentru scrierea ecuaţiei tangentelor dintr'un punct exterior la cerc şi sferă"*. G. M., Vol. XLIX, pag. 419 trebuesc făcute următoarele corecturi:

— La pag. 423 ultimul rând elementul de pe linia a III-a şi coloana a II-a a determinantului al doilea este $\beta + p\dfrac{x-x_0}{y-y_0}$;

— La pag. 424, rândul al patrulea, ultima linie a celui de al doilea determinant este: $0, \dfrac{p}{2}\dfrac{x-x_0}{y-y_0}, 0$ în loc de $\alpha, \dfrac{p}{2}\dfrac{x-x_0}{y-y_0}, 1$.

2°. La pag. 500 rândul 3 de sus se va pune ***bisextili*** în loc de ***bisericeşti***.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbu A. I. (5898, 911, 12, 20, 28, 36, 42, E, P); *Cantuniar I. Cristu* (5896); *Drăghicescu P. P.* (5896); *Gheorghe A. Grigore* (5928, 36, 40, E, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de geometrie, a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 24.982

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 11. — IULIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ
ASOCIAȚIA
SIBIIU

SUMARUL

1. Rezultatele exercițiilor numerice abstracte *I. Ionescu.*
2. Multiperfecte și amiabile inedite . . . . . *P. Poulet.*
3. O problemă din geometria triunghiului . *G-l Gh. I. Popescu.*
4. Generalizări ale elipsei lui Steiner și cubicei lui Darboux . . . . . *N. N. Mihăileanu.*
5. Note matematice: 44 — 48.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 332.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3504, 4357, 5570, 5656, 5675, 5716, 5909.
11. Exerciții: 35—38.
12. Probleme propuse: 5980 — 5994.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **9**00, 01, 02, 03, 04, 06, 07, 08, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

REZULTATELE EXERCIȚIILOR NUMERICE ABSTRACTE

Aritmetica practică elementară nu se poate învăța fără a se face exerciții numeroase de calcule cu numere abstracte asupra operațiunilor aritmetice, în școală, la tablă, sau acasă pe tăbliță sau pe caiete. Este fapt bine cunoscut că școlarii nu pun nici un interes la facerea calculelor și la găsirea rezultatelor cerute. De asemenea școlarii din clasă nu urmăresc cu nici-o plăcere calculele pe care le fac colegii lor la tablă, căci rezultatele pe care le vor scoate ei, nu-i interesează cu nimic.

Un învățător german de școală publică, populară, după 30 de ani de practică în învățământul aritmeticii elementare a reușit să facă pe școlarii săi să fie atenți la facerea calculelor numerice, alegând exercițiile așa fel ca rezultatele lor să procure oarecare plăcere și surprindere școlarilor. Acest învățător BRUNO RÜGER, a făcut o serie de exerciții, unele artificii de calcul, precum și recreațiuni aritmetice tipărindu-le în o broșură intitulată *Heitere-Rechenstunden:* 1111 verblüffende und lustige Aufgaben, *Rechenkunststücke, Rätsel, Spiele zur Belebung des Rechenunterrichts im 3 bis 8 Schuljahr.* O a doua ediție a acestei cărți a apărut în 1940. D-l inginer EMIL PRAGER, fost corespondent al *Gazetei Matematice*, făcând o călătorie prin Germania a dat peste această publicație a lui RÜGER și mi-a adus și mie un exemplar spre a-l aduce la cunoștiința cititorilor *Gazetei Matematice.* Partea originală a autorului este aranjarea exercițiilor astfel ca rezultatele să prezinte oarecare regularitate, unele având cifre egale, ca de exemplu:

$$6789 + 67508 + 76493 + 84674 + 957 + 96912 = 333333.$$

Alte exerciții au rezultate cu numere simetrice, ca de exemplu

$$42786 + 978767 + 30843 + 123456 + 26794 + 31675 = 1234321.$$

La alte rezultate cifrele merg în ordine crescândă:

$$12139602 - 36478 + 87997 - 36478 + 87997 - \ldots$$

numerele cu $+$ și cu $-$, fiind repetate de 8 ori. Rezultatul este 12345678.

Alte exerciții au rezultatul cu cifre în ordine descrescândă ca de exemplu

$$667334 \times 148 = 98765432.$$

Sunt apoi numeroase exemple de uşurare a operaţiunilor aritmetice, apoi recreaţii şi jocuri cu numere. Unele sunt prea dificile pentru şcolarii de clasele primare.

Găsesc foarte interesantă lucrarea D-lui BRUNO RÜGER pentru învăţământul aritmeticii şi exprim şi aci mulţumiri fostului corespondent al *Gazetei Matematice*, D-lui inginer EMIL PRAGER, că mi-a adus la cunoştiinţă această carte originală. Cei ce vor să folosească metoda lui RÜGER trebuie să consulte cartea lui, căci 1111 de exemple nu se pot rezuma în două pagini din 64 cât are cartea, care se poate cumpăra la librăria JULIUS KLINGHARDT din Lipsca.

I. IONESCU.

MULTIPERFECTE ŞI AMIABILE INEDITE

Multiperfecte. Se numeşte *multiperfect* un număr întreg submultiplu exact al sumei divizorilor săi. Cel mai mic multiperfect este 120. El este un *triperfect* căci este a treia parte din 360 care este suma divizorilor lui 120. In adevăr

$$120 = 2^3 . 3 . 5$$

iar suma divizorilor acestui număr este

$$S = \frac{(2^4 - 1)(3^2 - 1)(5^2 - 1)}{(2 - 1)(3 - 1)(5 - 1)} = 360 = 3 \times 120.$$

Căutarea *multiperfectelor* nu cere decât *răbdare, multă răbdare* şi tabele de descompunere în factori primi a expresiunilor de forma $p^n - 1$, unde p este un număr prim. Astfel de tabele au fost date de EULER, CUNINGHAM, KRAÏTCHIK,...

Folosind acele tabele, noi am găsit încă următoarele multiperfecte [1]) pe lângă acelea deja cunoscute.

1) Acest articol ne-a fost trimis prin D-l A. GLODEN. El a fost primit la redacţie la 6 Februarie 1942 dar nu a putut fi publicat până acum din cauza abundenţii de materie. Se poate ca între timp să se mai fi găsit şi alte *multiperfecte* sau *amiabile*.

N. R.

Sexaperfecte :

1) $2^{29} . 3^7 . 5^4 . 7^2 . 11 . 13 . 19 . 31 . 41^2 . 61 . 71 . 83 . 331 . 431 . 661 . 1321 . 1723$

al cărui log este 44, 594.

2) $2^{29} . 3^7 . 5^6 . 7^3 . 11 . 13^2 . 19 . 41^2 . 43 . 61^2 . 83 . 97 . 257 . 331 . 431 . 661 . 1321 . 1723 . 19531$

al cărui log este 56, 714.

3) $2^{64} . 3^{11} . 5^7 . 7^3 . 13^4 . 17 . 19^2 . 31 . 37 . 73 . 79 . 97 . 127^2 . 157 . 191 . 271 . 311 . 331 . 2521 . 5419 . 8191 . 30941 . 640333 . 23897227559 . 238972275589 . 145295143558111$

al cărui log este 122, 38817.

4) $2^{64} . 3^{13} . 5^3 . 7^4 . 11 . 13^4 . 19 . 31 . 41 . 97 . 127 . 163 . 191 . 307 . 311 . 467 . 547^2 . 613 . 1093 . 2521 . 2801 . 8191 . 30941 . 640333 . 23897227559 . 238972275589 . 145295143558111$

al cărui log este 125, 33904.

Septaperfecte.

1) $*2^{35} . 3^{15} . 5^6 . 7^6 . 11^4 . 13 . 17^2 . 19^2 . 29 . 37^2 . 41 . 43 . 67 . 73 . 97 . 109 . 127 . 179 . 193 . 257 . 263 . 307 . 3221 . 4733 . 19531$ (Log = 76, 14313, şi 81, 73532).

2) $2^{35} . 3^{15} . 5^{12} . 7^7 . 11^3 . 13^2 . 17^2 . 19 . 37^2 . 41 . 43 . 53 . 61^2 . 67 . 73 . 89 . 97^2 . 109 . 193 . 307 . 317 . 601 . 1201 . 3169 . 3499 . 43609 . 305175781$ (Log = 97, 71642).

3) $*2^{57} . 3^{21} . 5^{12} . 7^7 . 11^2 . 13 . 17 . 19^2 . 23^3 . 43 . 53 . 59 . 67 . 79 . 83 . 89 . 107 . 127 . 157 . 233 . 331 . 601 . 661 . 1103 . 1201 . 2089 . 3499 . 3851 . 43331 . 43609 . 3033169 . 305175781$ Log = (122, 89997 şi 128, 49217).

4) $*2^{63} . 3^{22} . 5^{13} . 7^5 . 11^4 . 13 . 17^2 . 19^2 . 29 . 31 . 43 . 47 . 61 . 83 . 107 . 127 . 139 . 179 . 257^2 . 307 . 331 . 349 . 449 . 641 . 1087 . 3221 . 3613 . 19531 . 27919 . 55837 . 65537 . 335021 . 2384579 . 3350209 . 6700417 . 1001523179$ (log = 151, 09457 şi 156, 64177).

5) $2^{63} . 3^{22} . 5^{13} . 7^6 . 11^3 . 13^3 . 17^4 . 19 . 29^2 . 43^2 . 47 . 61^2 . 67 . 79 . 83 . 97 . 107 . 139 . 257^2 . 263 . 331 . 349 . 449 . 631 . 641 . 1087 . 3613 . 4733 . 11093 . 19531 . 27969 . 44371 . 55837 . 65537 . 88741 . 335021 . 2384579 . 3350209 . 6700417 . 1001523179$ (log = 175, 54722).

6) $2^{64} . 3^{13} . 5^4 . 7^4 . 11^2 . 13^3 . 17^2 . 19^2 . 23 . 31 . 41 . 43 . 71 . 97 . 127^2 . 163 . 271 . 307^2 . 311 . 367 . 467 . 547^2 . 613 . 733 . 1093 . 2521 . 2801 . 5419 . 8191 . 640333 . 23897227559 . 238972275589 . 145295143558111$ (log = 143, 96760).

7) $*2^{66} . 3^{12} . 5^3 . 7^4 . 11^3 . 13^5 . 17^2 . 19^2 . 23 . 31 . 43 . 61^2 . 79 . 97 . 103 . 127 . 149 . 157 . 257 . 307 . 467 . 607 . 617 . 1087 . 1213 . 2801 . 5653 . 67927 . 398581 . 797161 . 1401943 . 7450297 . 193707721 . 761838257287$ (log = 137, 17530 şi 142, 76750.

8) $*2^{66}.3^{13}.5^{5}.7^{7}.11^{2}.13.17.19^{2}.23.31^{2}.41.43^{2}.79.83.127.149.163.257.307.331.547^{2}.601.607.613.631.1087.1093.1201.1213.5653.67927.1401943.7450297.193707721.761838257287$ (Log = 140, 14875 şi 145, 74095).

9) $*2^{67}.3^{20}.5^{6}.7^{5}.11.13.17.19^{2}.37^{2}.41.43^{2}.47.53.67.73.79.83.127.137^{2}.257.331.409.547.631.953.1093.13159.19531.26317.36809.43691.131071.368089$ (log = 121, 18709 şi 126, 77928).

10) $2^{69}.3^{24}.5^{6}.7^{3}.11^{6}.13^{4}.17^{3}.19^{2}.29^{2}.31.43^{4}.67.71.103.109^{2}.127^{2}.167.191.223.257.271.281^{2}.373.571.683.727.5419.6829.8951.19531.30941.45319.86171.122921.391191.583367.3500201$ (log = 161, 32846.

11) $2^{69}.3^{25}.5^{7}7^{4}.11^{3}.13^{4}.19^{3}.29.31^{2}.37.43^{3}.47.61.71.79.83.127.157.167.181.191.281.313.331\ 467.683.769.811.1621.2801.6829.19993.30941.86171.122921.398581^{2}.797161.32668561$ (log = 156, 17407).

12) $2^{69}.3^{20}.5^{9}.7^{3}.11^{2}.13.19^{4}.23.29.31.41.43^{2}.47.71^{2}.79.127.137.151.167.281.409.521.547.631.683.911.1093.1279.2557.5113.6829.36809.86171.122921.368089$ (log = 128, 92330).
$2^{70}.3^{21}.5^{6}.7^{8}.11^{3}.17^{2}.19^{5}.23^{2}.31.37.43.47.61.67.71.79.83.107.113.127.257.283.307.331.661.719.1063.3851.19531.21149.228479.48544121.212885833$ (log = 131, 07225).

13) $*2^{70}.3^{24}.5^{9}.7^{3}.11^{5}.17^{3}.19^{2}.23.29^{3}.31.37^{3}.47^{2}.53.61.67.71^{2}.113.127.211.281.283.373.421.521.719.1279.2557.5113.8951.21149.228479.391151.48544121.212885833$ (log = 137, 58871 şi 143, 18091).

14) $2^{73}.3^{21}.5^{6}.7^{9}.11^{2}.13^{3}.17^{4}.19^{3}.23.37.43^{3}.59.67.83.107.127\ 181.191.223.257.331.467.661.1777.2801.3851.7019.11093.19531.44371.88741.112303.898443.920753.25781083.616318177$ (log = 157, 992).

15) $2^{73}.3^{21}.5^{7}.7^{7}.11.13^{2}.17^{3}.23.29.31.43.59.61.67.79.83.107.127.157.223.313.331.601.661.1201.1777.3851.7019.112303.898443.920753.25781083.616318177$ (log = 131, 134).

16) $2^{73}.3^{23}.5^{10}.7^{11}.11.13^{4}.17^{4}.19.29.37^{2}.41.43^{3}.59.67.73.127^{2}.167.181.191.223.271.463.1523.1777.5419.6481.7019.9137.11093.30941.44371.88741.112303.898443.920753.12207031.25781083.616318177$ (log = 176, 092).

17) $2^{73}.3^{23}.5^{12}.7^{13}.11.13^{3}.17^{3}.19^{3}.29^{3}.37.41.53.59.73.89.113.127.181.211.223.263.421.463.911.1777.3499.4733.6481.7019.43609.112303.898443.920753.25781083.305175781.616318177$ (log = 165, 286).

Octoperfecte.

1) $*2^{65} . 3^{23} . 5^{9} . 7^{12} . 11^{3} . 13^{3} . 17^{2} . 19^{2} . 23 . 29^{2} . 31^{2} . 37 . 41 . 53 . 61 . 67^{2} . 71^{2} . 73 . 83 . 89 . 103 . 127 . 131 . 149 . 211 . 307 . 331 . 463 . 521 . 683 . 709 . 1279 . 2141 . 2557 . 5113 . 6481 . 10429 . 20857 . 110563 . 599479 . 16148168401$ (log = 159, 03673 şi 164, 62893).

2) $2^{68} . 3^{23} . 5^{7} . 7^{12} . 11^{3} . 13^{5} . 17 . 19^{3} . 23 . 29 . 31^{2} . 37^{2} . 41 . 47 . 61^{3} . 67 . 71 . 73 . 83 . 103 . 131 . 151 . 157^{2} . 181 . 197 . 211^{2} . 313 . 331 . 421 . 439 . 463 . 709 . 827 . 1861 . 6481 . 8269 . 36833 . 110563 . 178481 . 16148168401 . 10052678938039$ (log = 172, 96540).

Astericul arată că se obţine un multiperfect de acelaşi grad dacă se substitue în produs $19^{2} . 127$ prin $19^{4} 151 . 911$. Al doilea *log* după *multiperfectele* cu asteric sunt ale numerelor obţinute prin aceste substituţii.

Acest tablou de multiperfecte inedite ridică numărul *multiperfectelor* găsite până acum la un total de 368 din care: 6 *triperfecte*, 36 *tetraperfecte*, 55 *pentaperfecte*, 171 *sexaperfecte*, 95 *septaperfecte* şi 5 *octoperfecte*.

Până acum nu se cunosc formule generale sau particulare ale multiperfectelor şi este probabil ca pentru un grad de multiplicitate dat, numărul multiperfectelor să fie limitat.

Pentru gradele 3, 4, 5 lista multiperfectelor cunoscute până acum este probabil complectă, sunt încă puţine sexaperfecte necunoscute, iar peste acest număr câmpul cercetărilor este încă deschis.

Amiabile. Două numere *a* şi *b*, care au ca sumă a divizorilor respectiv pe A şi B, se numesc *amiabile* când

$$a + b = A = B.$$

Cele mai mici numere *amiabile*, şi cele mai de demult cunoscute, sunt numerele 220 şi 284. Suma divizorilor fiecărui din aceste numere este 504 egală cu suma lor.

Primul care s'a ocupat cu numerele amiabile, după ştiinţa noastră, este EULER care a şi dat o listă de 60 de astfel de numere în *„De numeris amicalibus“*, unde a indicat cinci procedee de aflarea lor.

După EULER lista numerelor amiabile a fost sporită de alţi cercetători. Eu însu-mi am publicat în *„La chasse aux nombres“* un număr de 155 de perechi de numere amiabile. Un alt număr de numere amiabile a fost indicat de D-l ESCOTT.

Dau, pentru cititorii *Gazetei Matematice* următorul şir de 43 de perechi de numere amiabile:

1°. 122 368 ($2^9 . 239$) şi 123 152 ($2^4 . 43 . 179$)

2°. 32 685 250 ($2 . 5^3 . 13 . 89 . 113$) şi 34 538 270 ($2 . 5 . 13 . 379 . 701$)

3°. 80 422 335 ($3^3 . 5 . 7 . 85103$) şi 82 977 345 ($3^3 . 5 . 11 . 71 . 787$)

4°. 145 040 288 ($2^5 . 41 . 227 . 487$) şi 149 364 256 ($2^5 . 1063 . 4391$)

5°. 169 000 448 ($2^9 . 71 . 4649$) şi 173 499 952 ($2^4 . 53 . 204599$)

6°. 200 328 232 ($2^3 . 13 . 157 . 12269$) şi 206 790 368 ($2^5 . 6462199$)

7°. 558 173 344 ($2^5 . 41 . 467 . 911$) şi 571 181 792 ($2^5 . 233 . 76607$)

8°. 681 709 490 ($2 . 5 . 7 . 11 . 929 . 953$)
şi 851 406 670 ($2 . 5 . 2879 . 29573$)

9°. 728 921 270 ($2 . 5 . 7 . 11 . 929 . 1019$)
şi 910 259 530 ($2 . 5 . 2447 . 37199$)

10°. 1 093 953 735 ($3^3 . 5 . 7 . 89 . 13007$)
şi 1 153 828 665 ($3^3 . 5 . 11 . 239 . 3251$)

11°. 1 991 349 664 ($2^5 . 41 . 251 . 6047$)
şi 2 041 408 352 ($2^5 . 293 . 217727$)

12°. 2 221 834 450 ($2 . 5^2 . 11 . 1049 . 3851$)
şi 2 291 939 150 ($2 . 5^2 . 17 . 2696399$)

13°. 2 481 907 330 ($2 . 5 . 7^2 . 263 . 19259$)
şi 2 734 933 310 ($2 . 5 . 17\,1319 . 12197$)

14°. 3 693 013 664 ($2^5 . 41 . 131 . 21487$)
şi 3 812 143 072 ($2^5 . 119129471$)

15°. 3 986 534 090 ($2 . 5 . 7 . 11 . 929 . 5573$)
şi 4 971 106 870 ($2 . 5 . 929 . 535103$)

16°. 4 049 815 250 ($2 . 5^3 . 13 . 43 . 28979$)
şi 4 304 770 990 ($2 . 5 . 13 . 857 . 38639$)

17°. 8 348 580 350 ($2 . 5^2 . 11 . 3163 . 4799$)
şi 8 600 334 850 ($2 . 5^2 . 17 . 2239 . 4519$)

18°. 12 242 543 584 ($2^5 . 41 . 137 . 68111$)
şi 12 628 416 992 ($2^5 . 2897 . 136223$)

19°. 13 092 033 350 ($2 . 5^2 . 11 . 3499 . 6803$)
şi 13 484 390 650 ($2 . 5^2 . 17 . 1511 . 10499$)

20°. 14 938 209 550 ($2 . 5^2 . 11 . 1499 . 18119$)
şi 15 394 670 450 ($2 . 5^2 . 17 . 3623 . 4999$)

21°. 15 965 165 986 ($2 . 7^2 . 11 . 19 . 307 . 2539$)
şi 16 141 246 814 ($2 . 7 . 11^2 . 19 . 659 . 761$)

22°. 19 647 467 950 ($2 . 5^2 . 11 . 1499 . 23831$)
şi 20 247 300 050 ($2 . 5^2 . 17 . 2647 . 8999$)

23°. 44 303 273 584 ($2^4 . 43 . 113 . 569861$)
şi 44 307 987 968 ($2^9 . 1097 . 78887$)

24°. 52 405 125 675 ($3.5^2.7.23.31.139999$)
și 54 254 714 325 ($3.5^2.7.31.127.26249$)

25°. 68 225 999 050 ($2.5^2.11.6869.18059$)
și 70 238 576 150 ($2.5^2.17.1031.80149$)

26°. 74 539 786 958 ($2.7^2.13.19.47.65519$)
și 76 040 897 842 ($2.7^2.13.19.1663.1889$)

27°. 112 481 691 850 ($2.5^2.11.983.208049$)
și 115 987 167 350 ($2.5^2.17.7789.17519$)

28°. 161 349 260 050 ($2.5^2.11.1049.279659$)
și 166 356 327 950 ($2.5^2.17.4423.44249$)

29°. 389 841 451 450 ($2.5^2.11.911.778049$)
și 402 051 614 150 ($2.5^2.17.11551.40949$)

30°. 653 564 694 250 ($2.5^3.13.2861.70289$)
și 664 501 014 710 ($2.5.13.43.118873169$)

31°. 820 147 317 255 ($3^3.5.7.2153.403103$)
și 846 961 833 465 ($3^3.5.11.67.8512607$)

32°. 1 083 117 333 008 ($2^4.24.17669.132113$)
și 1 087 925 240 392 ($2^3.17.193.41447929$)

33°. 2 609 581 692 850 ($2.5^2.11.1049.4523063$)
și 2 690 545 197 350 ($2.5^2.17.3989.793519$)

34°. 3 215 781 322 144 ($2^5.41.131.18710327$)
și 3 319 212 359 072 ($2^5.22307.4649903$)

35°. 13 285 746 282 550 ($2.5^2.11.859.28119899$)
și 13 703 108 941 450 ($2.5^2.17.21499.749863$)

36°. 46 784 527 333 929 ($3^4.7^2.11.19.251.224699$)
și 46 944 709 498 071 ($3^4.7^2.11.19.1889.29959$)

37°. 145 397 414 786 925 ($3.5^2.7^3.31.113.1613471$)
și 146 545 499 670 575 ($3.5^2.7^3.31.1063.172871$)

38°. 203 664 986 322 050 ($2.5^2.919.402937949$)
și 210 039 465 701 950 ($2.5^2.17.8233.30013999$)

39°. 268 836 817 795 150 ($2.5^2.11.827.591044999$)
și 277 317 132 364 350 ($2.5^2.17.298999.1091159$)

40°. 288 073 220 282 650 ($2.5^2.11.827.633336749$)
și 297 160 336 881 350 ($2.5^2.17.291869.1197799$)

41°. 608 720 910 892 650 ($2.5^2.11.827.1338289349$)
și 627 922 686 896 150 ($2.5^2.17.255349.2893031$)

42°. 2 217 911 344 463 728 ($2^4.29.102409.46675403$)
și 2 227 514 810 521 472 ($2^7.569.30584.287271$)

43°. 116 745 142 817 166 633 ($3^4.7^2.11.19.239.588862007$)
și 117 190 418 287 370 967 ($3^4.7^2.11.19.2713.52073279$).

Cu acestea, numărul perechilor de numere amiabile se ridică la 365.

Procedeul, pe care l-am întrebuinţat pentru găsirea lor, constă în a le scrie sub forma *mab, ncd* sau *mab, nc*, unde *a, b, c, d* sunt numere prime necunoscute iar *m* şi *n* numere arbitrare alese aşa încât $\frac{M}{m}$ şi $\frac{N}{n}$ să fie cu puţin inferioare lui 2. Mai riguros este deajuns ca

$$\frac{M}{m} + \frac{N}{n} = 4 - \varepsilon.$$

Condiţiile

$$mab + ncd = MAB = NCD$$

nu sunt satisfăcute decât de un număr limitat de soluţii întregi dintre care se reţin acelea pentru care *a, b, c, d* sunt toate prime. Bine înţeles că reuşita găsirei acestor numere depinde mult de alegerea valorilor lui *m* şi *n*; după puţin exerciţiu se pot recunoaşte uşor valorile susceptibile de a conduce la soluţii satisfăcătoare.

Un caz simplu este acela în care

$$m = n = 2^k.$$

Sunt perechi de numere amiabile pare sau impare; nu se cunosc perechi de numere amiabile de paritate diferită.

Problema cea mai interesantă, atât pentru numerele amiabile cât şi pentru multiperfecte, ar fi de a *determina toate numerele de această natură, inferioare unei limite determinate.*

Pentru *multiperfecte* mi-am spus părerea la paragraful care tratează despre ele.

Pentru *amiabile* se pare că sunt cunoscute aproape toate cele inferioare lui 100.000.

Dacă se observă că în tabloul precedent figurează 9 numere decâte 6 cifre care au scăpat până acum predecesorilor mei, atunci afirmaţia, mea cu rezerve, este foarte întemeiată.

O explorare complectă în domeniul acestor numere cere multă metodă, mult timp şi mai ales multă atenţie şi răbdare, poate că de aceea aceste numere foarte interesante nu sunt aşa de cunoscute.

P. POULET.

O PROBLEMĂ DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Se cunoaşte teorema enunţată şi demonstrată de D-l Profesor D. POMPEIU: dacă în planul unui triunghiu echilateral ABC, se ia un punct oarecare M, cu cele trei lungimi MA, MB, MC, se poate totdeauna, forma un triunghiu.

Ne propunem să studiem problema:

Să se găsească în planul triunghiului ABC, *zonele punctelor* M, *pentru care, cu distanţele* MA, MB *şi* MC, *să se poată forma un triunghiu.*

Din studiul problemei generale, vom deduce soluţia şi pentru cazurile triunghiurilor: echilaterale şi isoscele.

1. Fie tr. ABC, O centrul şi R raza cercului ABC; cercurile OBC, OCA, OAB, inversele laturilor BC, CA şi AB, faţă de O şi puterea de inversiune R^2.

Perpendicularele din O, pe laturile tr. ABC, taie laturile opuse, respectiv: pe CA şi BC în E_1, E_2; pe AB şi BC în D_1, D_2; pe CA şi BA în F_1, F_2.

Dacă se înseamnă cu *a*, *b* şi *c* laturile BC, CA şi AB, fie:

$$(1) \qquad a \leqslant c \leqslant b.$$

2. *Variaţia diferenţei între distanţa punctului* M, *la un vârf şi suma distanţelor la celelalte două vârfuri.*

Pe drepte, ce trec prin vârful A, considerăm punctele M şi vom studia variaţia diferenţei $MA - (MB + MC)$.

Pe latura AB, în punctul D_1, avem condiţia $D_1A < D_1C + D_1B$, fiindcă $D_1A = D_1C$. In vârful B, avem $BA > BC$ $(MB = 0)$, de unde deducem că între punctele D_1 şi B_1 există un punct G_1, pentru care $G_1A = G_1B + G_1C$.

Pentru puncte M, în direcţia $\overline{AB}$, dincolo de vârful B, se vede că $MA > MB + MC$.

In punctul C_1, obţinut luând $CC_1 = AB$, se are relaţia: $C_1A = C_1B + C_1C$, care este evidentă. Continuând în acelaşi sens, pe dreapta AB, se va avea dincolo de punctul C_1, relaţia $MA < MB + MC$.

De unde, rezultă că pe dreapta AB, între punctele G_1 şi C_1 se are condiţia $MA \geqslant MB + MC$, iar pentru restul punctelor, $MA \leqslant MB + MC$.

Tot astfel, se vor determina pe latura AC, punctele K_1 şi B_1 pentru care: $MA = MB + MC$ şi inegalităţile de mai sus.

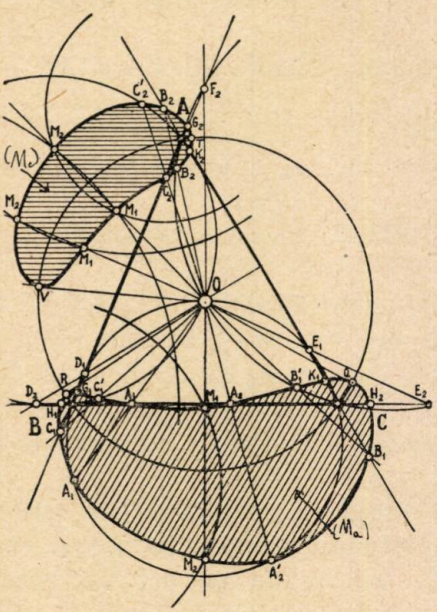
Prin urmare, în planul triunghiului dat ABC, se vor găsi puncte M, pentru care distanţa la un vârf, este mai mică, egală sau mai mare ca suma distanţelor la celelalte două vârfuri ale triunghiului.

Pe aceeaşi dreaptă, pentru a trece dela relaţia $MA < MB + MC$, la $MA > MB + MC$ sau invers, trebue să se fi trecut prin punctele care îndeplinesc condiţia $MA = MB + MC$.

3. Atunci problema revine în a determina, mai întâi, locul punctelor M, pentru care avem relaţiile:

$$(2)\quad \begin{cases} MA = MB + MC, & \text{pentru vârful A} \\ MB = MC + MA, & \text{„ \quad „ \quad B} \\ MC = MA + MB, & \text{„ \quad „ \quad C.} \end{cases}$$

Să considerăm $MA = \lambda m$, $MB = \lambda n$ şi $MC = \lambda p$.



Punctul M se va găsi la intersecţia cercurilor care divid laturile AB, BC şi CA armonic şi respectiv, în rapoartele: $\frac{m}{n}$, $\frac{n}{p}$ şi $\frac{p}{m}$.

Aceste cercuri, ortogonale cercului ABC, se taie în două puncte M_1 şi M_2. Coarda comună M_1M_2 trece prin O.

Punctele M_1 şi M_2, se vor găsi pe o curbă (M), care îndeplineşte condiţia ca: $OM_1 \cdot OM_2 = R^2$ şi după cum se vede, este o curbă analagmatică.

Punând una din condiţiile (2) se va construi curba (M) corespunzătoare, prin punctele M_1 şi M_2, determinate de intersecţia cercurilor considerate mai sus, după cum se va arăta mai jos şi indicate pe figură.

a) *Pentru vârful* A *şi latura opusă* BC (cea mai mică).

Se pune condiţia: $MA = MB + MC$, sau $m = n + p$ şi se vor determina punctele caracteristice ale curbei (M_a).

Pe latura BC, între punctele D_2 şi B, se va găsi un punct H_1 pentru care $H_1A = H_1B + H_1C$.

Apoi punctele A_1 şi A_2, astfel ca $AA_1 = AA_2 = BC$, în cazul când $BC \geqslant h_a$ (înălţimea din vârful A), unde se obţin relaţiile $A_1A = A_1B + A_1C$ şi pentru A_2 la fel.

Intre vârful C şi E_2, se găseşte punctul H_2, pentru care avem $H_2A = H_2B + H_2C$ fiindcă pentru C, distanţa $CA > CB$ iar pentru E_2, se are $E_2A < E_2B + E_2C$.

Punctele A_1 şi A_2, B_1 şi C_1 construite pe laturile tr. ABC, cu ajutorul respectiv, al cercurilor de centre A, B şi C şi de raze BC, AC şi AB precum şi inversele lor A_1' şi A_2', B_1' şi C_1' de pe cercurile OBC, OCA şi OAB, sunt puncte ale curbei (M_a). Această curbă va întâlni cercul ABC în punctele Q şi R unde punctele M_1 şi M_2 se confundă şi este tangentă la razele OQ şi OR.

Punctele M, de pe cercul ABC, îndeplinesc următoarele relaţii:

$$(3)\quad \begin{cases} ma = bn + cp & \text{când M se găseşte pe arcul BC} \\ nb = cp + ma & \text{„ „ „ „ „ „ CA} \\ cp = ma + bn & \text{„ „ „ „ „ „ AB.} \end{cases}$$

Punând condiţia $m = n + p$, se obţin două rapoarte:

$$\frac{n}{p} = \frac{c+a}{b-a} \text{ pe arcul CA}$$

$$\frac{n}{p} = \frac{c-a}{a+b} \text{ „ „ AB}$$

raportul $\frac{n}{p}$ din prima egalitate, având o valoare negativă, nu este posibil.

Cele două cercuri, corespunzătoare rapoartelor $\frac{n}{p}$, se pot construi pe latura BC şi sunt tangente respectiv, la curba (M_a), în punctele Q şi R.

Dacă $BC = h_a$, curba (M_a) este tangentă la latura BC iar dacă $BC < h_a$, punctele A_1 şi A_2 sunt imaginare.

Curba (M_a) este de gradul al 4-lea, fiindcă latura BC, o taie în punctele H_1, A_1, A_2 şi H_2.

Posibilitățile curbei (M_a) sunt legate de punctele M_1 și M_2. Condițiile pentru ca să fie reale, adică: cercurile $\frac{m}{n}$, $\frac{n}{p}$ și $\frac{p}{m}$ să se taie în două puncte reale-distincte sau confundate, sunt:

$$(4)\quad \begin{cases} ma \leqslant nb + cp & \text{pentru vârful A} \\ nb \leqslant cp + ma & \text{„ „ B} \\ cp \leqslant ma + nb & \text{„ „ C.} \end{cases}$$

Punând condiția $m = n + p$, se deduce condiția de posibilitate pentru $\frac{n}{p}$ și adică $\frac{c-a}{a+b} \leqslant \frac{n}{p} \leqslant \frac{c+a}{b-a}$.

b) *Pentru vârful* C *și latura* AB (latura mijlocie).

Avem condiția $MC = MB + MA$, iar curba (M_c) corespunzătoare, se determină în aceleași condiții, ca (M_a).

Se observă că, latura BC nu taie curba (M_c), fiindcă $BC < AB$ și pentru punctele M de pe dreapta BC, se are condiția $MC < MB + MA$.

Pe latura AB, avem punctul C_2 în care $CC_2 = AB$ și deci $C_2C = C_2B + C_2A$; apoi, punctul G_2 între A și F_2 pentru care $G_2C = G_2B + G_2A$.

Pe latura CA, este punctul B_2 astfel ca $BB_2 = CA$; apoi, între A și F_1, punctul k_2 pentru care $k_2C = k_2B + k_2A$.

Se vor determina punctele T și V, unde curba (M_c) taie cercul ABC și punând condiția $p = m + n$, din egalitățile (3) se deduc cele două cercuri — posibile — de raport $\frac{m}{n}$, pe latura AB, tangente la (M_c):

$$\frac{m}{n} = \frac{b-c}{a+c} \text{ pe arcul CA}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{b-c}{c-a} \text{ „ „ AB.}$$

Condițiile de posibilitate, sunt: $\frac{b-c}{a+c} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{b-c}{c-a}$.

c) *Pentru vârful* B *și latura* CA (cea mai mare).

Avem condiția $MB = MA + MC$.

Curba (M_b) nu taie niciuna din laturile tr. ABC, având numai relaţia $MB < MC + MA$.

In relaţiile (2), punând condiţia $n = p + m$, raportul $\frac{p}{m}$ nu este pozitiv şi deci niciun cerc de raportul $\frac{p}{m}$, nu este real.

Curba (M_b), nu există şi deci condiţia: $MB < MC + MA$, este satisfăcută pentru toate punctele, din planul triunghiului ABC.

4. Pentru ca să se poată forma un triunghiu cu lungimile MA, MB şi MC, trebue să existe condiţiile:

$$(5) \quad \begin{cases} MA < MB + MC \\ MB < MC + MA \\ MC < MA + MB. \end{cases}$$

In concluzie, se vede că:

— punctele din interiorul curbelor (M_a) şi (M_c) îndeplinesc condiţiile

$$MA > MB + MC$$
$$MC > MA + MB.$$

şi deci nu se pot forma triunghiuri cu distanţele MA, MB şi MC.

— pentru punctele de pe aceste curbe, inegalităţile de mai sus fiind egalităţi, triunghiurile formate sunt reduse la un segment;

— *în planul triunghiului* ABC, *pentru toate punctele din afara curbelor* (M_a) *şi* (M_c) — *corespunzătoare laturilor* a *şi* c — *cele mai mici* — *cu lungimile* MA, MB *şi* MC, *se poate forma un triunghiu.*

Pentru aceste puncte condiţiile (5), sunt satisfăcute.

5. *Cazuri particulare.*

a) *Triunghiul* ABC, *este isoscel.*

— $AB = BC$ adică, $a = c < b$. In acest caz curbele (M_a) şi (M_c) sunt simetrice, faţă de segmentele BC şi BA, trec prin vârful B şi curbele sunt tangente la raza OB.

— $AB = AC$ sau $a < c = b$. Curba (M_a) devine simetrică faţă de vârfurile B şi C. Curba (M_c) se confundă cu vârful A.

— $AB = AC$ şi $BC = O$. Curba (M_a) se reduce la cercul $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, faţă de segmentul AB.

b) *Triunghiul* ABC, *este echilateral.*

Cazul AB = BC = CA. Curba (M_a) se reduce la arcul BC. Cum toate laturile sunt egale, vor fi şi curbe analoage, care se vor reduce la arcurile CA şi AB ale cercului ABC. Rezultă că, pentru triunghiul echilateral:

— punctele M, de pe cercul ABC, satisfac condiţiile (2);

— pentru restul punctelor M, din planul triunghiului echilateral, distanţele la vârfurile triunghiului, îndeplinesc condiţiile (5) şi deci, pentru teorema relativă la tr. echilateral, a D-lui Profesor D. POMPEIU, se obţine o nouă demonstraţie.

6. *Verificare.* Pentru punctele M, de pe cercurile descrise din vârfurile triunghiului ABC, ca centre şi cu laturile opuse, la baze, cu distanţele la vârfuri, se poate forma un triunghiu.

Dacă MA = BC, triunghiul MBC format, are ca laturi, distanţele MB, MC şi BC = MA, ceea ce demonstrează, cele indicate mai sus.

Cercurile considerate de centre A, B şi C şi de raze BC, CA şi AB, sunt tangente la curbele (M_a) şi (M_c) astfel: cercul A în punctele A_1 şi A_2 (M_a): cercul B, în punctele B_1 (M_a) şi M_2 (M_c); cercul C_1 în punctele C_1 (M_a) şi C_2 (M_c).

Ceea ce verifică că aceste cercuri, nu taie curbele (M_a) şi (M_c) care conţin în interiorul lor punctele pentru care nu se pot forma triunghiuri, cu distanţele la vârfurile tr. ABC.

G-L GH. I. POPESCU.

GENERALIZĂRI ALE ELIPSEI LUI STEINER ŞI CUBICEI LUI DARBOUX

Prima elipsă a lui STEINER se poate defini astfel:

1. *Locul geometric al punctului* M *astfel ca paralelele duse prin acest punct la medianele unui triunghiu* ABC *să taie laturile acestuia în trei puncte în linie dreaptă — este o cubică degenerată în dreapta dela infinit şi o elipsă* (elipsa lui STEINER [1]).

D-l C. COŞNIŢĂ în lucrarea D-sale asupra coordonatelor baricentrice dă următoarele generalizări:

2. *Fie* P *un punct în planul triunghiului* ABC. *Locul punctelor* M *astfel ca paralelele duse prin* M *la* AP, BP, CP *să taie*

1) C. COŞNIŢĂ: *Coordonnées barycentriques.* Bucureşti 1941, pag. 149.

pe BC, CA, AB *în trei puncte* A', B', C' *în linie dreaptă este o cubică degenerată în dreapta dela infinit şi o conică circumscrisă triunghiului şi având ca centru complementarul lui* P[1]).

3. *Fie* P *un punct în planul triunghiului* ABC *şi* Δ *polara sa trilineară. Dreapta* Δ *taie pe* AP, BP, CP *în* A_1, B_1, C_1. *Locul punctului* M *astfel ca dreptele* MA_1, MB_1, MC_1 *să taie pe* BC, CA, AB *în punctele* A', B', C' *ale unei aceleiaşi drepte este o cubică degenerată în dreapta* Δ *şi o conică circumscrisă triunghiului* ABC *şi având* P *ca punct al lui* LEMOINE.

Voiu arăta că proprietatea 3) este principial adevărată şi când Δ este arbitrară. Vom avea deci enunţul:

(I). *Fie* P *şi* Δ *un punct şi o dreaptă arbitrară în planul triunghiului* ABC. *Dreapta* Δ *taie pe* AP, BP, CP *în* A_1, B_1, C_1. *Locul punctelor* M *astfel ca dreptele* MA_1, MB_1, MC_1 *să taie pe* BC, CA, AB *în punctele* A', B', C' *ale unei aceleaşi drepte este o cubică degenerată în dreapta* Δ *şi o conică circumscrisă triunghiului* ABC.

Pentru demonstraţie întrebuinţez metoda din cartea citată. Fie

$$P(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \quad , \quad \Delta(l\alpha + m\beta + n\gamma = 0) \quad , \quad M(x, y, z).$$

Ecuaţia unei drepte ce trece prin A_1 şi M este

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + k\left(\frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\gamma}{\gamma_0}\right) = 0, \quad lx + my + nz + k\left(\frac{y}{\beta_0} - \frac{x}{\gamma_0}\right) = 0$$

sau, eliminând pe k

$$l\left(\frac{y}{\beta_0} - \frac{z}{\gamma_0}\right)\alpha - \left[\frac{lx}{\beta_0} + \left(\frac{m}{\gamma_0} + \frac{n}{\beta_0}\right)z\right]\beta + \left[\frac{lx}{\gamma_0} + \left(\frac{m}{\gamma_0} + \frac{n}{\beta_0}\right)y\right]\gamma = 0$$

deci, notând $l\alpha + m\beta + n\gamma = \delta$

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\left[\frac{\delta}{\beta_0} + m\left(\frac{z}{\gamma_0} - \frac{y}{\beta_0}\right)\right] : \left[\frac{\delta}{\gamma_0} + n\left(\frac{y}{\beta_0} - \frac{z}{\gamma_0}\right)\right]$$

ecuaţia locului geometric sub formă brută este deci

$$\left[\frac{\delta}{\beta_0} + m\left(\frac{z}{\gamma_0} - \frac{y}{\beta_0}\right)\right]\left[\frac{\delta}{\gamma_0} + n\left(\frac{x}{\alpha_0} - \frac{z}{\gamma_0}\right)\right]\left[\frac{\delta}{\alpha_0} + l\left(\frac{y}{\beta_0} - \frac{x}{\alpha_0}\right)\right]$$

$$+ \left[\frac{\delta}{\gamma_0} + n\left(\frac{y}{\beta_0} - \frac{z}{\beta_0}\right)\right]\left[\frac{\delta}{\alpha_0} + l\left(\frac{z}{\gamma_0} - \frac{x}{\alpha_0}\right)\right]\left[\frac{\delta}{\beta_0} + m\left(\frac{x}{\alpha_0} - \frac{y}{\beta_0}\right)\right] = 0$$

---

1) Idem pag. 150.

sau, observând că termenul liber se reduce şi suprimând un factor δ, rămâne conica

$$\frac{2(lx+my+nz)^2}{\alpha_0\beta_0\gamma_0}+(lx+my+nz)\Sigma\frac{l}{\beta_0\gamma_0}\left(\frac{y}{\beta_0}+\frac{z}{\gamma_0}-\frac{2x}{\alpha_0}\right)$$
$$-\Sigma\frac{mn}{\alpha_0}\left(\frac{y}{\beta_0}-\frac{z}{\gamma_0}\right)^2=0$$

şi desvoltând, observând că expresia e omogenă şi coeficientul lui x^2, nul, apoi simplificând cu factorul $\Sigma\frac{l}{\beta_0\gamma_0}$, rămâne ecuaţia conicei

$$\text{(I)}\qquad \Sigma\left(\frac{m}{\gamma_0}+\frac{n}{\beta_0}\right)yz=0.$$

Centrul ω al conicei are coordonatele

$$\left(\frac{m}{\gamma_0}+\frac{n}{\beta_0}\right)\left[l\left(\frac{1}{\beta_0}+\frac{1}{\gamma_0}\right)+m\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\gamma_0}\right)+n\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\beta_0}\right)\right]$$

şi punctul $\wedge$ LEMOINE al conicei

$$\frac{m}{\gamma_0}+\frac{n}{\beta_0},\ldots$$

De aici este uşor de obţinut prin particularizări teoremele 1), 2), 3).

* * *

Dacă în enunţul (I) impunem punctelor A', B', C' condiţia de a fi picioare de ceviene concurente, obţinem propoziţia:

(II). *Fie* P *un punct şi* Δ *o dreaptă, arbitrare în planul triunghiului* ABC. *Dreapta* Δ *taie pe* AP, BP, CP *în* A_1, B_1, C_1. *Locul punctelor* M *astfel ca dreptele* MA_1, MB_1, MC_1 *să taie pe* BC, CA, AB *în punctele* A', B', C' *pentru care* AA', BB', CC' *sunt concurente într'un punct* N *este o cubică circumscrisă triunghiului, ce trece prin* P. *Locul geometric al punctelor* N *este o altă cubică circumscrisă triunghiului şi trecând prin* P.

Pentru demonstraţie, păstrăm notaţiile precedente; găsim ecuaţia locului sub forma brută.

$$\left[\frac{\delta}{\beta_0}+m\left(\frac{z}{\gamma_0}-\frac{y}{\beta_0}\right)\right]\left[\frac{\delta}{\gamma_0}+n\left(\frac{x}{\alpha_0}-\frac{z}{\gamma_0}\right)\right]\left[\frac{\delta}{\alpha_0}+l\left(\frac{y}{\beta_0}-\frac{x}{\alpha_0}\right)\right]$$
$$-\left[\frac{\delta}{\gamma_0}+n\left(\frac{y}{\beta_0}-\frac{z}{\gamma_0}\right)\right]\left[\frac{\delta}{\alpha_0}+l\left(\frac{z}{\gamma_0}-\frac{x}{\alpha_0}\right)\right]\left[\frac{\delta}{\beta_0}+m\left(\frac{x}{\alpha_0}-\frac{y}{\beta_0}\right)\right]=0$$

care este identică cu condiția găsită la pag. 324, Vol. XLVII, în funcție de cosinusurile unghiurilor triunghiului.

In demonstrația precedentă valoarea lui $\overline{A'A''} = m$ este pozitivă dacă A'' și A sunt de aceeași parte a lui BC și negativă în caz contrar. Condiții anoloage se impun lui $\overline{B'B''} = n$ și $\overline{C'C''} = p$.

P. P. DRĂGHICESCU.

47. *Asupra problemei 3573. G. M., XLIX, p. 436.* Să considerăm și alte cazuri ce se pot prezenta:

I. *Omografia absciselor are punctele duble confundate, iar omografia ordonatelor le are distincte.*

In acest caz, relația dintre abscisa lui M_0 și abscisa lui M_n este

$$\frac{1}{x_n - \alpha} = \frac{1}{x_0 - \alpha} + nh$$

unde α este abscisa punctelor duble, iar h multiplicatorul substituției.

Pentru ordonate,

$$\frac{y_n - \alpha'}{y_n - \beta'} = k_n \frac{y_0 - \alpha'}{y_0 - \beta'}.$$

Trecând la coordonate curente, din prima relație avem:

$$n = \frac{x_0 - x}{h(x - \alpha)(x_0 - \alpha)},$$

din a doua,

$$n = \frac{1}{\mathrm{L}k} \mathrm{L}\left[\frac{y - \alpha'}{y - \beta'} : \frac{y_0 - \alpha'}{y_0 - \beta'}\right],$$

de unde, locul căutat este

$$\frac{y - \alpha'}{y - \beta'} = \mathrm{A}e^{\mathrm{B}\cdot\frac{x_0 - x}{x - \alpha}}, \tag{1}$$

cu

$$\mathrm{A} = \frac{y_c - \alpha'}{y_0 - \beta'}, \quad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{L}k}{h(x_0 - \alpha)}$$

II. *Omografia absciselor are punctele duble distincte, iar omografia ordonatelor le are confundate.*

Studiul se face ca mai sus, locul este exprimat printr'o ecuaţie ca (1), unde x este înlocuit cu y şi invers, iar constantele au altă semnificaţie.

III. *Ambele omografii au punctele duble confundate.*

Avem pentru $M_n(x, y)$

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x_0-\alpha} + nh$$

şi

$$\frac{1}{y-\alpha'} = \frac{1}{y_0-\alpha'} + nk$$

(α şi α' fiind abscisa şi ordonata punctelor duble ale celor două omografii, iar h şi k multiplicatorii).

Eliminând pe n, se găseşte locul

$$A(x-\alpha)(y-\alpha') + h(x-\alpha) - k(y-\alpha') = 0,$$

unde

$$A = \frac{k}{x_0-\alpha} - \frac{h}{y_0-\alpha'}.$$

Locul este o hiperbolă.

C. IONESCU-BUJOR.

48. *Asupra broşurii „Teoria Indicatorilor“.*

1°. Această broşură nebucurându-se până acum de niciun fel de critică, voiu face eu câteva observaţii.

1. Greşeli de corectură la pag. 16, (Nota III), 20 (III), 28 (17), 33 (20), 34 (20), 38 (25), 39 (38), 57 (40), 82 (1), 90 (prima relaţie din 12), uşor de observat.

2. Greşeli de numeraţie a formulelor la pag. 28 (17) în loc de 12 este 14; 37 (23) în loc de 17 este 21.

3. Demonstraţii incomplete la pag. 84 (3), fapt semnalat de D-l I. B. FLORESCU şi completat cu nota D-sale din G. M., XLVIII, Nota 58.

4. Demonstraţiile date în „Anexă“ vor fi completate cu o notă prezentată de către D-l Profesor D. POMPEIU la Academia Română.

Când voiu mai avea alte observaţii, le voiu face cunoscut.

Rog dar pe cetitorii buni voitori să-mi facă cunoscut orice observaţie, mulţumindu-le dinainte.

2⁰. *O observaţie în privinţa relaţiei:*

$$I_{A+B}(N) = I_A(N) + I_B(N) - \varepsilon.$$

Rugând pe D-l I. B. FLORESCU să-mi facă toate observaţiile asupra acestei broşuri, D-sa şi-a exprimat o oarecare îndoială asupra valoarei lui ε. Reluând deci calculul, am ajuns să constat că:

$$0 \leqslant |\varepsilon| \leqslant 2^{n-1} - 1.$$

In adevăr, urmărind raţionamentul dela pag. 38 şi 39, observăm că dacă $\Sigma \varepsilon_i = C_n^i$, unde n este numărul factorilor lui N, atunci:

$$\varepsilon = S_1 - S_2 \quad \text{unde}$$

$$S_1 = 1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots \quad \text{şi} \quad S_2 = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$$

Cum însă ε_i poate fi şi 1 şi 0, şi cum: $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$, în cazul că $\varepsilon_i = 1$, urmează că putem avea maximum lui ε ori S_1 ori $-S_2$, adică tocmai condiţia de mai sus.

Pentru numeroase cazuri însă de verificări am găsit $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

Mulţumesc D-lui I. B. FLORESCU pentrucă mi-a făcut cunoscut cele mai multe observaţii.

I. L.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREŞTI

Toate secţiile

Examen de admitere Septembrie 1943

Fizica experimentală. I. Două vase comunicante A şi B de secţiune S şi $\frac{S}{10}$ conţin apă. Se introduce în vasul A o sferă de lemn, având o suprafaţă S.

Să se calculeze variaţiunea de nivel a lichidului. Se va lua raza sferei $r = 11$ mm; densitatea lemnului 0,8 şi densitatea apei 1.

II. O bară de fier, lungă de 1 m are capătul A fix, iar la celălalt capăt B are fixată o lentilă convergentă. Lentila are o distanţă focală de 5 cm şi

planul ei principal se găseşte în prelungirea barei. Presupunem bara la 0° şi pe axul principal al lentilei, la o distanţă de 6 cm, un punct luminos P care are o imagine în P_1.

Incălzind bara la 100°, să se calculeze deplasarea imaginei.

Coeficientul de dilataţiune al fierului este 0,0000115.

III. Pe un hectar se găseşte un strat de zăpadă de 3 cm grosime. Câtă apă de ploaie, la o temperatură de 15°, ar trebui să cadă pentru a topi zăpada şi a o aduce la + 2°?

Se va lua densitatea zăpezii 0,78 şi căldura de topire a gheţei 80 calorii.

IV. Un conductor omogen având o rezistenţă de 8 omi, are forma unui cerc. Un curent de 4 amperi vine într'un punct A, a acestui cerc şi se duce printr'un punct B situat la 90° de primul. Se cere:

1°. Intensităţile curenţilor în cele două arcuri ACB şi ADB;

2°. Cantităţile de căldură degajate în aceste două arcuri de cerc pe secundă.

3°. Diferenţa de potenţial între punctele A şi B.

Se va lua pentru echivalentul mecanic al caloriei mici 4,17 Juli.

Obligator sunt două chestiuni la alegere.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXIV. Nr. 4. Iunie 1944. G. IUGA: O problemă de analiză nedeterminată. AL. ŢIGĂNOIU: Progresii mixte. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

PROF. DR. I. CUREA. Die Horizontalseismometer der neuen Erdbebenwarte in Timişoara. (Extras din Bulletin Scientiques de l'Ecole Polytechnique de Timişoara).

PROF. DR. I. CUREA. Infiinţarea unei staţiuni seismice la Timişoara. (Extras din *Revista Banatului*, vol. 4—6. Institutul de arte grafice G. MATHEIU, Timişoara).

M. GHERMĂNESCU. Trigonometria plană şi sferică. Biblioteca *Gazeta Matematică*, Nr. XXI. Tipografia Românească, Timişoara 1944.

Societatea *Gazeta Matematică* a hotărât ca pe lângă culegerele de probleme, pe care le-a tipărit până acum, să scoată şi tratate de matematici, care să complecteze cunoştinţele ce se dau în cursurile şcolare, care sunt ţinute a se limita la un anumit program.

Inceputul îl face volumul de *Trigonometrie* al D-lui Prof. M. GHERMĂNESCU şi care se înscrie la Nr. XXI al bibliotecii Societăţii.

Când mijloacele şi împrejurările vor îngădui se va păşi la tipărirea altor tratate.

G-L GH. BUICLIU.

sau $$(lx+my+nz)^2 \Sigma \frac{l}{\beta_0\gamma_0}\left(\frac{y}{\beta_0}-\frac{z}{\gamma_0}\right)$$
$$+(lx+my+nz)\Sigma\frac{mn}{\alpha_0}\left(\frac{y}{\beta_0}-\frac{z}{\gamma_0}\right)\left(\frac{y}{\beta_0}+\frac{z}{\gamma_0}-\frac{2x}{\alpha_0}\right)$$
$$-2lmn\left(\frac{x}{\alpha_0}-\frac{y}{\beta_0}\right)\left(\frac{y}{\beta_0}-\frac{z}{\gamma_0}\right)\left(\frac{z}{\gamma_0}-\frac{x}{\alpha_0}\right)=0.$$

Se observă că expresia este omogenă şi de gradul 3, fără termeni cubi, iar coeficientul lui xyz nul; are deci numai tremeni de forma x^2y; anume

$$\text{(II)}\quad \Sigma\left(\frac{l}{\beta_0}+\frac{m}{\alpha_0}\right)\left\{l\left[\frac{l}{\beta_0\gamma_0}-\frac{m}{\alpha_0\beta_0}+\frac{n}{\alpha_0\beta_0}\right]x^2y\right.$$
$$\left.-m\left[-\frac{l}{\beta_0\gamma_0}+\frac{m}{\alpha_0\gamma_0}+\frac{n}{\alpha_0\beta_0}\right]xy^2\right\}=0.$$

Pentru $l=m=n$ (Δ, dreapta dela infinit) şi dacă P este ortocentrul triunghiului se obţine cubica DARBOUX. Cubicele (II) îndeplinesc condiţiile din josul paginei 135 [1]), deci se bucură de proprietăţile menţionate acolo.

* * *

Locul intersecţiei AA', BB', CC' se obţine eliminând pe x, y, z între

$$\gamma:\beta=\left[\frac{lx}{\beta_0}+\left(\frac{m}{\gamma_0}+\frac{n}{\beta_9}\right)z\right]:\left[\frac{lx}{\gamma_0}+\left(\frac{m}{\gamma_0}+\frac{n}{\beta_0}\right)y\right]$$

şi analoagele; adică

$$\begin{vmatrix} l\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}-\frac{\beta}{\beta_0}\right) & \gamma\left(\frac{m}{\gamma_0}+\frac{n}{\beta_0}\right) & -\beta\left(\frac{m}{\gamma_0}+\frac{n}{\beta_0}\right) \\ -\gamma\left(\frac{n}{\alpha_0}+\frac{l}{\gamma_0}\right) & m\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}-\frac{\gamma}{\gamma_0}\right) & \alpha\left(\frac{n}{\alpha_0}+\frac{l}{\gamma_0}\right) \\ \beta\left(\frac{l}{\beta_0}+\frac{m}{\alpha_0}\right) & -\alpha\left(\frac{l}{\beta_0}+\frac{m}{\alpha_0}\right) & n\left(\frac{\beta}{\beta_0}-\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) \end{vmatrix}=0$$

deci

$$\text{(III).}\qquad \Sigma\, l^2\alpha^2\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}-\frac{\beta}{\beta_0}\right)=0$$

ecuaţia cubicei căutate — locul lui N. Pentru Δ dreapta dela infinit şi P ortocentrul se obţine cubica LUCAS. Dacă Δ este dreapta dela infinit dar P este arbitrar se obţine propoziţia dela pagina 158 a lucrării menţionate [1]).

N. N. MIHĂILEANU.

1) C. COŞNIŢĂ. *Coordonées barycentriques.*

NOTE MATEMATICE

44. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Când N_9 începe cu 5 se găsesc următoarele 82 soluţii.

N_9	N	N_9	N
503 241 867	4 529 176 803	548 017 623	4 932 158 607
506 782 143	4 561 039 287	548 076 123	4 932 685 107
507 681 342	4 569 132 078	563 480 721	5 071 326 489
507 681 423	4 569 132 807	563 481 072	5 071 329 648
513 286 470	4 619 578 230	563 847 021	5 074 623 189
513 768 420	4 623 915 780	563 847 102	5 074 623 918
517 680 342	4 659 123 078	563 870 214	5 074 831 926
520 341 768	4 683 075 912	563 870 241	5 074 832 169
520 634 781	4 685 713 029	563 871 024	5 074 839 216
520 834 671	4 687 512 039	564 023 871	5 076 214 839
521 063 478	4 689 571 302	564 238 107	5 078 142 963
521 083 467	4 689 751 203	564 371 802	5 079 346 218
521 468 730	4 693 218 570	564 372 018	5 079 348 162
521 678 043	4 695 102 387	564 702 183	5 082 319 647
521 763 480	4 695 871 320	564 807 213	5 083 264 917
523 176 804	4 708 591 236	567 083 214	5 103 748 926
524 376 180	4 719 385 620	567 218 043	5 104 962 387
532 167 804	4 789 510 236	567 380 421	5 106 423 789
532 168 470	4 789 516 230	567 381 042	5 106 429 378
532 867 014	4 795 803 126	567 420 381	5 106 783 429
534 216 807	4 807 951 263	567 421 038	5 106 789 342
534 217 068	4 807 953 612	573 426 081	5 160 834 729
536 724 081	4 830 516 729	573 426 108	5 160 834 972
536 724 108	4 830 516 972	574 263 801	5 168 374 209
537 421 680	4 836 795 120	574 360 812	5 169 247 308
537 462 180	4 837 159 620	576 034 218	5 184 307 962
537 462 801	4 837 165 209	576 082 134	5 184 739 206
537 462 810	4 837 165 290	576 230 481	5 186 074 329
541 328 067	4 871 952 603	576 231 048	5 186 079 432
542 173 680	4 879 563 120	576 248 301	5 186 234 709
546 178 203	4 915 603 827	576 248 310	5 186 234 790
546 187 023	4 915 683 207	576 382 140	5 187 439 260
546 812 073	4 921 308 657	578 204 631	5 203 841 679
547 306 812	4 925 761 308	578 210 463	5 203 894 167
547 628 130	4 928 653 170	582 376 401	5 241 387 609

1) Urmare la Nota 36 dela pag. 564 din acest volum.

N_9	N	N_9	N
582 376 410	5 241 387 690	587 021 634	5 283 194 706
582 430 671	5 241 876 039	587 046 231	5 283 416 079
582 431 067	5 241 879 603	587 104 623	5 283 941 607
584 637 201	5 261 734 809	587 132 640	5 284 193 760
584 637 210	5 261 734 890	587 214 630	5 284 931 670
586 721 304	5 280 491 736	587 413 260	5 286 719 340

G-L GH. BUICLIU.

45. *O precizare asupra problemei 5288.* Cazul $n = 2$ este cel care prezintă interes. La pag. 517, soluţia efectivă trebue îndreptată astfel:

(1) $B = m^2b \pm 2m + 1$, $c = mb \pm 1$, $a = 2b - m^2b \mp 2m - 2$

deoarece avem $c = mb \pm 1$, iar B şi a rezultă din

$$b(B - 1) + 1 = c^2 \quad ; \quad 2b - a = B + 1.$$

Ca problema să fie posibilă trebue ca $a > 0$, adică:

$$2b - m^2b \mp 2m - 2 > 0 \quad \text{sau} \quad mb^2 \pm 2m + 2 - 2b < 0.$$

Trinomul de gradul II în m are primul termen pozitiv, deci inecuaţia e satisfăcută când m ia valori între rădăcini, care sunt:

$$(2) \qquad m = \frac{\mp 1 \pm \sqrt{2b^2 - 2b + 1}}{b} = \mp \frac{1}{b} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{b-1}{b}\right)^2}.$$

Pentru $b = 1$ avem $m = 2$ (nu putem lua $m \leqslant 0$), însă atunci $a = 0$, căci semnele lui $\left(\mp \frac{1}{b}\right)$ şi $(\mp 2m)$ se corespund.

Lăsând la o parte acest caz avem totdeauna, deoarece una din rădăcinile (2) e negativă:

$$0 < m < \mp \frac{1}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{b-1}{b}\right)^2} < 1 + \sqrt{2},$$

deci m nu poate lua decât valorile 1 sau 2. Insă pentru $m = 2$ obţinem *a negativ* sau *nul*, ceea ce e fără sens.

Aşa dar $m = 1$ *e singura posibilitate.* Din (1) deducem $B = b + 1 \pm 2$ de unde se vede că nu putem lua semnul (—) căci atunci baza sistemului de numeraţie ar fi mai mică decât o

cifră însemnătoare. Voi lua deci în (1) pentru B semnul (+), iar pentru c și a semnele corespunzătoare și soluția problemei este:

(3) $\quad B = b + 3 \quad ; \quad c = b + 1 \quad ; \quad a = b - 4.$

Se observă că trebue să avem $b > 4$. Exemple:

$(B = 8) \quad 66^2 = 5555 - 11$; $\quad (B = 9) \quad 77^2 = 6666 - 22$;

$(B = 10) \quad 88^2 = 7777 - 33$; $\quad (B = 11) \quad 99^2 = 8888 - 44$ etc.

GH. D. SIMIONESCU.

46. *Asupra problemei 3497.* Această problemă a fost rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVII, pag. 323. Ea cere condiția de concurență a dreptelor ce unesc vârfurile unui triunghiu cu niște puncte anume alese pe mediatoarele triunghiului.

Dau în cele ce urmează o soluție elementară, pur geometrică.

Fie A', A_2 piciorul medianei AA' și al înălțimei AA_2. Luăm pe mediatoarea în A' lungimea

$$\overline{A'A''} = m$$

și notăm cu A_1 intersecția lui AA'' cu BC și cu h_a înălțimea ABC. Avem

$$\overline{A'A_2} = \frac{c^2 - b^2}{2a} \quad \text{și} \quad \frac{h_a}{m} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_2} - \overline{A_1A_2}}$$

de unde se deduce

$$\overline{A_1A_2} = \frac{h_a(c^2 - b)}{2a(h_a - m)},$$

$$\overline{A_1B} = \frac{a^2h_a - m(a^2 - b^2 + c^2)}{2a(h_a - m)}, \quad \overline{A_1C} = \frac{a^2h_a - m(a^2 + b^2 - c^2)}{2a(h_a - m)}$$

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = -\frac{2aS - m(a^2 - b^2 + c)}{2aS - m(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

La fel se calculează rapoartele $\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}, \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$. După teorema lui CEVA, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 vor fi concurente dacă

$$\frac{2aS - m(a^2 - b^2 + c^2)}{2aS - m(a^2 + b^2 - c^2)} \cdot \frac{2bS - n(a^2 + b^2 - c^2)}{2bS - n(-a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\cdot \frac{2cS - p(-a^2 + b^2 + c^2)}{2cS - p(a^2 - b^2 + c^2)} = 1$$

$$\therefore \quad 2S\Sigma mbc(b^2 - c^2) = \Sigma anp(b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)$$

Derivata întâia fiind tot timpul pozitivă, când x creşte dela $-\pi+\varepsilon$ la $+\pi-\varepsilon$, funcţia creşte continuu dela $-\infty$ la $+\infty$. Derivata a doua se anulează schimbând semnul pentru două valori cuprinse în intervalele $\left(-\pi+\varepsilon, -\frac{2\pi}{3}\right)$; $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi devine infinită schimbând semnul în vecinătatea lui $x=-\frac{\pi}{2}$. Tabloul variaţiei este deci următorul:

x	$-\pi+\varepsilon$	α		$-\frac{\pi}{2}$		0		β		$\frac{\pi}{2}$	$+\pi-\varepsilon$
v'	$+\infty$ +	+	+	∞	+	+	+		+		++ $+\infty$
v''	−	0	+	$\pm\infty$	−		−	0	+		+
v	$-\infty$ creşte			0	creşte	+1		creşte		$\sqrt[3]{2}$	creşte $+\infty$

şi ca urmare următoarea reprezentare (Fig. 2) a variaţiei funcţiei v:

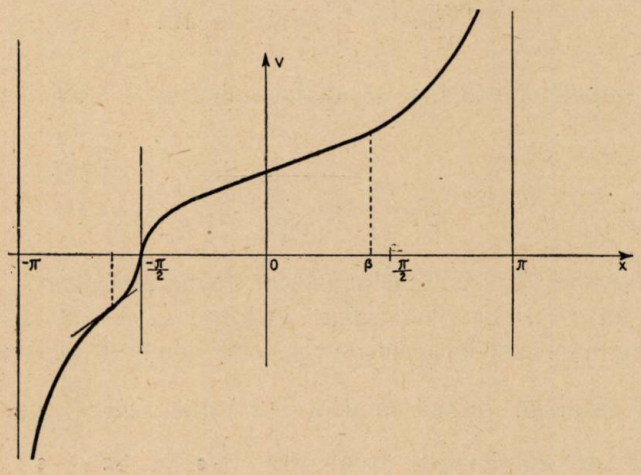


Fig. 2.

c) Să considerăm acum cazul $\lambda=-1$, adică $y=\sqrt[2n]{\frac{1-\sin x}{1-\cos x}}$.

Observăm însă că:

$$1 - \sin x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

şi

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2};$$

deci imediat:

$$\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1\right]^2.$$

Luând pentru y^n rădăcina cu semnul $+$, avem:

$$\sqrt[2n]{2}\,.\,y = \sqrt[n]{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1}.$$

Studiul variaţiei funcţiei y se deduce deci din studiul variaţiei funcţiei

$$u = \sqrt[n]{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1}. \qquad (7)$$

Observăm, ca în cazul precedent, că dacă n este *par*, studiul variaţiei lui u conduce la rezultate analoage cu $n = 2$, iar dacă n este *impar* la rezultate analoage cu cele obţinute pentru $n = 3$.

Să luăm în primul rând $n = 2$, adică $u = \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1}$. Intervalul de continuitate este dela $+\varepsilon$ la $2\pi - \varepsilon$; funcţia u fiind reală pentru subintervalul $\left(+\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ căci $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} \geqq +1$ pentru $0 < \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{4}$.

Calculând acum derivatele întâia şi a doua ale funcţiei u în raport cu x, avem:

$$4u'_x = -\frac{1+\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}}{\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-1}} < 0$$ în tot intervalul de existenţă;

$$16u''_{x^2} = \frac{1+\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}}{\sqrt{\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-1\right)^3}}\left[3\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1\right]$$ care se anulează pentru $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ în afară de intervalul de existenţă şi $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{2+\sqrt{7}}{3} > +1$, care dă pentru x o valoare x_0 cuprinsă în intervalul $\left(+\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ de existenţă.

Tabloul variaţiei funcţiei $u(x)$ periodică şi de perioada 2π, este următorul:

x	$+\varepsilon$		x_0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi-\varepsilon$
u'_x	$-\infty$	—	—	—	$-\infty$						
u''_{x^2}	+		0	—							
u	$+\infty$ descr.		infl.	descr.	0	i m a g i n a r					

şi ca urmare reprezentarea următoare (Fig. 3) în intervalul $(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$:

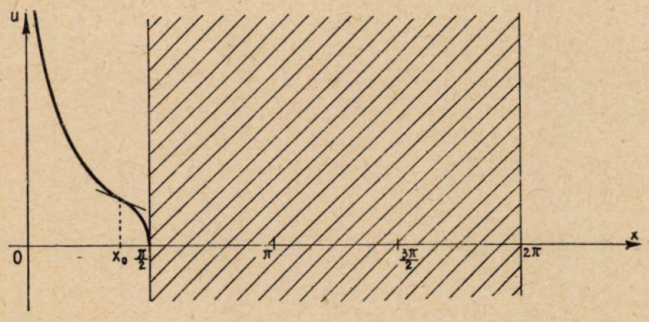


Fig. 3.

Să considerăm acum $n = 3$, adică $u = \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1}$.

Funcţiunea există în tot intervalul de continuitate $(+\varepsilon,\ 2\pi - \varepsilon)$. Formând primele două derivate avem:

$$6u'_x = -\frac{1 + \operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1\right)^2}} < 0,$$ deci funcţiunea u este continuu descrescătoare în tot intervalul $(+\varepsilon,\ 2\pi - \varepsilon)$; asemenea

$$18u''_{x^2} = +\frac{1 + \operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1\right)^5}}\left[2\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} - 3\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - 1\right]$$

care se anulează pentru valorile lui x cuprinse în intervalul considerat şi astfel ca:

$$\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Insemnând cu x_1 şi x_2 aceste valori, avem:

$$\varepsilon < x_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad \pi < x_2 < \frac{3\pi}{2},$$

deci pentru curba reprezentativă a variaţiei două puncte de inflexiune de ordonate $u(x_1)$ şi $u(x_2)$. Observăm în plus că derivata a doua trece prin valoarea *infinită* pentru $x = \frac{\pi}{2}$ schimbând semnul. Tabloul variaţiei funcţiei u în acest caz este deci următorul:

x	$+\varepsilon$	x_1		$\frac{\pi}{2}$	π	x_2	$\frac{3\pi}{2}$ $2\pi-\varepsilon$
u'	$-\infty$ —		—	$-\infty$	— — —		— — $-\infty$
u''	+	0	—	$\mp\infty$	+	0	—
u	$+\infty$ descr.	infl.	descr.	0	descreşte -1	infl.	descreşte $-\infty$ $-\frac{3}{\sqrt{2}}$

I. IONESCU. Povestiri technice. Vol. I. Bucureşti 1944. Editura *« Universul »*. Tipărită cu concursul D-lor Ing. ION VARDALA, AUREL IOANOVICI, D. STAN şi D-şoara ELENA GH. FILIPESCU.

VALER NOVACU. Introducere în Mecanica ondulatoare. Publicaţie a Institutului de Fizică, a Facultăţii de Ştiinţe din Timişoara. Monografie de Fizică I. Bucureşti.

CERERI

332. In *L'Initiation Mathématique de* C. A. LAISANT, neuvième édition 1910, întâlnim *« macédoine mathématique »*.
Care este semnificarea acestor cuvinte?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

DR. PAUL METH. Theorie der Planetenbewegung. Leipzig-Berlin 1912.

H. E. TIMERDING. Die Fallgesetze. Leipzig-Berlin 1912.
Donate de D-l Ing. I. IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3504. *Să se studieze variaţia funcţiei*

$$y = \sqrt[2n]{\frac{1 + \alpha \sin x}{1 + \alpha \cos x}}$$

n *fiind un număr întreg pozitiv, iar* α *un parametru. Cazuri particulare importante.*

O. N. ŢINO.

Observăm dela început că funcţia y este periodică, perioada sa fiind egală cu 2π, prin urmare este de ajuns a studia funcţia pentru un singur interval al valorilor lui x de lungimea 2π, pentru a cunoaşte variaţia ei în tot intervalul de existenţă. Observăm în

plus că intervalul de existenţă al funcţiei nu este acelaşi pentru orice valoare a lui α; de asemenea intervalul de continuitate al ei depinde de valorile lui $\alpha \neq 0$. Pentru înlesnirea calculului să punem $1/\alpha = \lambda$, adică să considerăm pe y sub forma:

$$y = \sqrt[2n]{\frac{\sin x + \lambda}{\cos x + \lambda}}. \tag{1}$$

Vom avea de considerat trei cazuri:

$$|\lambda| = 1 \quad ; \quad |\lambda| > 1 \quad \text{şi} \quad |\lambda| < 1.$$

Ca introducere vom studia cazul $\lambda = +1$, adică:

$$y = \sqrt[2n]{\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}}. \tag{2}$$

Având

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

şi

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2},$$

deducem:

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]^2,$$

deci luând pentru y^n rădăcina cu *semnul* $+$, avem:

$$y = \frac{1}{\sqrt[2n]{2}} \cdot \sqrt[n]{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \tag{3}$$

Din această expresie a lui y se vede că vom obţine variaţia funcţiei y studiind variaţia funcţiei

$$v = \sqrt[n]{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \tag{4}$$

In toate cazurile v este o funcţie periodică de x şi cum perioada lui $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ este π, este de ajuns să examinăm variaţia funcţiei v pentru un singur interval al valorilor lui x de lungime 2π. Cum funcţia $\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ devine infinită pentru $x=k\pi$ (k întreg impar), urmează că funcţia v are discontinuităţi infinite pentru $x=k\pi$ (k întreg impar), aşa dar vom studia variaţia ei pentru valorile lui x cuprinse în intervalul de continuitate $(-\pi+\varepsilon,\ +\pi-\varepsilon)$.

Pentru studiul variaţiei funcţiei v vom studia cazurile particulare tip: $n=2$ pentru cazurile n număr *par* şi $n=3$ pentru cazurile n număr *impar*.

a) Să considerăm întâi cazul $n=2$, adică

$$v=\sqrt{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \tag{5}$$

Observăm în primul rând că funcţia v este imaginară în intervalul $\left(-\pi+\varepsilon,\ -\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$; apoi că $4v'_x=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}>0.$

Aşadar x crescând în intervalul de realitate şi continuitate $\left(-\frac{\pi}{2},\ +\pi-\varepsilon\right)$, funcţia v creşte continuu dela 0 la $+\infty$. Derivata întâia fiind infinită la capetele intervalului, curba reprezentativă a variaţiei are un punct de inflexiune. In adevăr, calculând derivata a doua a lui v avem:

$$16v''_{x^2}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\left(3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right) \tag{6}$$

şi se anulează pentru $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$, dintre care numai rădăcina pozitivă cade în intervalul de existenţă, dând pentru $\frac{x}{2}$ o singură

valoare cuprinsă între 0 şi $\frac{\pi}{4}$, deci pentru x o valoare în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tabloul variaţiunii fiind următorul:

x	$-\pi+\varepsilon$	$-\frac{\pi}{2}$	0	β	$\frac{\pi}{2}$	$\pi-\varepsilon$
v'		$+\infty$	+		+	
v''			−	0	+	
v	imaginar	0	creşte $+1$	infl. creşte	$\sqrt{2}$ creşte	$+\infty$

avem reprezentarea (Fig. 1):

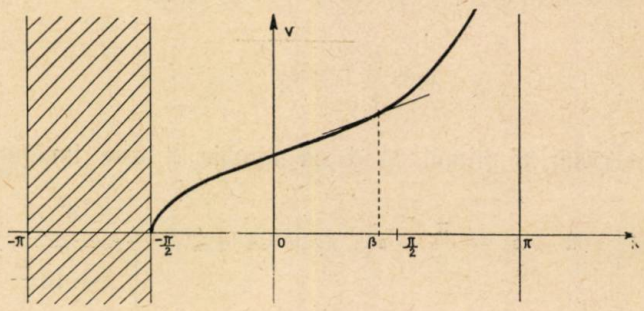


Fig. 1.

b) Să considerăm acum cazul $n = 3$, adică $v = \sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

In acest caz, intervalul de existenţă şi continuitate este:

$$(-\pi+\varepsilon \quad , \quad +\pi-\varepsilon).$$

Avem pentru derivatele întâia şi a doua:

$$(6) \qquad 6v'_x = \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}} > 0;$$

$$18v''_{x^2} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^5}}\left(2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right).$$

de unde urmează următoarea reprezentare (Fig. 4):

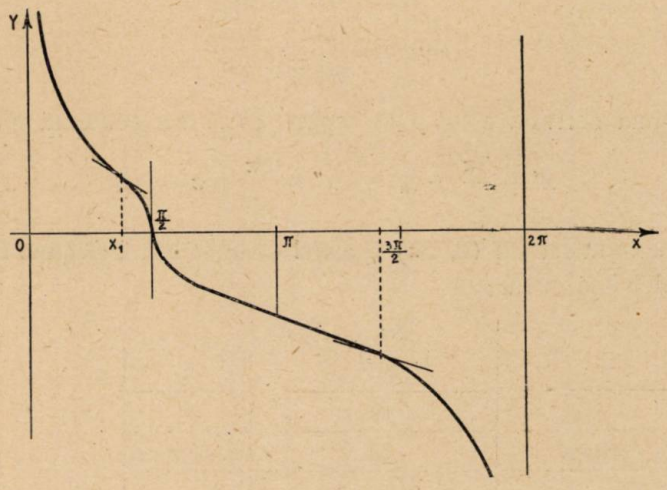


Fig. 4.

2. *Să presupunem acum cazul* $|\lambda| > 1$.

Observăm că $\sin x + \lambda$ şi $\cos x + \lambda$ în acest caz au semnul lui λ, deci, oricare ar fi n şi λ, funcţia

$$y = \sqrt[2n]{\frac{\sin x + \lambda}{\cos x + \lambda}} \qquad (|\lambda| > 1)$$

este reală şi continuă pentru toate valorile reale ale lui x. Cum însă y este o funcţie periodică cu perioada 2π, pentru a studia variaţia lui y, este deajuns a considera valorile lui x cuprinse într'un interval de lungimea 2π, de exemplu $(0, 2\pi)$. Calculând acum prima derivată a lui y în raport cu x, găsim:

$$y'_x = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2n}\left[\frac{\sin x + \lambda}{\cos x + \lambda}\right]^{\frac{1}{2n}-1} \cdot \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}}{(\cos x + \lambda)^2}.$$

Să presupunem de exemplu $\lambda > +1$. Ecuaţiunea $\sin z = -\frac{1}{\lambda\sqrt{2}}$ are două rădăcini cuprinse în intervalul considerat şi anume:

$$z' = \pi + z_0 \quad ; \quad z'' = 2\pi - z_0,$$

unde z_0 este rădăcina mai mică de cât $\frac{\pi}{2}$ a ecuației:

$$\sin z = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}};$$

deci prima derivată a lui y în raport cu x se anulează pentru:

$$x' = \frac{3\pi}{4} + z_0 \quad , \quad x'' = \frac{3\pi}{4} + \pi - z_0$$

cuprinse în intervalul $(0, 2\pi)$ și astfel că $x' < x''$. Formând tabloul variației lui y, avem:

x	0		$\frac{3\pi}{4} + z_0$		$\pi + \frac{3\pi}{4} - z_0$		2π
y'		+	0	—	0	+	
y		crește	M	descrește	m	crește	
	$\sqrt[2n]{\frac{\lambda}{1+\lambda}}$		$y_M = \sqrt[2n]{\frac{\lambda^2 + \sqrt{2\lambda^2-1}}{\lambda^2-1}}$		$y_m = \sqrt[2n]{\frac{\lambda^2 - \sqrt{2\lambda^2-1}}{\lambda^2-1}}$		$\sqrt[2n]{\frac{\lambda}{1+\lambda}}$

Curba reprezentativă (Fig. 5) a variației lui y prezintă cu siguranță între maximul și minimul lui y un punct de inflexiune a cărei abscisă x_1 o putem calcula calculând rădăcina derivatei a doua y'' cuprinsă în intervalul $\left(\frac{3\pi}{4} + z_0,\ \pi + \frac{3\pi}{4} - z_0\right)$.

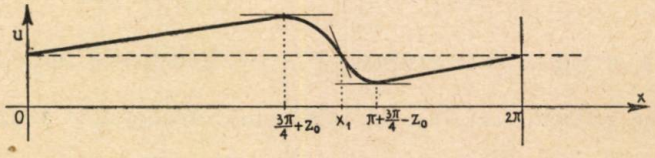


Fig. 5.

In cazul particular $n = 1$, $\lambda = 5$, avem

$$y_M = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad , \quad y_m = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad ; \quad y'(0) = y'(2\pi) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{30}},$$

care pot fi construite exact şi ca atare curba variaţiei poate fi trasată cu mai multă preciziune.

Cazul $\lambda < -1$, se tratează în acelaşi fel.

3. *Să presupunem acum* $|\lambda| < 1$. In acest caz, atât numărătorul $(\sin x + \lambda)$, cât şi numitorul $(\cos x + \lambda)$ se anulează; deci alegem pentru studiul variaţiei funcţiunii periodice y intervalul cuprins între două puncte de discontinuitate de lungimea 2π; cum însă $\cos x + \lambda$ se anulează de două ori într'un interval de lungimea 2π, vom avea de studiat funcţiunea y în două semiintervale de continuitate. Fie x_0 prima valoare cuprinsă în intervalul $(0, 2\pi)$ pentru care $\cos x_0 + \lambda = 0$; a doua valoare este evident $(2\pi - x_0)$ în acelaşi interval, iar prima valoare în intervalul următor va fi $(2\pi + x_0)$. Ca urmare vom considera semiintervalele de continuitate corespunzătoare intervalelor lui x următoare:

$$(x_0 + \varepsilon,\ 2\pi - x_0 - \varepsilon) \quad ; \quad (2\pi - x_0 + \varepsilon,\ 2\pi + x_0 - \varepsilon).$$

Presupunem în primul rând că $|\lambda| \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) Fie $0 < \lambda < +1$. Calculul primei derivate a lui y în raport cu x este acelaşi ca în cazul precedent şi avem:

$$y'_x = \frac{1}{2n} \cdot \left[\frac{\sin x + \lambda}{\cos x + \lambda}\right]^{\frac{2n}{1}-1} \cdot \frac{\lambda\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{(\cos x + \lambda)^2}.$$

Dacă $\lambda\sqrt{2} < 1$, derivata y'_x este tot timpul pozitivă şi prin urmare funcţia este continuu crescătoare în intervalele de existenţă. Prin urmare totul revine la a determina regiunile de realitate ale funcţiei, adică valorile lui x pentru care

$$\frac{\sin x + \lambda}{\cos x + \lambda} > 0$$

în intervalele

$$(x_0 + \varepsilon,\ 2\pi - x_0 - \varepsilon) \quad \text{şi} \quad (2\pi - x_0 + \varepsilon,\ 2\pi + x_0 - \varepsilon).$$

Fie x_1 valoarea lui x între 0 şi 2π pentru care $\sin x_1 + \lambda = 0$ şi fie x_2 a doua valoare care anulează numărătorul.

Cum $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, urmează că

$$\pi < x_1 < \frac{5\pi}{4}; \quad \text{iar} \quad 2\pi - \frac{\pi}{4} < x_2 < 2\pi;$$

asemenea

$$\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{3\pi}{4}, \quad \text{iar} \quad \frac{5\pi}{4} < 2\pi - x_0 < \pi + \frac{\pi}{2}.$$

Inşirând aceste valori într'un tablou şi studiind semnele numărătorului şi numitorului, vedem că funcţia y este reală în intervalele:

$$(x_1,\ 2\pi - x_0 - \varepsilon) \quad \text{şi} \quad (x_2,\ 2\pi + x_0 - \varepsilon).$$

In primul interval funcţia y creşte dela valoarea 0 la $+\infty$; în al doilea interval de asemenea dela 0 la $+\infty$, derivata devenind infinită la capetele acestor intervale.

Caz particular $\lambda = +\frac{1}{2}$.

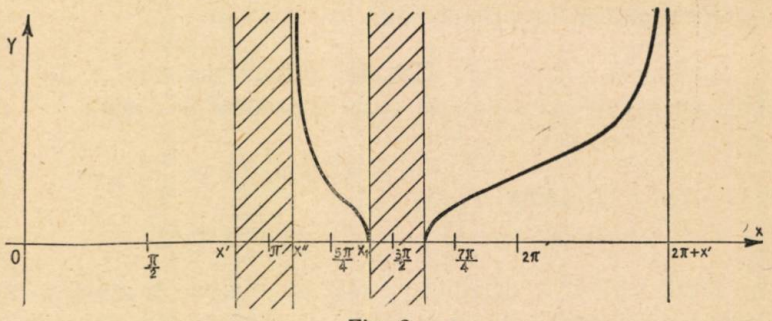


Fig. 6.

Dacă $1 < \lambda\sqrt{2} < \sqrt{2}$, derivata se anulează odată cu expresiunea $\lambda\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ şi anulându-se işi schimbă semnul.

Să luăm pentru uşurinţă la început valorile lui x în intervalul $(0,\ 2\pi)$. Observăm în primul rând că deoarece $-1 < -\lambda < -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

numitorul $\cos x + \lambda$ al expresiei de sub radical se anulează în intervalul $(0, 2\pi)$ pentru două valori ale lui x şi anume:

$$\frac{3\pi}{4} < x' < \pi \quad \text{şi} \quad \pi < x'' < \frac{5\pi}{4},$$

iar semnele lui sunt:

$$\cos x + \lambda > 0 \quad \text{pentru} \quad 0 < x < x';$$
$$\cos x + \lambda < 0 \quad \text{pentru} \quad x' < x < x'';$$
$$\cos x + \lambda > 0 \quad \text{pentru} \quad x'' < x < 2\pi.$$

Asemenea numărătorul $\sin x + \lambda$ se anulează pentru două valori ale lui x în intervalul $(0, 2\pi)$ şi anume:

$$\frac{5\pi}{4} < x_1 < \frac{3\pi}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{3\pi}{2} < x_2 < \frac{7\pi}{4},$$

iar semnele lui sunt:

$$\sin x + \lambda > 0 \quad \text{pentru} \quad 0 < x < x_1;$$
$$\sin x + \lambda < 0 \quad \text{pentru} \quad x_1 < x < x_2;$$
$$\sin x + \lambda > 0 \quad \text{pentru} \quad x_2 < x < 2\pi.$$

Deducem din aceste rezultate că funcţiunea y este reală în subintervalele

$$(0, x') \; ; \; (x'', x_1) \quad \text{şi} \quad (x_2, 2\pi).$$

Acum observăm încă că având $\frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda < 1$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\lambda\sqrt{2}}$ este cuprins între -1 şi $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, prin urmare $x + \frac{\pi}{4}$ are două valori, una

$$\frac{5\pi}{4} < x_3 + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \quad \text{şi alta} \quad \frac{3\pi}{2} < x_4 + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4},$$

care dau două valori pentru x anulând derivata întâia şi anume:

$$\pi < x_3 < \frac{5\pi}{4} \quad \text{şi} \quad \frac{5\pi}{4} < x_4 < \frac{3\pi}{2}.$$

Cele două valori de x care anulează derivata, fiind în intervalul $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ca şi x'', x_1, pot fi situate ambele, numai una sau

niciuna în intervalul de existenţă al funcţiei y, adică între x'' şi x_1 şi anume dacă x_3 este la dreapta sau la stânga lui x'', de altă parte dacă x_4 este la stânga sau la dreapta lui x_1.

Să punem în acest scop:

$$u(x) \equiv \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}.$$

Avem

$$u(x_3) = 0 \quad \text{şi} \quad u(x_4) = 0.$$

Funcţiunea $u(x)$ fiind o funcţiune continuă de x, este deajuns să calculăm semnul lui $u(x)$ pentru valorile particulare

$$x = \pi \quad , \quad x = x'' \quad , \quad x = x_1 \quad , \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Avem în primul rând:

$$u(\pi) \equiv \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}(1-\lambda) > 0,$$

căci $\lambda < 1$ prin ipoteză. Asemenea avem:

$$u\left(\frac{3\pi}{2}\right) \equiv \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} = \sin\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}(1-\lambda) > 0.$$

Să calculăm acum $u(x'')$. Observăm că avem:

$$\cos x'' = -\lambda \quad \text{şi} \quad \sin x'' = -\sqrt{1-\lambda^2},$$

găsim:

$$u(x'') \equiv \sin\left(x'' + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x'' + \cos x'' + \frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\left[1 - \lambda^2 - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda\sqrt{2}}\left[\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda\right] = \frac{2\sqrt{1-\lambda^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)}{\lambda\sqrt{2}\left[\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\right]}$$

şi cum $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$, urmează că $u(x'') < 0$. Asemenea observând că

$$\sin x_1 = -\lambda \quad \text{şi} \quad \cos x_1 = -\sqrt{1-\lambda^2},$$

avem:

$$u(x_1) \equiv \sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x_1 + \cos x_1 + \frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}(1 - \lambda^2 - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}) = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda\sqrt{2}}(\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda) < 0.$$

Aşa dar, având $u(\pi) > 0$ şi $u(x'') < 0$ rădăcina x_3 este cuprinsă în intervalul (π, x''), adică în regiune de neexistenţă a funcţiei; asemenea având $u(x_1) < 0$ şi $u\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$, a doua rădăcină x_4 este cuprinsă în intervalul $\left(x_1, \frac{3\pi}{2}\right)$, deci asemenea în regiune de neexistenţă a funcţiei. Astfel, în fiecare din cele trei regiuni de existenţă ale funcţiei y, *derivata ei* y'_x *păstrează un semn constant.* Cum $u(\pi) > 0$, urmează că $y'_x > 0$ în intervalul $(0, x' - \varepsilon)$, deci funcţia creşte continuu în acest interval dela $\sqrt[2n]{\frac{\lambda}{1-\lambda}}$ la $+\infty$. In intervalul $(x'' + \varepsilon, x_1)$ derivata fiind constant negativă, funcţia y descreşte continuu dela $+\infty$ la zero. In fine, în intervalul $(x_2, 2\pi)$ derivata fiind constant pozitivă, funcţia y creşte continuu dela *zero* până la $\sqrt[2n]{\frac{\lambda}{1+\lambda}}$.

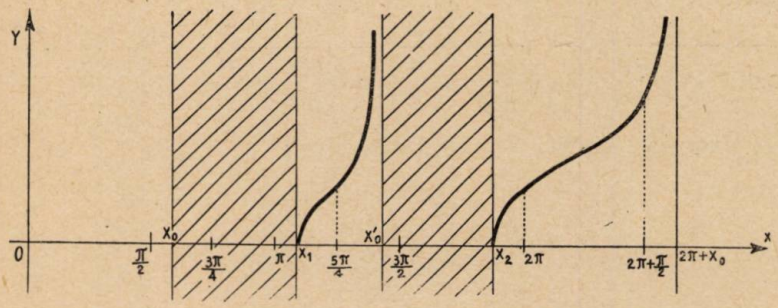


Fig. 7.

Derivata devine infinită pentru valorile $x = x'$, $x = x''$, $x = x_1$ şi $x = x_2$. Acum, folosind periodicitatea funcţiei y, putem înlocui primul interval $(0, x' - \varepsilon)$ prin intervalul $(2\pi, 2\pi + x' - \varepsilon)$ şi în consecinţă reprezenta variaţia funcţiei y în intervalul $(x' + \varepsilon, 2\pi + x' - \varepsilon)$ (Fig. 7).

In cazuri numerice corespunzătoare pot fi calculate abscisele punctelor de inflexiune, adică valorile lui x pentru care derivata a doua y'' se anulează schimbând semnul, cuprinse în intervalele de mai sus; existența acestor puncte de inflexiune fiind pusă în evidență de tangentele la capetele intervalelor.

Cazul λ negativ se tratează în mod analog.

4. Să studiem acum cazul particular interesant pus în evidență de discuția de mai sus, anume:

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Să luăm de exemplu

$$\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Funcția devine în acest caz:

$$y = \sqrt[2n]{\frac{\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}}};$$

dar

$$\frac{\sin x + \sin\frac{\pi}{4}}{\cos x + \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right),$$

deci expresia funcției y este următoarea:

$$y = \sqrt[2n]{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}.$$

Pentru ca funcția y să fie reală, trebue ca $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ să fie pozitivă, cu alte cuvinte tg fiind o funcție periodică de perioadă egală cu π este deajuns să studiem variația lui y pentru valorile lui x pentru care $\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ variază dela 0 la $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$; prin

urmare x dela $-\frac{\pi}{4}$ la $\frac{3\pi}{4} - \varepsilon'$. Calculând derivata lui y avem:

$$y'_x = \frac{1}{4n}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right]^{1-\frac{1}{2n}} \cdot \left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right] > 0;$$

deci funcţiunea y creşte continuu dela 0 la $+\infty$. In acelaşi fel se studiază cazul când $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Observare. O soluţie de luat în considerare a fost dată de D-l G. G. CONSTANTINESCU (pe când era student în Bucureşti) care a sistematizat studiul problemei destul de bine, discuţia fiind însă incompletă şi câteva erori care l-au condus la reprezentări evident eronate.

O. Ň. Ţ.

PROBLEMA 4357. *Fie* p *perimetrul şi* s *suma diagonalelor unui poligon de* n *laturi. Să se arate că*

$$s \leqq \begin{cases} \frac{n^2-8}{8}p & , \ n \text{ par}, \\ \frac{n^2-9}{8}p & , \ n \text{ impar}. \end{cases}$$

Să se arate că dacă poligonul este convex avem şi

$$s \geqq \frac{n-3}{2}p.$$

TIB. POPOVICIU.

Soluţia. Să notăm cu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vârfurile poligonului şi cu $a_{i,j}$ lungimea segmentului care uneşte punctele A_i, A_j. Avem atunci

$$p = a_{1,2} + a_{2,3} + \ldots + a_{n,1}.$$

Poligonul are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale care se împart în grupe după numărul minim de laturi subîntinse de ele. Laturile în număr minim subîntinse de diagonala $A_i A_j$ sunt $(i+1<j)$,

$$A_i A_{i+1},\ A_{i+1} A_{i+2}, \ldots,\ A_{j-1} A_j, \quad \text{dacă} \quad j-i \leqq \frac{n}{2},$$

$$A_j A_{j+1},\ A_{j+1} A_{j+2}, \ldots,\ A_n A_1,\ A_1 A_2, \ldots,\ A_{i-1} A_i, \text{ dacă } j-i \geqq \frac{n}{2}.$$

Dacă punem $k = \frac{n}{2}$ sau $k = \frac{n-1}{2}$ după cum n este par sau impar, numărul total al grupurilor este $k-1$ corespunzând valorilor 2, 3, ..., k ale numărului minim de mai sus. Fiecare grupă conține n diagonale, afară de ultima care, dacă n este par, nu conține decât $\frac{n}{2}$ diagonale. Vom nota cu $s_2, s_3, \ldots, s_k$ suma diagonalelor respectiv din cele $k-1$ grupe considerate.

Să ne reamintim acum proprietatea bine cunoscută că o latură a unui poligon este cel mult egală cu suma celorlalte laturi, egalitatea având loc dacă și numai dacă toate vârfurile sunt pe latura considerată (și *nu* pe prelungirile acestei laturi). O diagonală din grupa i subîntinde i laturi consecutive și o latură e subîntinsă, în felul arătat, de i din aceste diagonale. Rezultă că

$$s_i \leqq ip, \tag{1}$$

formulă care este adevărată pentru toate valorile posibile ale lui i, afară de $i = k$ când n este par. In acest din urmă caz fiecare din diagonale s'a numărat de două ori deci formula (1) trebue înlocuită cu următoarea

$$s_k \leqq \frac{k}{2} p. \tag{1'}$$

Avem acum

$$(2)\quad \begin{cases} s = \sum_{i=2}^{k} s_i \leqq \left(2+3+\ldots+k-1+\frac{k}{2}\right) p = \\ = \frac{k^2-2}{2} p = \frac{n^2-8}{8} p, \ n \text{ par}, \\ s = \sum_{i=2}^{k} s_i \leqq (2+3+\ldots+k)\, p = \frac{(k-1)\,(k+2)}{2} p = \\ = \frac{n^2-9}{8}, \ p, \ n \text{ impar}, \end{cases}$$

și prima inegalitate din enunț este demonstrată.

Pentru ca în (1) (sau (1')) să avem egalitate e necesar întâi ca toate vârfurile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să fie pe o dreaptă. In plus e necesar și suficient ca:

1°. Punctele $A_{j+1}, A_{j+2}, \ldots, A_{j+i-1}$ să aparțină segmentului $A_j A_{j+i}$, pentru $j = 1, 2, \ldots, n-i$.

2°. Punctele $A_{j+1}, A_{j+2}, \ldots, A_n, A_1, \ldots, A_{j+i-n-1}$ să aparţină segmentului $A_{j+i-n}\ A_j$, pentru $j = n - i + 1, n - i + 2, \ldots, n$ (A_0 se suprimă din şir).

O discuţie simplă ne arată că *condiţia necesară şi suficientă ca în* (1) (*sau în* (1')) *să avem egalitate este ca, înafară de o permutare circulară şi de sens, punctele* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *să fie pe o dreaptă în ordinea crescătoare a indicilor iar primele* i *puncte precum şi ultimele* i *puncte să fie confundate.*

Deducem de aci că *condiţia necesară şi suficientă ca în* (2) *să avem egalitate este ca, înafară de o permutare circulară a indicilor, primele* k *puncte precum şi ultimele* k *puncte ale şirului* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *să fie confundate iar, dacă* n *este impar, punctul* A_{k+1} *să aparţină segmentului* $A_k A_{k+2}$.

Să ne ocupăm acum de a doua inegalitate din enunţ.

Se ştie (sau se verifică uşor) că suma diagonalelor unui patrulater *convex* ABCD este cel puţin egală cu suma a două laturi opuse,

$$AC + BD \geqq AB + CD$$

şi pentru ca să avem aici egalitate este necesar ca punctele A, B, C, D să fie pe o dreaptă.

Să luăm acum două diagonale consecutive $A_j\ A_{j+i}$, $A_{j+1}\ A_{j+i+1}$ din grupul i (se ia bine înţeles $A_{n+r} = A_r$). Patrulaterul $A_j\ A_{j+1}\ A_{j+i}\ A_{j+i+1}$ este convex, deci

$$a_{j,\,j+i} + a_{j+1,\,j+i+1} \geqq a_{j,\,j+1} + a_{j+i,\,j+i+1}, \tag{3}$$

de unde deducem, adunând membru cu membru,

$$s_i \geqq p, \tag{4}$$

formulă care este adevărată pentru toate valorile posibile ale lui i, afară de $i = k$ pentru n par când trebue să o înlocuim, pentru aceleaşi motive ca mai sus cu următoarea

$$s_i \geqq \frac{p}{2}. \tag{4'}$$

Deducem acum

$$\begin{cases} s = \sum_{i=2}^{k} s_i \geqq \dfrac{2k-3}{2}\, p = \dfrac{n-3}{2}\, p, & n \text{ par}, \\ s = \sum_{i=2}^{k} s_i \geqq (k-1)\, p = \dfrac{n-3}{2}\, p, & n \text{ impar}, \end{cases} \tag{5}$$

care demonstrează a doua inegalitate din enunţ.

Pentru ca în (4) (sau în (4')) să avem egalitate e necesar întâi ca toate vârfurile să fie pe o dreaptă. Să presupunem că A_1, A_l sunt vârfurile extreme pe dreaptă. Convexitatea care atunci în plus ca punctele $A_2, A_3, \ldots, A_{l-1}$ să aparţină segmentului $A_1 A_l$ în ordinea crescătoare a indicilor, iar $A_{l+1}, A_{l+2}, \ldots, A_n$ să aparţină aceluiaşi segment în ordinea descrescătoare a indicilor, convenind ca sensul pozitiv pe dreaptă să fie dela A_1 la A_l. Dacă acum scriem că în (3) avem egalitate pentru toate valorile lui j găsim uşor că toate punctele $A_2, A_3, \ldots, A_{l-1}, A_{l+1}, \ldots, A_n$ trebue să fie confundate.

In definitiv deci *condiţia necesară şi suficientă ca în* (4), (4') *sau* (5) *să avem egalitate este ca* $n-2$ *vârfuri ale poligonului să fie confundate într'un punct al segmentului determinat de celelalte două vârfuri.*

Observări. 1°. Limitaţiile găsite sunt cele mai bune posibile. Limitaţia superioară a lui s nu se poate ameliora dacă se introduce restricţia de convexitate a poligonului, după cum rezultă din demonstraţia de mai sus. In ce priveşte limitaţia inferioară, ea nu convine în cazul unui poligon oarecare. Limitaţia inferioară în cazul unui poligon *oarecare* constitue problema 5766 (G. M., XLVIII, p. 335) propusă de D-l IOAN B. FLORESCU.

2°. Ne putem pune evident problema limitării inferioare a sumelor s_i în cazul unui poligon oarecare. In cazul când i *nu este prim cu* n, limitaţia se scrie

$$s_i \geqq 0,$$

ceea ce se vede imediat considerând poligonul în care toate vârfurile A_l, în care indicii l sunt congruenţi (mod i), sunt confundate. Dacă i *este prim cu* n, limitaţia inferioară a lui s_i rezultă din inegalităţile (1) în felul următor. Să considerăm poligonul $A_1 A_{i+1} A_{2i+1} \ldots$ care se obţine unind succesiv vârfurile poligonului dat din i în i. Să notăm cu $p' = s_1', s_2', s_3', \ldots, s_k'$ sumele $p = s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ corespunzătoare acestui poligon. Avem atunci $p' = s_i$ şi $s_j' = s_{j'}$, unde j' este valoarea absolută a reziduului minim a lui ji (mod n). In particular există un indice r_i, $2 \leqq r_i \leqq k$ şi unul singur pentru care $r_i i \equiv \pm 1$ (mod n) şi avem atunci $s_{r_i}' = p$. Dar din (1) rezultă că $s_{r_i}' \leqq r_i p'$, deci

$$s_i \geqq \frac{1}{r_i} p,$$

care este limitaţia cerută.

Notă. Deşi problema a fost propusă de aproape 10 ani, nu s'a primit nicio soluţie dela corespondenţi.

T. P.

PROBLEMA 5570. *Să se rezolve în numere întregi sistemul:*

$$E\left(\frac{x+y}{z}\right)=5 \quad ; \quad E\left(\frac{x-y}{z}\right)=2 \quad ; \quad E\left(\frac{x\cdot y}{z^2}\right)=6$$

unde $E(i)$ *înseamnă întregii lui* i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

In articolul publicat la pag. 116 din acest volum, am arătat că:

$$E\left(\frac{x+y}{z}\right)=E\left(\frac{x}{z}\right)+E\left(\frac{y}{z}\right)+\varepsilon_1$$

$$E\left(\frac{x-y}{z}\right)=E\left(\frac{x}{z}\right)-E\left(\frac{y}{z}\right)-\varepsilon_2$$

$$E\left(\frac{x\cdot y}{z^2}\right)=E\left(\frac{x}{z}\right).E\left(\frac{y}{z}\right)+E\left[\frac{r_x}{z}E\left(\frac{y}{z}\right)+\frac{r_y}{z}E\left(\frac{x}{z}\right)\right]$$

unde ε_1 şi ε_2 poate lua valorile 0 sau 1, iar r_x reprezintă restul diviziunii lui x prin z şi r_y restul diviziunii lui y prin z.

Egalând deci cu valorile numerice din problemă, obţinem:

$$E\left(\frac{x}{z}\right)=3 \quad \text{sau} \quad 4 \quad \text{şi} \quad E\left(\frac{y}{z}\right)=1.$$

Deci găsim ecuaţiile:

$$x=3z+r_x \quad \text{sau} \quad x=4z+r_x \quad , \quad y=z+r_y\,.$$

Introducând aceste valori în a treia egalitate, obţinem:

$$E\left(\frac{r_x+3r_y}{z}\right)=3 \quad \text{şi} \quad E\left(\frac{r_x+4r_y}{z}\right)=2.$$

De unde:

$$r_x+3r_y=3z+i \quad \text{şi} \quad r_x+4r_y=2z+i$$

unde $0\leqslant i<z$.

Cu acestea obţinem ecuaţiile:

$$x+3y=9z+i \quad \text{şi} \quad x+4y=10z+i$$

Aceasta ne dă condiţiunile:

$$3z \leqslant x < 4z \quad \text{sau} \quad 4z \leqslant x < 5z \quad \text{şi} \quad z \leqslant y < 2z$$

De asemenea:

$$9z \leqslant x + 3y < 10z \quad \text{şi} \quad 10z \leqslant x + 4y < 11z.$$

Aceste condiţiuni ne dau soluţiile sistemului de ecuaţii. Iată şi câteva valori numerice:

z	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	...
y	5	6	7	8	9	9	10	10	11	12	...
x	12	16	15	19	19	24	22	30	28	26	
		17				25	23		29	27	...
						26	24		30		
							25				

Notă. La această problemă am primit o amplă soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU, care a început prin a analiza şi valorile negative ale numerelor x, y, z, ajungând la soluţia că este suficient a cerceta soluţiile pozitive. Apoi, dacă x, y, z reprezintă soluţii şi $k.x$, $k.y$, $k.z$, vor fi soluţii k fiind un întreg. D-sa a rezolvat problema prin studiul unor trinoame de gradul al II-lea.

Alte soluţiuni cu totul parţiale au fost date de D-nii: M. MANOLACHE, D. MUSCELEANU şi M. GH. POPESCU.

I. L.

PROBLEMA 5656. *Să se elimine* u *şi* v *între relaţiile*

$$\alpha(1-u^2)(1+v^2)+\beta(1+u^2)(1-v^2)+\gamma(1+u^2)(1+v^2)=0,$$

$$\alpha u(1+v^2)+\beta v(1+u^2)=0 \quad , \quad a\,\text{arctg}u - b\,\text{arctg}v = 0,$$

unde α, β, γ, a, b, *sunt constante date.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: GEORGE M. NICOLAE (Colegiul Naţional „Carol I", Craiova) şi DIM. TIGRAN (Liceul Naţional, Iaşi).

Impărţind primele două relaţii prin $(1+u^2)(1+v^2)$, acestea devin

$$\alpha\frac{1-u^2}{1+u^2}+\beta\frac{1-v^2}{1+v^2}+\gamma=0 \quad , \quad \frac{\alpha u}{1+u^2}+\frac{\beta v}{1+v^2}=0$$

sau, notând $u = \text{tg}\varphi$, $v = \text{tg}\psi$,

$$(1) \quad \alpha\cos 2\varphi+\beta\cos 2\psi+\gamma=0 \quad , \quad \alpha\sin 2\varphi+\beta\sin 2\psi=0.$$

A doua relație (1) se mai poate scrie succesiv

$$\alpha^2 \sin^2 2\varphi = \beta^2 \sin^2 2\psi \quad , \quad \alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 2\varphi = \beta^2 - \beta^2 \cos^2 2\psi,$$

$$\alpha^2 \cos^2 2\varphi - \beta^2 \cos^2 2\psi = \alpha^2 - \beta^2$$

sau încă, ținând seama de prima (1),

$$\alpha \cos 2\varphi - \beta \cos 2\psi = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma}$$

Din aceasta și din prima relație (1) se deduce

$$(3) \qquad \cos 2\varphi = \frac{\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\gamma} \quad , \quad \cos 2\psi = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma}.$$

Mai departe, ținând seama de formulele

$$u = \operatorname{tg}\varphi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi}} \quad , \quad v = \operatorname{tg}\psi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\psi}{1 + \cos 2\psi}},$$

ultima relație dată devine

$$(4) \qquad a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)}{(\alpha + \beta - \gamma)(-\alpha + \beta + \gamma)}}$$

$$\pm b \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(\alpha + \beta + \gamma)(-\alpha + \beta + \gamma)}{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)}} = 0,$$

care constitue astfel rezultatul eliminării cerute.

Notă. Dacă din (3), în loc să calculăm $\operatorname{tg}\varphi$ și $\operatorname{tg}\psi$, deducem

$$\varphi = \frac{1}{2} \arccos \frac{\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\gamma} \quad , \quad \psi = \frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma},$$

atunci obținem rezultatul eliminării sub forma

$$(5) \qquad a \arccos \frac{\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\gamma} - b \arccos \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma} = 0.$$

Sub această formă, au găsit rezultatul eliminării D-nii: Sublocot. CONST. PANTELIMON și I. ST. TEODORESCU.

2. D-l I. GR. ENĂCHESCU a găsit un rezultat puțin deosebit de (5).

3. D-l P. P. DRĂGHICESCU a considerat a și b întregi și a folosit formula care dă cosinusul multiplului unui arc.

M. G.

PROBLEMA 5675. *Pe o dreaptă se dau punctele* P, Q, A, B, C, D. *Cunoscând valoarea rapoartelor în care fiecare din ultimele patru puncte împarte segmentul* PQ, *se cere să se exprime valoarea raportului anarmonic* (ABCD), *în funcţiune numai de aceste rapoarte.*

ŞT. S. MIHĂIESCU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Fie:

$$\frac{AP}{AQ} = a \quad ; \quad \frac{BP}{BQ} = b \quad ; \quad \frac{CP}{CQ} = c \quad ; \quad \frac{DP}{DQ} = d.$$

Rezultă:

$$\frac{AP}{PQ} = \frac{a}{1-a} \quad ; \quad \frac{BP}{PQ} = \frac{b}{1-b} \quad ; \quad \frac{CP}{PQ} = \frac{c}{1-c} \quad ; \quad \frac{DP}{PQ} = \frac{d}{1-d}.$$

Deci:

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{PA - PC}{PB - PC} : \frac{PA - PD}{PB - PD}$$

$$= \frac{\dfrac{a}{a-1} - \dfrac{c}{c-1}}{\dfrac{b}{b-1} - \dfrac{c}{c-1}} : \frac{\dfrac{a}{a-1} - \dfrac{d}{d-1}}{\dfrac{b}{b-1} - \dfrac{d}{d-1}}.$$

Efectuând calculele se găseşte:

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

Soluţiuni analoage s'au primit dela D-nii: SLT. CONSTANTIN PANTELIMON (Artileria antiaeriană, Ploeşti), SLT. M. AL. VASILESCU-STABU şi EUGEN N. WEGENER.

Observaţiuni: 1°. Niciunul din corespondenţi nu a remarcat că expresiunea obţinută, păstrează aceeaşi formă, oricare ar fi poziţia punctelor ABCD faţă de segmentul PQ.

2°. Enunţul problemei este cunoscut şi în *Géométrie analitique* par NIEWENGLOWSKI, vol. I, pag. 99.

ŞT. S. M.

PROBLEMA 5716. *Să se reconstituiască împărţirea*

$$\frac{abc}{hij} : def = g$$

unde hij *este restul împărţirii iar a, b, c, . . . i, j sunt cifre diferite între ele. Exemple:*

$$\frac{940}{253} : 687 = 1 \quad ; \quad \frac{940}{287} : 653 = 1 \; ; \; .$$

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Relaţia din enunţ se mai scrie

$$abc = g \times def + hij$$

cu condiţia ca restul *hij* să fie mai mic de cât împărţitorul *def*, deci

$$hij < def < abc \quad \therefore \quad h < d < a.$$

Dăm lui g pe rând valorile $1, 2, \ldots 9$ şi apoi procedăm prin încercări. Vom da aci un exemplu de astfel de încercări şi apoi vom înscrie tabloul rezultatelor obţinute.

Fie $g = 2$ şi $f = 1$. Avem

$$abc = 2 \times de1 + hij = 20 \times de + 2 + hij$$

$$\therefore \qquad c - j = 2 \quad \text{sau} \quad 10 + c - j = 2$$

Eliminând cifrele 1 şi 2, deja întrebuinţate, putem avea pentru c şi j:

c	0	5	6	7	8	9
j	8	3	4	5	6	7

.

Luăm pe rând fiecare din aceste grupe. Fie grupa

$$c = 7 \quad , \quad j = 5$$

Vom avea

$$ab7 = 2 \times de1 + hi5 = 20 \times de + 2 + 10hi + 5$$

$$\therefore \quad ab = 2 \times de + hi.$$

Acum dăm lui e pe rând valorile rămase, de exemplu $e = 9$. Avem

$$ab = 2 \times d9 + hi = 20d + 18 + hi$$

$$\therefore \quad b - i = 8 \quad \text{sau} \quad 10 + b - i = 8$$

deci

b	4	6
i	6	8

.

Dacă luăm

$$b = 4 \ , \ i = 6$$

şi procedăm la fel găsim

$$a = 8 \ , \ d = 3 \ , \ h = 0$$

şi deci soluţia

$$847 = 2 \times 391 + 065.$$

Procedând pe această cale sau pe căi analoage am găsit următoarele 92 soluţii scrise pe grupe după ordinea crescândă a lui g şi în fiecare grupă după ordinea crescândă a lui abc:

364=1×289 + 075 ; 364=1×285 + 079 ; 364=1×279 + 085 ; 364=1×275 + 089
427=1×369 + 058 ; 427=1×368 + 059 ; 427=1×359 + 068 ; 427=1×358 + 069
526=1×489 + 037 ; 526=1×487 + 039 ; 526=1×439 + 087 ; 526=1×437 + 089
562=1×489 + 073 ; 562=1×483 + 079 ; 562=1×479 + 083 ; 562=1×473 + 089
607=1×359 + 248 ; 607=1×358 + 249 ; 607=1×349 + 258 ; 607=1×348 + 259
724=1×689 + 035 ; 724=1×685 + 039 ; 724=1×639 + 085 ; 724=1×635 + 089
742=1×689 + 053 ; 742=1×683 + 059 ; 742=1×659 + 083 ; 742=1×653 + 089
823=1×769 + 054 ; 823=1×764 + 059 ; 823=1×759 + 064 ; 823=1×754 + 069
805=1×479 + 326 ; 805=1×476 + 329 ; 805=1×429 + 376 ; 805=1×426 + 379
904=1×578 + 326 ; 904=1×576 + 328 ; 904=1×528 + 376 ; 904=1×526 + 378
940=1×578 + 362 ; 940=1×572 + 368 ; 940=1×568 + 372 ; 940=1×562 + 378
940=1×687 + 253 ; 940=1×683 + 257 ; 940=1×657 + 283 ; 940=1×653 + 287

385=2×169 + 047 ; 387=2×146 + 095 ; 439=2×187 + 065 ; 475=2×196 + 083
685=2×319 + 047 ; 687=2×314 + 059 ; 765=2×308 + 149 ; 814=2×379 + 056
845=2×369 + 107 ; 847=2×391 + 065 ; 856=2×391 + 074 ; 869=2×417 + 035
906=2×374 + 158 ; 953=2×468 + 017 ; 971=2×468 + 035 ; 983=2×456 + 071
985=2×406 + 173

624=3×189 + 057 ; 629=3×185 + 074 ; 642=3×189 + 075 ; 654=3×192 + 078
765=3×249 + 018 ; 769=3×208 + 145 ; 789=3×246 + 051 ; 817=3×256 + 049
859=3×271 + 046 ; 869=3×254 + 107 ; 897=3×264 + 105 ; 917=3×284 + 065
965=3×287 + 104

$583=4\times126+079$; $583=4\times129+067$; $793=4\times182+065$; $535=4\times192+067$
$937=4\times218+065$; $967=4\times208+135$; $967=4\times238+015$

$689=5\times123+074$; $768=5\times149+023$; $962=5\times183+047$

$849=6\times132+057$; $937=6\times142+085$

$943=7\times125+068$; $946=7\times123+085$.

Notă. 1°. D-l P. P. DRĂGHICESCU a trimis soluţia complectă cu toate încercările, într'un dosar de 48 de file. Se poate să-i fi scăpat vreo soluţie, ceea ce nu are multă importanţă pentru astfel de probleme, care nu cer decât atenţie şi răbdare. D-l P. P. DRĂGHICESCU şi-a pus în evidenţă, cu această ocazie, şi aceste calităţi.

Vom publica sub formă de notă orice alte soluţii s'ar mai găsi peste cele 89, date în soluţia precedentă.

2°. Problema aceasta 5716 este un caz particular al problemei 5196, propusă la pag. 109 vol. XLV, în care se cerea ca cu cele 10 cifre să se formeze 4 numere astfel ca unul să fie dividentul, altul împărţitorul, altul câtul şi altul restul unei împărţiri.

La problema 5196 nu s'a primit nicio soluţie până acum.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5909. *Dacă* x, y, z *sunt numere întregi şi pozitive, atunci avem:*

$$E\left(\frac{x}{z}\right)+E\left(\frac{x}{y}\right)+E\left(\frac{y}{z}\right)+E\left(\frac{y}{z}\right)+E\left(\frac{z}{x}\right)+E\left(\frac{z}{y}\right)$$
$$\leqslant E\left(\frac{x+y}{z}\right)+E\left(\frac{x+z}{y}\right)+E\left(\frac{y+z}{x}\right)$$

unde E(*i*) *reprezintă întregii lui* i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: I. A. BARBU, GH. D. BRAŞOVEANU, D. R. CONSTANTINESCU, GH. A. GRIGORE, P. F. IONESCU, B. I. POPESCU, I. V. ROGOZ, C. C. TINCU, M. F. VĂDUVA şi GH. GH. VRÂNCEANU.

Ştim (G. M., XLIX, pag. 116) că:

$$E\left(\frac{x}{y}\right)+E\left(\frac{z}{y}\right)\leqslant E\left(\frac{x+z}{y}\right).$$

Prin urmare primul membru poate să fie grupat astfel:

$$\left[E\left(\frac{x}{z}\right)+E\left(\frac{y}{z}\right)\right]+\left[E\left(\frac{x}{y}\right)+E\left(\frac{z}{y}\right)\right]+\left[E\left(\frac{y}{x}\right)+E\left(\frac{z}{x}\right)\right]$$

unde fiecare paranteză mare este mai mică sau egală respectiv cu:

$$E\left(\frac{x+y}{z}\right),\quad E\left(\frac{x+z}{y}\right),\quad E\left(\frac{y+z}{x}\right).$$

EXERCIŢII

35. *Să se demonstreze că*

$$\underbrace{99..9}_{n}{}^2=\underbrace{99..9}_{n-1}\ 8\underbrace{00..01}_{n-1}.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

R. Avem

$$99..9^2=(10^n-1)^2=10^{2n}-2.10^n+1$$
$$=\underbrace{10..0}_{2n}-2\underbrace{00..0}_{2n}+1=\underbrace{99..9}_{n-1}\ 8\underbrace{00..01}_{n-1}.$$

36. *Insemnând*

$$1944=abcd$$

avem

$$1944=2\sum a^2+2\sum a^3.$$

LT. C-DOR GH. V. NICULESCU.

R. Făcând înlocuirile obţinem

$$2(1^2+9^2+4^2+4^2)+2(1^3+9^3+4^3+4^3)=2\times 114+2\times 858=1944.$$

37. *Ecuaţia*

$$(a-x)^n=(x-b)^n$$

admite o rădăcină independentă de n.

E. N. WEGENER.

R. Ecuaţia dată se scrie

$$(a-x-x+b)[(a-x)^{n-1}+(a-x)^{n-2}(x-b)+\ldots+(x-b)^{n-1}]=0$$

$$\therefore\qquad x=\frac{a+b}{2}.$$

38. *Să se rezolve determinantul*

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{p+n} \\ \frac{1}{p+2} & \frac{1}{p+3} & \cdots & \frac{1}{p+n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{p+n} & \frac{1}{p+n+1} & \cdots & \frac{1}{p+2n-1} \end{vmatrix}.$$

M. ADAM.

R. Inmulţim fiecare linie cu numitorul termenului din ultima coloană, apoi scădem ultima coloană din celelalte şi obţinem:

$$D_n = \frac{(n-1)!\,(p+n-1)!}{(p+2n-1)!} \begin{vmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{p+n-1} \\ \frac{1}{p+2} & \frac{1}{p+3} & \cdots & \frac{1}{p+n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{p+n} & \frac{1}{p+n+1} & \cdots & \frac{1}{p+2n-2} \end{vmatrix}.$$

Acum înmulţim fiecare coloană cu numitorul termenului din ultima linie, apoi scădem ultima linie din celelalte şi găsim

$$D_n = \frac{[(n-1)!\,(p+n-1)!]^2}{(p+2n-2)!\,(p+2n-1)!} D_{n-1}.$$

Dăm lui n succesiv valorile $(n-1)$, $(n-2)$, ... 2 şi observând că

$$D_1 = \frac{1}{p+1}$$

găsim $$D_n = \frac{[1!\,2!\ldots(n-1)!\,(p+1)!\,(p+2)!\ldots(p+n-1)!]^2}{(p+1)!\,(p+2)!\,(p+3)!\ldots(p+2n-1)!}.$$

Pentru cazul particular $p = 0$ avem

$$D_n = \frac{[1!\,2!\ldots(n-1)!]^2}{1!\,2!\,3!\ldots(2n-1)!}.$$

Acest exerciţiu este generalizarea problemei 11 din *Culegere de probleme de algebră*, partea II, cap. XI, de A. G. IOACHIMESCU.

PROBLEME PROPUSE

5980. Să se găsească un număr de 4 cifre, format prin alăturarea a două numere consecutive, ştiind că acel număr este produsul între numerele *ab* şi *aob*.

M. I. PĂTRĂŞCIOIU.

5981. Un detaşament militar are de trecut peste un fluviu un număr, mai mic ca 300 de tancuri. El are la dispoziţie trei porturi A, B, C, în fiecare din care poate acosta un singur vas. Vasul din A poate trece dintr'odată 7 tancuri, cel din B câte 8 şi cel din C câte 10. Incărcarea, traversarea fluviului şi descărcarea pe celălalt ţărm durează pentru fiecare vas 5 ore; iar înapoierea vasului descărcat durează 1 oră. Comandantul detaşamentului ordonă să se facă depozite egale de tancuri în A, B şi C. După aceea, mijloacele de transport terestru pleacă pentru alte misiuni, aşa că nu se mai poate transporta nimic pe uscat între A, B şi C. La trecerea fluviului se constată că ultimul transport din A a luat numai 5 tancuri, ultimul transport din B numai 3, iar ultimul transport din C numai 5.

Câte tancuri a avut de transportat detaşamentul?

In câte ore s'a efectuat transportul peste fluviu în felul cum a depozitat comandantul tancurile?

Nu s'ar fi putut distribui tancurile altfel între A, B şi C, astfel ca să necesiteze un număr minim de treceri ale vaselor şi deci să câştige maximul de timp pentru traversare?

P. SERGESCU.

5982. Să se găsească un patrat perfect de 9 cifre de forma $5aabbccdd$.

V. THÉBAULT.

5983. Să se formeze un bipatrat de 11 cifre, folosind de patru ori cifra 1, de câte două ori pe fiecare din cifrele 2 şi 7 şi câte o singură dată pe fiecare din cifrele 0, 5 şi 9.

A. GLODEN.

5984. ABCD fiind un patrulater înscris în cercul (O), iar H_a, H_b, H_c, H_d ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC. Să se arate că:

1°. Patrulaterul $H_a H_b H_c H_d$ este inscriptibil într'un cerc (O').

1°. Dreptele lui SIMSON ale vârfurilor A, B, C, D relative la triunghiurile de ortocentre H_a, H_b, H_c, H_d sunt dreptele lui SIMSON ale vârfurilor H_a, H_b, H_c, H_d relative la triunghiurile de ortocentre A, B, C, D.

3°. Cele patru drepte ale lui SIMSON concură în mijlocul segmentului OO'.

P. P. DRĂGHICESCU.

5985. Pe latura AB a triunghiului ABC se construieşte spre interior un patrat cu centrul în α, iar pe latura BC se construieşte spre exterior un patrat cu centrul în β. Să se demonstreze că latura AC este perpendiculară pe una din diagonalele patratelor construite pe $\alpha\beta$ ca latură şi este paralelă la o altă diagonală a acestor patrate.

G-L GH. BUICLIU.

5986. Să se construiască un triunghiu ABC, dreptunghic în A, cunoscând segmentul de pe ipotenuză cuprins între dreptele care împart unghiul A în trei părţi egale şi unghiul pe care îl formează dreptele care pleacă din A şi împart ipotenuza BC în trei segmente egale.

GH. BASACOV.

5987. Fie M şi M_1 două puncte inverse în planul triunghiului ABC înscris în cercul (O). Diametrul OM taie cercul circumscris în P şi Q. Dreptele lui SIMSON ale punctelor P şi Q se taie în R. Fie N_1 simetricul lui M_1 în raport cu R şi N inversul lui N_1. Punctele M, N, O sunt colineare.

N. N. MIHĂILEANU.

5988. Să numim ecuaţie *bireciprocă* acea ecuaţie *reciprocă*, care prin substituţia obişnuită

$$x + \frac{1}{x} = y$$

ne dă tot o ecuaţie *reciprocă*.

Să se determine forma generală a ecuaţiei *bireciproce* de gradul IV şi să se studieze realitatea rădăcinilor cu ajutorul teoremei lui ROLLE.

G. D. SIMIONESCU.

5989. Care este maximul sumei cuburile laturilor unui tetraedru de volum dat?

I. IONESCU.

5990. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu şi numărul întreg pozitiv n avem

$$(-1)^n [\cos nA + \cos nB + \cos nC] \geqslant -\frac{3}{2}$$

$$(-1)^n [\cos nA + \sin nB + \sin nC] \leqslant \frac{3}{2}.$$

M. ADAM.

5991. În cercul O se duce coarda AB de direcţie dată şi se consideră pe AB punctul M aşa încât

$$\alpha\overline{MA}^2 + 2\beta\overline{MA}\cdot\overline{MB} + \gamma\overline{MB}^2 = 0$$

α, β, γ fiind constante. Se cere locul lui M. Să se deducă apoi locul lui M când raportul segmentelor MA, MB este constant şi când M împarte coarda AB în medie şi extremă raţiune.

I. ST. TEODORESCU.

5992. Intersecţiile a două conice având un focar comun sunt câte două colineare cu intersecţia directoarelor corespunzătoare acelui focar.

AD. GHEORGHIU.

5993. Să se găsească locul punctului de intersecţie a două drepte SIMSON, care fac între ele un unghiu dat θ.

Aplicaţie pentru $\theta = 60^0$.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

5994. Casa *Gazeta Matematică* a suferit din cauza bombelor anglo-americane căzute în jurul său două serii de stricăciuni: prima la 4 Aprilie orele 13^{30} şi a doua la 7 Mai orele 10^{50}. Cum probabil punctul ochit a fost Gara de Nord şi cum casa *Gazeta Matematică* se găseşte la aproximativ 100 m de centrul gării, se cere să se calculeze numărul total de bombe ce ar fi trebuit aruncat, pentru ca o singură bombă să cadă cu certitudine pe casa *Gazetei Matematice*, ştiind că:

1. Atacul se face în valuri de câte 30 avioane, fiecare avion purtând câte 16 bombe a 250 kg.

2. Înălţimea de atac a fiecărui val variază în progresie aritmetică, având raţia de 400 m. iar viteza de sbor variază invers proporţional cu înălţimea.

3. Primul val atacă dela 5.000 m înălţime şi cu o viteză de 400 km/oră.

Abaterile probabile se vor calcula folosind formulele (28) din *Gazeta Matematică*, XLIV, pag. 215, unde Z se socoteşte în metri, V_0 în metri pe secundă şi $\frac{a^2 \cdot l}{p} = 2{,}5$.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Wegener N. E. (4435, 540, 5111, 355, 66, 478, 503, 21, 77, 632, 73, 74, 75, 92, 854, 56, 74, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 25.135.

C III R 28 1943/44 complet.
Regulam. Premiilor și Diverselor Soc. Gazeta Matem.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIX

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU
13a

SUMARUL

1. Indicatorul de ordin superior al unei sume şi al unui produs. . . . . *Comandor I. Linteş.*
2. O pagină a profesorului George Ţiţeica. *C. Ionescu-Bujor.*
3. O aplicaţie a teoremei lui Cesàro . . . *N. Gaiu.*
4. Despre hipocicloida lui Steiner . . . . *P. P. Drăghicescu.*
5. Raport pentru decernarea premiului „Spiru Haret". . . . . *Comisiunea pentru premii.*
6. Note matematice: 49 — 53.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 333.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 4905, 5020, 5045, 5155, 5455, 5587, 5610, 5665, 5730, 5740, 5750, 5781, 5879.
12. Exerciţii: 39 — 45.
13. Probleme propuse: 5995 — 6005.
14. Tabla de materii.

ABONAMENTUL 600 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1943, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVIII.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **58**38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **9**00, 01, 02, 03, 04, 06, 07, 08, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **60**00, 01, 02, 03, 04, 05.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

INDICATORUL DE ORDIN SUPERIOR AL UNEI SUME ŞI AL UNUI PRODUS

I. *Cazul când termenii sumei sau factorii produsului sunt primi între ei.*

Fie A, B, C, ... o serie de numere prime între ele şi fie respectiv: a_i, b_i, c_i, ... factorii lor primi; atunci dacă notăm cu:

$$(P_0)_A = \pi(a_i - 1) \quad ; \quad (Q_0)_A = \pi a_i$$
$$(P_0)_B = \pi(b_i - 1) \quad ; \quad (Q_0)_B = \pi b_i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

apoi cu:

$$(P_1)_A = \pi(a_i' - 1) \quad ; \quad (Q_1)_A = \pi a_i'$$
$$(P_1)_B = \pi(b_i' - 1) \quad ; \quad (Q_1)_B = \pi b_i'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

unde: a_i', b_i', ... sunt factori cari rezultă din indicarea a doua oară a numerelor A, B, ... ; a_i'', b_i'', ... factori cari rezultă din indicarea a treia oară, şi tot aşa mai departe.

Cu aceste notaţiuni avem:

$$\varphi_1(A) = A \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A$$
$$\varphi_2(A) = A \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_A$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(A) = A \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_A \cdots \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)_A \cdot$$

Apoi:

$$\varphi_1(B) = B \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B$$
$$\varphi_2(B) = B \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_B$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(B) = B \cdot \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B \cdot \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_B \cdots \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)_B$$

şi aşa mai departe pentru celelalte numere. Atunci avem:

$$1) \begin{cases} \Sigma\varphi_m(A) = A \cdot \pi\left(\frac{P}{Q}\right)_A + B \cdot \pi\left(\frac{P}{Q}\right)_B + \cdots \\ \varphi_m(\Sigma A) = \Sigma A \cdot \pi\left(\frac{P}{Q}\right)_{\Sigma A} \cdot \end{cases}$$

Cum în general $\left(\frac{P}{Q}\right)_{\Sigma A}$ este mai mic sau cel mult egal cu oricare din parantezele $\left(\frac{P}{Q}\right)_A$, $\left(\frac{P}{Q}\right)_B$, ... urmează că:

2) $$\Sigma \varphi_m (A) \geqslant \varphi_m (\Sigma A).$$

De asemenea în cazul produsului avem:

3) $$\begin{cases} \pi\varphi_m (A) = \pi A \cdot \left[\pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A \cdot \pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B \cdots\right] \\ \varphi_m (\pi A) = \pi A \cdot \pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_{\pi A} \end{cases}$$

Urmărind formația produselor P și Q, se vede bine că:

$$\pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A \cdot \pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_B \cdots \leqslant \pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_{\pi A}.$$

Prin urmare vom avea:

4) $$\varphi_m (\pi A) \geqslant \pi\varphi_m (A).$$

II. *Cazul când termenii:* A, B, C, ... *au aceiași factori primi, însă cu exponenți astfel aleși, încât după a* m-*a indicare, să dispară aceiași factori la toți termenii.*

Se constată bine că și în acest caz produsele P și Q au aceleași valori la toți termenii, respectiv fiecărui ordin de indicare, deci avem:

5) $$\Sigma\varphi_m (A) = \Sigma A \cdot \pi \left(\frac{P}{Q}\right)_A ; \quad \varphi_m (\Sigma A) = \Sigma A \cdot \pi \left(\frac{P}{Q}\right)_{\Sigma A}$$

și deci relația 2, se menține.

De asemenea în cazul unui produs avem:

6) $$\pi\varphi_m (A) = \pi A \cdot \left[\pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A\right]^n ; \quad \varphi_m (\pi A) = \pi A \cdot \pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_{\pi A}$$

unde n este numărul termenilor.

Dar cum avem:

$$\pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_{\pi A} = \pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A$$

urmează că:

7) $$\pi\varphi_m (A) = \varphi_m (\pi A) \cdot \left[\pi \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)_A\right]^{n-1}.$$

Dacă $A = B = \ldots = L$ atunci:

$$8) \quad \begin{cases} n \cdot \varphi_m(A) \geqslant \varphi_m(n \cdot A) \\ \varphi_m(A^n) = \left[\varphi_m(A)\right]^n \cdot \left[\dfrac{\pi a}{\pi(a-\pi)}\right]^{m(n-1)}. \end{cases}$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

O PAGINĂ A PROFESORULUI GEORGE ŢIŢEICA

1°. Domnişoara GABRIELA ŢIŢEICA mi-a încredinţat următoarea pagină manuscris a profesorului GEORGE ŢIŢEICA, scrisă în zilele ce i-au precedat moartea:

„NOTĂ MATEMATICĂ"

„O problemă de geometrie plană propusă la concursul Gazetei Matematice".

Este vorba de Nota Nr. 5 a D-lui IONESCU-BUJOR *din Vol. XLIV, p. 78 al Gazetei Matematice. In această Notă autorul problemei, care a fost dată la concurs, îşi publică soluţia.*

Vreau să dau altă deslegare problemei, mai puţin elementară, dar mai naturală. Păstrez figura şi notaţiile date de D-l IONESCU-BUJOR. *Când dreapta* MN *se mişcă, rămânând perpendiculară pe dreapta fixă* Δ, *dreptele* AM *şi* AN *formează două fascicole cu vârful comun* A. *Razele duble unesc punctul* A *cu capetele diametrului cercului* ω *paralel cu* Δ.

2°. Scrisul lui GEORGE ŢIŢEICA se opreşte aici. Probabil durerile ce i-au adus sfârşitul au legat materializarea gândului său. Voiu încerca să urmez drumul deschis de pagina profesorului meu.

Razele duble AI, AJ sunt bisectoarele unghiului format de razele corespunzătoare AM, AN ale fascicolelor. Corespunzătoarea razei AN', perpendiculară pe Δ este AT, tangenta la cerc.

Aceste drepte fiind isogonale în unghiul CAB, iar AN' înălţimea triunghiului CAB, AT este diametrul cercului CAB. Deci

Locul geometric al centrului cercului CAB *este tangenta în* A *la cercul* ω.

3°. Fascicolul (A, MNDE) este armonic.

4°. Demonstrația profesorului GEORGE ȚIȚEICA dă posibilitate generalizărilor.

Făcând o transformare omografică astfel ca dreapta dela infinit să se transforme într'o dreaptă oarecare Δ_1, se poate enunța următoarea proprietate:

Fie Δ *o rază a unui fascicol de drepte cu vârful în* V, Δ_1 *și* Δ_2 *două raze conjugate în raport cu o conică* Γ, I *și* J *punctele în care* Δ_1 *taie conica,* U *polul dreptei* Δ_2 — M, N *punctele în care o dreaptă trecând prin* U *taie conica* — B, C *punctele în care dreptele* AM, AN *taie dreaptă* Δ.

Locul geometric al polului dreptei Δ_1 *în raport cu conica circumscrisă triunghiului* AIJ, *trecând prin* B, C, *când* MN *se rotește în jurul lui* U, *este tangentă în* A *la conica* Γ.

5°. Proprietatea 3° se extinde astfel:

Se dă o conică Γ și un punct U — E, D punctele în care polara punctului U taie conica — M, N punctele în care o dreaptă ce trece prin U taie conica.

Fascicolul (A, MNDE) este armonic.

6°. In spațiu avem următoarea proprietate:

Fie un punct A *pe o sferă* S. *O dreaptă variabilă perpendiculară pe un plan* P, *înțeapă sfera în* M, N.

Dreptele AM, AN *intersectează planul* P *în* B, C.

Centrul cercului ABC *se află pe planul tangent sferei în* A.

In adevăr, centrul cercului ABC este pe tangenta în A la cercul de secțiune al sferei prin planul AMN, deci pe planul tangent sferei în punctul A.

Proprietatea se extinde la cuadrice printr'o transformare omografică care aduce planul dela infinit la distanță finită.

C. IONESCU-BUJOR.

O APLICAȚIE A TEOREMEI LUI CESARO

1. *Fie* p_i, q_i *și* r_i, *trei șiruri de numere pozitive* $[i=1, 2,...]$, *apoi*

$$\sum_1^n p_n = P_n, \sum_1^n q_n = Q_n, \sum_1^n r_n = R_n.$$

Presupunem de asemeni că: $\Sigma r_n = R_n \to \infty$; *la fel* $\sum_1^\infty \frac{1}{R_n} \to \infty$, *pentru* $n \to \infty$, *apoi*

$$(a)\ \frac{P_n}{R_n . p_n} \to \alpha \ ;\ (b)\ \frac{Q_n}{R_n . q_n} - \beta, \text{ pentru } n \to \infty$$

$\alpha + \beta > 0$ *şi fiecare diferit de zero.*

In aceste condiţii, avem:

$$(1)\ \frac{r_1 . p_1 q_1 + (r_1 + r_2) p_2 q_2 + \ldots + (r_1 + \ldots + r_n) p_n . q_n}{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)^2 p_n q_n} \to \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}\ ^{1}).$$

Intr'adevăr, α şi β fiind diferiţi de zero, vom avea

$$\lim . P_n = \lim . R_n . p_n, \quad n \to \infty .$$

Această limită nu poate fi decât infinită, căci dacă ar fi finită, fie ea P, atunci am avea:

$$P_n = P\left(\frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) \to \infty, \ p_n . \to \infty,$$

seria din paranteză fiind divergentă, rezultă $\lim . P_n - \infty$, $\lim R_n . p_n \to R$, ceea ce e contradictoriu. Deci $P_n \to \infty$, la fel $Q_n \to \infty$, $n \to \infty$. Inmulţind relaţiile (a) şi (b) vom avea:

$$\frac{P_n . Q_n}{R_n . p_n . q_n} \to \alpha . \beta ; \text{ pentru } n \to \infty .$$

Deci problema se reduce la a arăta că:

$$(2)\qquad \frac{P_n . Q_n}{\Sigma R_n . p_n . q_n} \to \alpha + \beta, \ n \to \infty .$$

Aplicăm pentru demonstrare, teorema lui CESÀRO:

Fie două şiruri a_n *şi* $b_n (n = 1, 2, \ldots)$; *dacă* $b_n > 0$, *dacă* Σb_n *e divergentă şi dacă* $\lim \frac{a_n}{b_n} \to S$, *atunci şi*

$$\lim . \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{b_0 + b_1 + \ldots + b_n} \to S$$

pentru $n \to \infty$.

---

1) A se vedea: « *Aufgaben und Lehrsätze der Analysis* » de POLYA und SZEGÖ, cap. II, pag. 12, Bd. I, Un caz particular, anume $r_n = 1$.

Punem:

$$a_n = P_n \cdot Q_n - P_{n-1} \cdot Q_{n-1} \quad ; \quad b_n = R_n \cdot p_n \cdot q_n .$$

Avem:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{P_n \cdot q_n + P_n \cdot Q_{n-1} - P_{n-1} \cdot Q_{n-1}}{R_n \cdot p_n \cdot q_n} = \frac{P_n}{R_n \cdot p_n} + \frac{Q_{n-1}}{R_n \cdot q_n} =$$

$$\frac{P_n}{R_n \cdot p_n} + \frac{Q_n}{R_n \cdot q_n} - \frac{1}{R_n} \to \alpha + \beta, \text{ căci } R_n \to \infty .$$

Deci avem (2), aplicând teorema amintită.

2. Iată două aplicaţii, dintre care una cunoscută [1]).

a) Fie $r_n = 1$, $R_n = n \to \infty$, $\frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n} \to \infty$

pentru $n \to \infty$ $\frac{P_n}{np_n} \to \alpha$; $\frac{Q_n}{nq_n} \to \beta$, iar

$$\frac{\sum_1^n n \cdot p_n \cdot q_n}{n^2 p_n q_n} \to \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta} .$$

b) Fie $r_n = \lg n$, $p_n = q_n = \frac{1}{n}$ $[n = 2, 3, \ldots]$.

Vom avea: $R_n = \lg 2 + \ldots + \lg n = \lg n! \to \infty$

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{\lg 2!} + \ldots + \frac{1}{\lg n!} .$$

Or seria: $\frac{1}{\lg n!}$ şi seria $\frac{1}{\lg n^n}$ sunt în acelaşi timp convergente sau divergente căci: $\frac{1}{\lg n!} : \frac{1}{\lg n^n} \to 1$ [2]).

Or seria $\frac{1}{\lg n_n} = \frac{1}{n \lg n}$ e divergentă căci:

$$\frac{1}{2 \lg 2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot \lg n} \to \lg \lg n \to \infty$$ [3]).

---

1) A se vedea: POLYA und SZEGÖ, loc. cit.

2) K. KNOPP: „Theorie und Anwendung", pag. 78 sau 554.

3) K. KNOPP: vol. cit., pag. 301.

Astfel fiind: $R_n \to \infty$, $\frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \to \infty$; condiţiile problemei sunt îndeplinite, deci teorema se va putea aplica, căutând limitele lui

$$\frac{P_n}{R_n \cdot p_n} = \frac{Q_n}{R_n \cdot q_n} \cdot \text{ Or: } \frac{P_n}{R_n\, p_n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{(\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n) \cdot \frac{1}{n}} \to \frac{\lg n}{\lg n\,! \frac{1}{n}}$$

$$\frac{\lg n}{n \cdot \lg n \cdot \frac{1}{n}} \to 1\ ^{1}) \quad (\text{Aici } \alpha = \beta = 1).$$

Astfel vom avea:

$$E = \frac{\lg 1 \cdot p_1 \cdot q_1 + (\lg 1 + \lg 2)\, p_2 \cdot q_2 + \ldots + (\lg 1 + \lg 2 + \ldots \lg n)\, p_n \cdot q_n}{(\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n)^2 \cdot p_n\, q_n} =$$

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta} \text{ sau } E = \frac{\lg 1 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 + (\lg 1 + \lg 2)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + (\lg 1 + \ldots + \lg n) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{(\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$\to \frac{1}{2}\ n \to \infty .$$

Exerciţiul din urmă se poate rezolva el însuşi direct cu teorema lui CESÀRO, căutând a arăta că:

$$\frac{\lg 1 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \ldots + (\lg 1 + \ldots + \lg n) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^2} \to \frac{1}{2} .$$

Insemnând numărătorul cu B_n şi numitorul cu A_n, avem, dacă

$$\lim \frac{B_n - B_{n-1}}{A_n - A_{n-1}} \to \frac{1}{2} \text{ şi } \lim \frac{B_n}{A_n} \to \frac{1}{2}$$

---

1) K. KNOPP: loc. cit. la 3) şi 4).

ceea ce ne dă:

$$\frac{\frac{1}{n^2}\cdot(\lg n!)}{\frac{1}{n}\left[2\left(1+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{n}\right]}\to\frac{\frac{1}{n^2}.n.\lg n}{\frac{1}{n}[\lg n+\lg(n-1)]}=$$

$$=\frac{\lg n}{2\lg n+\lg\left(1-\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{2}$$

căci seria $\Sigma(An-An-1)$ e divergentă: A_n-A_{n-1}.

3. Aşa fiind, iată o generalizare a chestiunii:

Fie şirurile de numere pozitive [cu doi indici]

$$q_1^1+q_2^1+\ldots+q_n^1=Q_n^1\ ;\ q_1^2+\ldots+q_n^2+Q_n^2;\ldots q_1^p+\ldots+q_n^p=Q_n^p.$$

De asemeni, şirul pozitiv, $r_1+\ldots+r_n=R_n$, aşa fel ca: $R_n\to\infty$ *şi* $\frac{1}{R_1}+\ldots+\frac{1}{R_n}\to\infty$ *pentru* $n\to\infty$.

Fie apoi:

$$\frac{Q_n^s}{R_n.q_n^s}\to\alpha_s\ p.n\to\infty,\ s=1,2,\ldots p$$

numerele α_s *fiind pozitive.*

Avem

$$(3)\quad\frac{r_1^{p-1}.q_1^1\ldots q_1^p+(r_1+r_2)^{p-1}.q_2^1\ldots q_2^p+\ldots+(r_1+\ldots r_n)^{p-1}.q_n^1\ldots q_n^p}{(r_1+\ldots+r_n)^p.q_n^1\ldots q_n^p}$$

$$\to\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}{\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha^{p-1}},$$

suma dela numitor cuprinzând $C_p^{p-1}=p$ *termeni.*

Vom proceda prin inducţie:

Presupunem că teorema e adevărată pentru $i=p-1$; vom dovedi-o pentru $i=p$. Deci avem:

$$\frac{Q_n^i}{R_n.q_n^i}\to\alpha_i,\ i=1,2,\ldots p-1,$$

şi atunci:

$$\frac{r_1^{p-2}.q_1^1\dots q_1^{p-1}+(r_1+r_2)^{p-2}.q_2^1\dots q_2^{p-1}+\dots+(r_1+\dots r_n)q_n^1\dots q_n^{p-1}}{(r_1+\dots r_n)^{p-1}.q_n^1q_n^2\dots q_n^{p-1}}$$

$$\to\frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{p-1}}{\Sigma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{p-2}}.$$

Această din urmă limită se mai poate scrie:

$$\frac{R_1^{p-2}.q_1^1\dots q_1^{p-1}+R_2^{p-2}.q_2^1\dots q_2^{p-1}+\dots+R_n^{p-2}.q_n^1\dots q_n^{p-1}}{R_n.R_n^{p-2}.q_n^1\dots q_n^{p-1}}$$

$$\to\frac{\alpha_1\dots\alpha_{p-1}}{\Sigma\alpha_1\dots\alpha_{p-2}}$$

înlocuind $R_s^{p-2}.q_s^1.q_s^2\dots q_s^{p-1}=p_s$, avem

$$\frac{p_1+\dots+p_n}{R_n.p_n}\to\frac{\alpha_1\dots\alpha_{p-1}}{\Sigma\alpha_1\dots\alpha_{p-2}}.$$

Aceasta şi cu:

$$\frac{q_1^p+\dots+q_n^p}{R_n.q_n^p}\to\alpha_p$$

ne dă, aplicând teorema dela Nr. 1)

$$\frac{R_1p_1q_1^p+R_2.p_2q_2^p+\dots+R_n.p_n.q_n^p}{R_n.p_n.q_n^p}\to\frac{\alpha_1\dots\alpha_p}{\Sigma\alpha_1\dots\alpha_{p-1}}.$$

Or, teorema pentru $i=2$, am demonstrat-o la Nr. 1. Deci ea e adevărată şi pentru $i=p$.

Iată câteva aplicaţii ale teoremei generale precedente:

1°. *Avem*

$$(a)\quad\frac{(\lg1)^{p-1}.\frac{1}{p!}+(\lg2!)^{p-1}.\frac{2!}{(p+1)!}+\dots+(\lg n!)^{p-1}\frac{n!}{(n+p-1)!}}{(\lg n!)^p.\frac{n!}{(n+p-1)!}}\to\frac{1}{p}.$$

2°. *La fel:*

$$(b)\quad\frac{(\lg1)^{p-1}.\left(\frac{1}{1}\right)^p+(\lg2!)^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^p+\dots+(\lg n!)^{p-1}.\left(\frac{1}{n}\right)^p}{(\lg n!)^p\left(\frac{1}{n}\right)^p}\to\frac{1}{p}.$$

Luăm $Q_n^{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \ldots + \frac{1}{n+s-1}$ $[s = 1, \ldots p]$ şi $r_n = \lg n$ $[n = 1, \ldots]$.

Deci:

$$\frac{Q_n^{(s)}}{R_n \cdot q_n^{(s)}} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \ldots + \frac{1}{n+s-1}}{(\lg n!)\frac{1}{n+s-1}} \to$$

$$\frac{\lg(n+s-1) - \sum_1^{s-1} \frac{1}{i}}{\frac{n}{n+s-1}\lg n} \to 1 \quad [s = 1, \ldots p].$$

In cazul nostru (a), $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 1$, deci (1) există şi are limita 1.

Pentru (b), vom lua:

$$Q_n^{(1)} = Q_n^{(2)} = \ldots = Q_n^{(p)} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

adică

$$q_1^{(1)} = q_1^{(2)} = \ldots = q_1^{(n)} = 1, \quad q_2^{(1)} = q_2^{(2)} = \ldots = q_2^{(n)} = \frac{1}{2}, \text{ etc...}$$

şi vom avea că:

$$\frac{Q_n^{(s)}}{R_n \cdot q_n^{(s)}} \to 1, \text{ deci } (2) \to \frac{1}{P}$$

Observare. Este interesant de a se căuta cele două limite direct cu ajutorul teoremei lui CESÀRO.

Iată, pentru al doilea exerciţiu, limita, cu ajutorul teoremei amintite. Să notăm numărătorul cu B_n şi numitorul cu A_n.

Se vede că $\Sigma [A_n - A_{n-1}] \to \infty$ p . n . $\to \infty$.

Vom avea

$$E \to \lim \frac{B_n}{A_n} = \lim \frac{B_n - B_{n-1}}{A_n - A_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{\lg n!}{n}\right)^{p-1}}{\left(\frac{\lg n!}{n}\right)^p - \left(\frac{\lg(n-1)!}{n-1}\right)^p}.$$

Or: $\lg n! \sim n \lg n$, deci E tinde către:

$$\frac{(\lg n)^{p-1}}{n[(\lg n)^p - [\lg(n-1)]^p} = \frac{(\lg n)^{p-1}}{n[\lg n - \lg(n-1)]\{(\lg n)^{p-1} + \ldots + [\lg(n-1)]^{p-1}\}}$$

or:

$$n \lg \frac{n}{n-1} = -\lg\left[1 - \frac{1}{n}\right]^n \to -\lg e^{-1} \to 1.$$

Şi deci:

$$E \to \frac{1}{1 + \lg\frac{n-1}{n} + \left[\lg\frac{n-1}{n}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{\lg(n-1)}{\lg n}\right]^{p-1}} \to \frac{1}{P}.$$

Pentru exerciţiile mai complicate, teorema lui CESÀRO devine din ce în ce mai greu de aplicat.

N. GAIU
Profesor, Bârlad.

DESPRE HIPOCICLOIDA LUI STEINER

Se ştie că dreptele lui SIMSON relative la acelaşi triunghiu înfăşoară o hipocicloidă cu trei puncte de întoarcere, numită ipocicloida lui STEINER [1]).

Această hipocicloidă este tritangentă laturilor triunghiului în picioarele cevienelor reciprocului ortocentrului, iar cercul său tritangent este cercul lui EULER al triunghiului.

In cele ce urmează voiu determina punctele de contact ale hipocicloidei lui STEINER cu cercul lui EULER. Pentru aceasta ajunge a determina punctele de pe cercul circumscris triunghiului, a căror drepte ale lui SIMSON sunt tangente cercului lui EULER.

Fie ABC un triunghiu oarecare înscris în cercul (O), H ortocentrul său, H_a punctul în care AH retaie cercul (O), M un punct pe arcul AB, Δ dreapta lui SIMSON a punctului M, ω centrul cercului lui EULER, iar N intersecţia lui Δ cu HM.

1) D-l E. ARGHIRIADE a publicat câteva informaţii bibliografice asupra acestei ipocicloide în nota Nr. 56 dela pag. 505, Vol. XLVIII, *Gazeta Matematică*.

Se ştie că N se găseşte pe cercul lui EULER, căci N este mijlocul segmentului $\overline{HM}$.

Pentru ca Δ să fie tangentă la cercul lui EULER trebue ca $\omega N \perp \Delta$, sau, fiindcă $\omega N \parallel OM$, $OM \perp \Delta$.

Deci D fiind tangenta în M la cercul (O), ar trebui ca $D \parallel \Delta$.

In acest caz notând cu M_a punctul în care perpendiculara din M pe BC retaie cercul (O), fiindcă $\Delta \parallel AM_a$, rezultă că trebue ca $D \parallel AM_a$.

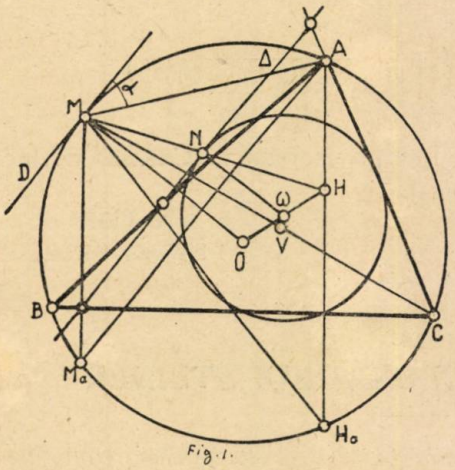


Fig. 1.

Deci notând cu α unghiul ascuţit pe care îl face D cu MA avem :

$$\alpha = \sphericalangle MAM_a = \sphericalangle M_a AH_a = \sphericalangle MH_a A.$$

Deci :

$$\sphericalangle H_a MA = 180^0 - 3\alpha.$$

Insă :

$$\sphericalangle H_a MA = 90 + B - C.$$

Deci :

$$\alpha = \frac{A - B + 3C}{6}$$

$$\sphericalangle MAB = \frac{B - A + 3C}{6} \quad ; \quad \sphericalangle MBA = \frac{A - B + 3C}{6}$$

$$\sphericalangle MCA = 30^0 + \frac{C - B}{3} \quad , \quad \sphericalangle MCB = 30^0 + \frac{C - A}{3}.$$

La fel se demonstrează că mai există încă două puncte M' şi M'' a căror drepte ale lui SIMSON sunt tangente cercului lui EULER, iar :

$$\sphericalangle M'AC = 30^0 + \frac{A - B}{3} \quad , \quad \sphericalangle M'AB = 30^0 + \frac{C - A}{3}$$

$$\sphericalangle M''BA = 30^0 + \frac{B - C}{3} \quad , \quad \sphericalangle M''BC = 30^0 + \frac{B - A}{3}.$$

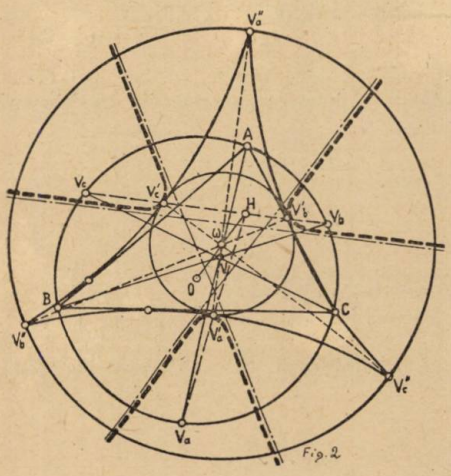
Dreptele AM′, BM″, CM sunt concurente în punctul V de coordonate unghiulare

$$A + 60^0 \ , \ B + 60^0 \ , \ C + 60^0,$$

adică în centrul isodinamic interior. Deci:

V *fiind centrul isodinamic interior al triunghiului* ABC, *înscris în cercul* (O) *de rază* 2r, H *ortocentrul iar* ω *centrul cercului lui* EULER *al acestui triunghiu,* $V_aV_bV_c$ *triunghiul circonpedal al punctului* V, V'_a, V'_b, V'_c *punctele în care segmentele* $\overline{HV_a}$, $\overline{HV_b}$, $\overline{HV_c}$ *taie cercul lui* EULER, *iar* V''_a, V''_b, V''_c *punctele în care* $\omega V'_a$, $\omega V'_b$, $\omega V'_c$ *taie cercul* (ω, 3r), *hipocicloida lui* STEINER *are cele trei puncte de întoarcere în* V''_a, V''_b, V''_c *și este tangentă cercului lui* EULER *în* V'_a, V'_b, V'_c. (Trasată plin în fig. 2).

Se vede de asemenea că *locul polurilor dreptelor lui* SIMSON *față de cercul lui* EULER *este curba tangentă în* V'_a, V'_b, V'_c *cercului lui* EULER *și hipocicloidei lui* STEINER *și care are ca asimptote laturile triunghiului omotetic cu* V'_a, V'_b, V'_c, *centrul de omotetie fiind* ω, *iar raportul de omotetie* 3/2. (Trasată cu linii întrerupte pe fig. 2).



Locul polurilor dreptelor lui SIMSON față de cercul lui EULER, formează obiectul problemei 5179, căreia D-l Ing. ȘT. S. MIHĂIESCU i-a dat o soluție analitică în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 367 iar eu i-am dat o altă soluție analitică la pag. 371 același volum.

P. P. DRĂGHICESCU.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU HARET“

Subsemnații, membri în Comisiunea pentru decernarea premiului „Spiru Haret“, cercetând ultimul volum al *Gazetei Matematice* dela 15 Septembrie 1942 — 15 Septembrie 1943, nu am găsit niciun articol sau notă de Mecanică. Deşi au fost rezolvate destul de multe probleme, nu se vede activitatea deosebită a niciunui corespondent.

In concluzie, conform articolului 4 din Regulamentul premiului, decidem ca valoarea premiului să se adauge la premiul anului viitor.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU HARET“

ING. I. CHIŢULESCU, AL. STOENESCU şi GABRIELA ŢIŢEICA

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală din 16 Februarie 1944.

NOTE MATEMATICE

49. *Asupra unor egalităţi multigrade.* Se cunoaşte teorema: (T). *Dacă:*

$$a_1,\ a_2,\ldots\ a_p \overset{n}{=} b_1,\ b_2,\ldots b_p$$

avem, oricare ar fi t:

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_p,\ b_1+t, b_2+t,\ldots,\ b_p+t \overset{n+1}{=} b_1,\ b_2,\ldots,\ b_p,\ a_1+t,\ a_2+t,\ldots,a_p+t.$$

(A. GLODEN — Sur les égalités multigrades — Théorème II).

1°. Aplicând această teoremă consecutiv, multigradei normale

$$a,\ 5b-4a \overset{1}{=} b,\ 4b-3a$$

se obţin următoarele multigrade normale:

$t=5\,(b-a)$ $a,\ 6b-5a,\ 9b-8a \overset{2}{=} b,\ 4b-3a,\ 10b-9a$

$t=3\,(b-a)$ $a,\ 6b-5a,\ 7b-6a,\ 13b-12a \overset{3}{=}$
$b,\ 3b-2a,\ 10b-9a,\ 12b-11a.$

$t=7\,(b-a)$ $a,\ 6b-5a,\ 8b-7a\ 17b-16a,\ 19b-18a \overset{4}{=}$
$b,\ 36-2a,\ 12b-11a,\ 14b-13a,\ 20b-19a.$

$t=2\,(c-a)$ $a,\ 5b-4a,\ 6b-5a,\ 1b6-15a,\ 17b-16a,\ 22b-21a \overset{5}{=}$
$b,\ 2b-a,\ 10b-9a,\ 12b-11a,\ 20b-19a,\ 21b-20a$ (1)

$t=11\,(c-a)$ $a,\ 6b-5a,\ 8b-7a,\ 23b-22a,\ 25b-24a,\ 31b-30a \overset{5}{=}$
$b,\ 3b-2a,\ 11b-10a,\ 20b-19a,\ 28b-27a,\ 30b-29a$ (2)

2°. Aplicând aceeaşi teoremă se obţine un alt şir de multigrade normale din multigrada:

$$2\alpha,\ 5\beta-3\alpha \overset{1}{=} 2\beta,\ 3\beta-\alpha$$

$t=5\,(\beta-\alpha)$ $2\alpha,\ 7\beta-5\alpha,\ 8\beta-6\alpha \overset{2}{=} 2\beta,\ 3\beta-\alpha,\ 10\beta-8\alpha$

$t=\beta-\alpha$ $2\alpha,\ 4\beta-2\alpha,\ 7\beta-5\alpha,\ 11\beta-9\alpha \overset{3}{=}$
$2\beta,\ \beta+\alpha,\ 9\beta-7\alpha,\ 10\beta-8\alpha.$

$t=7\,(\beta-\alpha)$ $2\alpha,\ 4\beta-2\alpha,\ 8\beta-6\alpha,\ 16\beta-14\alpha,\ 17\beta-15\alpha \overset{4}{=}$
$2\beta,\ \beta+\alpha,\ 10\beta-8\alpha,\ 14\beta-12\alpha,\ 18\beta-16\alpha.$

$t=4\,(\beta-\alpha)$ $2\alpha,\ 5\beta-3\alpha,\ 6\beta-4\alpha,\ 16\beta-14\alpha,\ 17\beta-15\alpha,\ 22\beta-20\alpha \overset{5}{=}$
$2\beta,\ \beta+\alpha,\ 10\beta-8\alpha,\ 12\beta-10\alpha,\ 20\beta-18\alpha,\ 21\beta-19\alpha$ (3)

$t=8\,(\beta-\alpha)$ $2\alpha,\ 4\beta-2\alpha,\ 9\beta-7\alpha\ 17\beta-15\alpha,\ 22\beta-20\alpha,\ 26\beta-24\alpha \overset{5}{=}$
$2\beta,\ \beta+\alpha,\ 12\beta-10\alpha,\ 14\beta-12\alpha,\ 24\beta-22\alpha,\ 25\beta-23\alpha$ (4)

Aplicând multigradei (4) teorema (T) de două ori consecutiv cu $t=13\ (\beta-\alpha)$ şi $t=11\ (\beta-\alpha)$, obţinem septigrada normală:
$2\alpha,\ 4\beta-2\alpha,\ 9\beta-7\alpha,\ 23\beta-21\alpha,\ 27\beta-25\alpha,\ 41\beta-39\alpha,\ 46\beta-44\alpha,\ 50\beta-48\alpha \overset{7}{=}$
$2\beta,\ \beta+\alpha,\ 11\beta-9\alpha,\ 20\beta-18\alpha,\ 30\beta-28\alpha,\ 39\beta-37\alpha,\ 48\beta-46\alpha,\ 49\beta-47\alpha.$

3°. Aplicând teorema (T) multigradei (1) cu $t=b-a$ obţinem multigrada:

$a,\ 36-2a,\ 5b-4a,\ 11b-10a,\ 13b-12a,\ 16b-15a,\ 22b-21a,\ 22b-21a \overset{6}{=}$
$b,\ b,\ 7b-6a,\ 10b-9a,\ 12b-11a,\ 18b-17a,\ 20b-19a,\ 23b-22a$ (5)

Aplicând teorema (T) multigradei (3) cu $t = \beta - \alpha$ obținem multigrada:

$$2\alpha,\ 3\beta-\alpha,\ 5\beta-3\alpha,\ 11\beta-6\alpha,\ 13\beta-11\alpha,\ 16\beta-14\alpha,\ 22\beta-20\alpha,\ 22\beta-20\alpha \overset{6}{=}$$
$$\beta+\alpha,\ \beta+\alpha,\ 7\beta-5\alpha,\ 10\beta-8\alpha,\ 12\beta-10\alpha,\ 18\beta-16a,\ 20\beta-18\alpha,\ 23\beta-21\alpha \quad (6)$$

Făcând $b=0$ în multigrada (5) obținem multigrada:

$$-1,\ 2,\ 4.\ 10,\ 12,\ 15,\ 21,\ 21 \overset{6}{=} 6,\ 9,\ 11,\ 17,\ 19,\ 22 \quad (7)$$

cu 14 termeni în total: 8 în primul membru, 6 în al doilea. Această multigradă ar putea fi socotită ca fiind pseudonormală.

Multigrada (7) poate fi obținută din multigrada (5) făcând $b=21$, $a=22$, sau din multigrada (6) făcând $\alpha=-\beta$, sau $\alpha=11, \beta=10$.

4°. La punctul 1° făcând $a = 1$, $b = 2$, obținem șirul de multigrade normale:

$$1,\ 6 \overset{1}{=} 2,\ 5$$
$$1,\ 7,\ 10 \overset{2}{=} 2,\ 5,\ 11$$
$$1,\ 7,\ 8,\ 14 \overset{3}{=} 2,\ 4,\ 11,\ 13$$
$$1,\ 7,\ 9,\ 18,\ 20 \overset{4}{=} 2,\ 4,\ 13,\ 15,\ 21$$
$$1,\ 6,\ 7,\ 17,\ 18,\ 23 \overset{5}{=} 2,\ 3,\ 11,\ 13,\ 21,\ 22$$
$$1,\ 7,\ 9,\ 24,\ 26,\ 32 \overset{5}{=} 2,\ 4,\ 12,\ 21,\ 29,\ 31.$$

Făcând $\alpha=1$, $\beta=2$ în exemplele dela punctul 2°, obținem:

$$1,\ 6 \overset{1}{=} 3,\ 4$$
$$1,\ 8,\ 9 \overset{2}{=} 3,\ 4,\ 11$$
$$1,\ 5,\ 8,\ 12 \overset{3}{=} 2,\ 3,\ 10,\ 11$$
$$1,\ 5,\ 9,\ 17,\ 18 \overset{4}{=} 2,\ 3,\ 11,\ 15,\ 19$$
$$1,\ 6,\ 7,\ 17,\ 18,\ 23 \overset{5}{=} 2,\ 3,\ 11,\ 13,\ 21,\ 22$$
$$1,\ 5,\ 10,\ 18,\ 23,\ 27 \overset{5}{=} 2,\ 3,\ 13,\ 15,\ 25,\ 26$$
$$1,\ 5,\ 10\ 24,\ 28,\ 42,\ 47,\ 51 \overset{7}{=} 2,\ 3,\ 12,\ 21,\ 31,\ 40,\ 49,\ 50.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

50. *Contribuție la Geometria trapezului.* Vom da, în cele ce urmează, o nouă relație geometrică, care se enunță astfel:

Intr'un trapez (isoscel) înscris într'un cerc, latura neparalelă este medie proporțională între una din baze și segmentul de pe prelungirea celeilalte baze, cuprins între cerc și tangenta dusă la cerc în vârful bazei considerate.

Fie ABCD trapezul isoscel înscris în cercul O, cu baza mică AB. Tangenta în B la cerc, taie prelungirea bazei mari DC în C_1. Fie B' proiecția lui B pe DC. In triunghiul BCC_1 avem:

$$\overline{BC_1^2} = \overline{BC}^2 + \overline{CC_1^2} + 2\,\overline{CC_1} \times \overline{B'C}$$

iar tangenta $\overline{BC_1}$ ne dă:

$$\overline{BC_1^2} = \overline{C_1C}\,(\overline{C_1C} + 2\,\overline{B'C} + \overline{AB}).$$

Comparând aceste două egalități găsim:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \times \overline{CC_1} \qquad (1)$$

La fel tangenta în C la cerc taie pe AB în B_1 iar C' e proecția lui C pe AB. Urmând ca mai sus găsim:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BB_1}. \qquad (2)$$

Egalitățile (1) și (2) răspund complect propoziținii enunțate.

Consecințe. a) Comparând (1) cu (2) găsim:

$$AB : \overline{CD} = BB_1 : CC_1$$

adică AD, BC, B_1C_1 sunt concurente în același punct S. Complectând construcția de partea lui AD (adică ducând tangenta la cerc în A și D) obținem punctele A_1, D_1, la întretăierea lor cu bazele. Dreapta A_1D_1 concură tot în S. Figura $A_1B_1C_1D_1$ este tot un trapez isoscel, deci înscriptibil într'un cerc. Respectând construcția obținem rezultatul că: *laturile neparalele ale tuturor acestor trapeze, formate unul din altul, trec printr'un punct fix, punctul S.*

Aceasta este proprietatea care face obiectul problemei 2717 (2645) propusă de mine în Vol. XXV, la pag. 143 și al cărei enunț a apărut cu o eroare, care face problema de neînțeles. Acea problemă 2717 a fost anulată și înlocuită cu alta a cărei soluție s'a publicat în Vol. XLVI, pag. 536.

b) Dintre cazurile particulare mai remarcabil este trapezul cu baza mică AB = R, iar baza mare CD = 2R când BC = AD = R şi aplicând teorema avem:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{x} \quad \therefore \quad R^2 = R \times x$$

adică segmentul x de pe prelungirea diametrului CD, interceptat de tangenta dusă la cerc în B este cât raza cercului.

GH. V. NICULESCU
Lt.-Comandor în retragere

51. *Notă asupra unor determinanţi.* Voi da în cele ce urmează o metodă generală, care permite calcularea valorilor unor determinanţi de forma:

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & a_n^{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

determinanţi obţinuţi din cei de tipul VANDERMONDE prin suprimarea liniei de rangul $(i+1)$, formată din cantităţile $a_1, a_2, \dots a_n$, ridicate la puterea i, unde $i = 1, 2, \dots n$.

Fie Δ_1 determinantul VANDERMONDE corespunzător cantităţilor

$$x, a_1, a_2, \dots a_n.$$

Avem egalitatea:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_1 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (x - a_1)(x - a_2) \dots \\ \dots (x - a_n)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_{n-1} - a_n); \end{cases}$$

sau:

$$(2) \qquad \Delta_1 = (-1)^n \Delta (x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n),$$

unde Δ este determinantul VANDERMONDE format cu $(a_1, a_2, \dots a_n)$, iar $x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A^n$ este un polinom de gradul n, care are ca rădăcini aceleaşi cantităţi.

Luând derivatele ambilor membri ai egalității (2), obținem:

(3) $(\Delta_1)' = (-1^n)\,\Delta\,[nx^{n-1} + (n-1)\,A_1 x^{n-2} + (n-2)\,A_2 x^{n-3} + \ldots A_{n-1}]$.

Insă

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ x & a_1 & a_2 & . & a_n \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ x^n & a_1^n & a_2^n & . & a_n^n \end{vmatrix};$$

aplicând regula derivării unui determinant, obținem:

$$(\Delta_1') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ x^n & a_1^n & a_2^n & . & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ x & a_1 & a_2 & . & a_n \\ 2x & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ x^n & a_1^n & a_2^n & . & a_n^n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ x & a_1 & a_2 & . & a_n \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ nx^{n-1} & 0 & 0 & . & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -D_1 + 2x\,D_2 + \ldots + (-1)^i .\, ix^{i-1}\,D_i + \ldots + (-1)^n\, nx^{n-1}\,D_n .$$

Inlocuind valoarea lui $(\Delta_1)'$ în (3) și identificând coeficienții aceloraşi puteri ale lui x din cele două părți ale egalității, obținem:

(4) $D_1 = -A_{n-1}\,\Delta\,(-1)^n$; $D_2 = A_{n-2}\,\Delta\,(-1)^n$; ...

$$D_n = (-1)^n\,\Delta\,(-1)^n .$$

Insă

$A_{n-1} = (-1)^{(n-1)}\,\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$; $A_{n-2} = (-1)^{(n-2)}\,\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-2}$.

Inlocuind aceste valori în (4), obținem:

(5) $D_1 = \Sigma a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}\,\Delta$; $D_2 = \Sigma a_1\, a_2 \ldots a_{n-2}\,\Delta$;

$$D_i = \Sigma a_1\, a_2 \ldots a_{n-i}\,\Delta .$$

Se vede că determinantul VANDERMONDE nu este decât un caz particular al determinanților de mai sus, corespunzător determinantului D_n.

B. M. BEREANU.

52. *Asupra articolului „O generalizare a sumelor sinusurilor şi cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică“* (G. M., Anul XLVIII, pag. 247).

Dacă notez cu

$$(1)\quad \begin{cases} S_{1,\,m-2t} = \sin(m-2t)\,a + \sin(m-2t)\,(a+r) + \\ \sin(m-2t)\,(a+2r) + \ldots + \sin(m-2t)\,[a+(n-1)\,r] \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} S_{2,\,m-2t} = \cos(m-2t)\,a + \cos(m-2t)\,(a+r) + \\ \cos(m-2t)\,(a+2r) + \ldots + \cos(m-2t)\,[a+(n-1)\,r] \end{cases}$$

sumele (9) şi (10) dela pagina 249, Vol. XLVIII, pentru *m impar* pot fi scrise sub forma:

$$S_1^m = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}} \sum_{t=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^t C_m^t S_{1,\,m-2t}\,;\quad S_2^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{t=0}^{\frac{m-1}{2}} C_m^t \cdot S_{2,\,m-2t}$$

La fel ţinând seama de aceeaşi notaţie, sumele (11) şi (12) dela pag. 250, Vol. XLVIII, pentru *m par* pot fi scrise sub forma:

$$S_1^m = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}} \sum_{t=0}^{\frac{m-2}{2}} (-1)^t C_m^t \cdot S_{2,\,m-2t} + C_m^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^m} n.$$

$$S_2^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{t=0}^{\frac{m-2}{2}} C_m^t \cdot S_{2,\,m-2t} + C_m^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n n.$$

ADRIAN I. POPESCU.

53. *Asupra exerciţiului nr. 33, Vol. XLIX, G. M.* Rezultatul calculării integralei generalizate se obţine mai simplu făcând substituţia $x^p = u$, care o transformă într'o integrală imediată; într'adevăr:

$$I = \int \frac{ax^{p-1}\,dx}{b + cx^{2p}} = \frac{x}{p} \int \frac{du}{b + cu^2}.$$

Dacă b şi c sunt de aceleaşi semne, avem rezultatul

$$I_1 = \pm \frac{a}{p\sqrt{bc}} \operatorname{arc\,tg} x^p \sqrt{\frac{c}{b}} + C.$$

Dacă b şi c sunt de semne contrarii, avem rezultatul

$$I_2 = \pm \frac{a}{2p\sqrt{bc}} \log C \frac{\sqrt{b}+x^p\sqrt{c}}{\sqrt{b}-x^p\sqrt{c}}.$$

Două exemple particulare, tratate prin această metodă se găsesc în culegerea: *Exercices méthodiques de calcul intégral* par ED. BRAHY, pag. 19, Nr. 9 şi 10.

VIRGIL GHIŢESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREŞTI

Facultăţile de Construcţii, Electromecanică şi Mine

Examen de admitere Iulie 1944

Geometria plană. Se consideră un cerc cu centrul în O, două puncte A şi M pe acest cerc şi un punct B pe tangenta în A la cerc. Paralela în B la OA întâlneşte perpendiculara din M pe OA în N, iar cercul cu centrul O şi raza ON întâlneşte pe OA în P. In sfârşit perpendiculara în P pe OA şi paralela din M la OA se întâlnesc în Q. Să se arate:

1. Aplicând de mai multe ori teorema lui PITAGORA că avem OQ=OB.

2. Să se afle locul punctului Q când A şi B rămân fixe, iar M descrie cercul O.

3. S fiind intersecţia dreptelor NP şi MQ, iar R intersecţia dreptelor BQ şi OA, avem:

$$\frac{AP}{PR} = \frac{SM}{SQ}.$$

Să se deducă de aci că dreptele AN, PN şi BN sunt totdeauna concurente.

Geometria în spaţiu. 1. Să se arate că locul geometric al punctelor din spaţiu din care se vede un segment de dreaptă AB sub un unghiu drept este sfera având pe AB ca diametru.

2. Fiind dat un triunghiu ABC să se deducă că sunt în spaţiu două puncte O_1 şi O_2 simetrice faţă de planul triunghiului ABC aşa fel încât unghiurile $AO_i B$, $BO_i C$ şi $CO_i A$ să fie drepte ($i = 1$ sau 2).

3. Să se determine în funcţiune de lungimile a, b, c, ale laturilor triunghiului ABC suprafaţa laterală şi volumul piramidei cu vârful în O_i şi cu baza ABC.

4. Deoarece perpendicularele duse din O_1 şi O_2 pe BC se întâlnesc într'un punct C' pe BC, să se deducă întrebuinţând teorema celor trei perpendiculare că dreapta O_1O_2 întâlneşte planul triunghiului ABC în punctul de intersecţie a înălţimelor acestui triunghiu.

Geometria analitică. Fie punctele A (— 1, 0), B (1, 0).

1. Să se afle coordonatele punctului C, deasupra axei Ox, astfel ca triunghiul ABC să fie echilateral.

2. Se duce perpendiculara pe mijlocul K a lui BC. Ea taie bisectoarea primului cadran în Q şi bisectoarea celui de al doilea cadran în P. Să se arate că figura BQCP e un patrat.

3. Să se calculeze aria patratului BQCP.

4. Să se arate că punctele B, Q, C, P, se află pe un acelaşi cerc.

Mecanica. 1. Un om care aleargă pe o direcţie rectilinie cu o vitesă uniformă de 5,4 km pe oră este urmărit de un biciclist care merge cu 14,4 km pe oră pe acelaşi drum. Ştiind că la pornire biciclistul este în urma omului cu 175 m şi că amândoi pornesc în acelaşi timp se cere să găsească:

a) Timpul după care biciclistul ajunge omul.

b) La ce distanţă dela punctul de plecare omul este ajuns de biciclist.

2. Un hexagon regulat ABCDEF de centrul O şi având laturile de 10 cm are lipsă triunghiul CFE. Se cere să se găsească poziţia centrului de greutate al figurii rămase OFABCDEO.

Facultăţile: Cadastru, Chimie industrială, Silvicultură.

Geometria plană. Se dă un triunghiu ABC. Pe latura BC se ia un punct D astfel ca unghiul DAB să fie egal cu unghiul ACB şi un punct E astfel ca unghiul EAC să fie egal cu unghiul ABC.

1. Să se afle cât este unghiul DAE când se dau unghiurile triunghiului ABC.

2. Să se arate că: AD = AE

3. Să se demonstreze relaţiile:

$$AB^2 = BC \cdot BD \quad ; \quad AC^2 = BC \cdot CE$$

cu ajutorul triunghiurilor asemenea ce se formează.

4. Să se demonstreze relaţia: $AD^2 = BD \cdot EC$.

5. Să se arate cum se poate construi triunghiul ABC când se cunosc laturile AB şi AC şi segmentul AD = AE de mai sus.

Geometrie în spaţiu. Se dă un triunghiu ABC cu latura $BC = a$ şi cu înălţimea corespunzătoare acestei laturi $AD = h$. Triunghiul se roteşte în jurul laturii BC.

1. Să se determine volumul născut de triunghiul ABC prin această rotaţie.

2. Să se determine unde trebue să fie punctul E pe latura AC astfel ca volumele născute, prin rotaţia de mai sus, de către triunghiurile ABE şi BEC, să fie egale. Să se determine de asemenea punctul F analog de pe latura AB.

3. Să se determine suprafaţa născută prin rotaţia segmentului de dreaptă EF în jurul laturii BC.

4. Să se determine în general unde trebue să fie punctul M pe latura AC astfel ca volumele născute, prin rotaţia de mai sus, de către triunghiurile ABM şi BMC să fie într'un raport dat K, şi un punct analog N de pe latura AB

Să se determine în acest caz valoarea raportului K astfel ca suprafaţa născută, prin rotaţia de mai sus, a segmentului de dreaptă MN să fie cea mai mare.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara. D. POMPEIU: Un problème de géométrie. V. ALACI: La solution analytique d'un système fonctionnel. TH. ANGHELUŢĂ: Sur le développement d'une fonction holomorphe dans une série de polynomes. M. GHERMĂNESCU: Sur quelques équations fonctionnelles. P. SZYMANSKI: Sur une correspondance effective entre l'ensemble des fonctions continues et un ensemble de nombres réels. A. MOESSNER & A. GLODEN: Einige zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate. V. THÉBAULT: Géometrie du triangle et du tétraèdre. I. CÂRSTOIU: Sur le mouvement d'une plaque rigide dans son propre plan. A. BĂRGLĂZAN: Beitrag zur Berechnung von Axialpumpen mit positiver Saughöhe. R. RĂDULEŢ: Verstärkungszahl von Trioden mit Parallelsteggitter. C. CĂNDEA & C. MANUGHEVICI: Die Oxydation von Maisöl und Sonnenblumenöl. I. CUREA: Die Horizontalseismometer der neuen Erdbebenwarte in Timişoara nach Beobachtungen im I. Vertikal. V. BUMBU: O cuplă supra-elastică. T. CERNESCU: Contribuţii la cunoaşterea platanului din Timişoara.

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXV. Nr. 5. Iulie 1944. G. CĂLUGĂREANU: Observări asupra numerelor prime. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

I. LINTEŞ. Realizările technice în artileria română în decursul timpului. (Extras din *Revista Artileriei*, număr festiv cu ocazia centenarului).

N. ABRAMESCU. Lecţiuni de *Geometrie Analitică*[1]), urmate de introducere elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene şi noţiuni elementare de geometrie vectorială. Ediţia III. Timişoara 1944.

In loc de orice aprecieri asupra acestei cărţi, reproduc aci Prefaţa pe care i-a scris-o GEORGE ŢIŢEICA la prima ediţie în Iulie 1927, prefaţă reprodusă şi la începutul volumului de faţă:

„Colegul meu de astăzi, fostul meu elev de altădată, D-l N. ABRAMESCU, *îmi cere să însoţesc textul D-sale de Geometrie Analitică, cu câteva rânduri de introducere. O fac de sigur cu toată plăcerea, dar nu cu gândul să servesc drept chezăşie cuprinsului: asta nu se cuvine s'o facă un profesor pentru un coleg al său.*

„Singurul scop pe care-l au rândurile de faţă este să desluşească impresia care se desprinde din cuprinsul tratatului D-lui ABRAMESCU: un nemărginit entusiasm pentru matematică. *E dorinţa de a cunoaşte cât mai*

1) In ultimul moment, când acest număr era cules şi pus sub presă, s'a primit şi dela D-l PROF. P. SERGESCU o bibliografie detailată, care se va publica în numărul viitor.

multe proprietăți, de a ști și de a înțelege acea lume abstractă, frumos ordonată, cu proprietăți admirabile. E un nepotolit neastâmpăr de a întinde orizontul dincolo și de ce a cuprins mintea omenească până azi. E nesfârșita dragoste de știință, care a mânat în trecut și va însufleți și în viitor atâția oameni de știință.

„Acest entusiasm, pe care D-l ABRAMESCU *l-a turnat în volumul D-sale de Geometrie Analitică, îl cunosc de mult. Am cunoscut entusiasmul elevului de liceu, corespondent la* Gazeta Matematică, *al studentului și al profesorului de liceu. Rar exemplu, mai ales la noi, de stăruință și de dragoste neclintită de știință. Ba e ceva mai mult. E un exemplu de voință titanică și mai rară, care merită să fie cunoscut, ca să servească de pildă. După ce a fost multă vreme profesor de liceu, cu o hotărîre eroică s'a îndreptat spre învățământul superior. Și-a pregătit teza de doctorat, a făcut lucrări și astăzi este profesor universitar.*

„Cu aceste deslușiri, natura cursului de Geometrie Analitică făcut de D-l ABRAMESCU *se înțelege ușor. El se caracterizează prin bogăția materialului, prin amănuntele frumoase și interesante, care strălucesc ca niște pietre prețioase. Ordinea materiei se poate discuta, critica severă poate găsi calități izvorîte din entusiasm, cartea D-lui* ABRAMESCU *poate produce entusiasm tinerilor studenți și aceasta este esențial.*

Bucureşti, Iulie 1927. G. ȚIȚEICA.

* * *

In *prefața* ediției de față, autorul ne spune că a făcut multe adăogiri și îmbunătățiri, așa că autorul este și azi ce a fost acum 7 ani când a scris prima ediție. Eu am semnalat această carte, căci, după ce am răsfoit-o, mi-a venit o dorință și anume ca aceste *lecțiuni* să fie transformate, la viitoarea ediție, în un *Tratat de Geometrie Analitică*, care să apară în Biblioteca *Gazetei Matematice*, a Tratatelor de matematici, care s'a înființat de curând, pentru ca să rămână ca un exemplu al muncii matematice din epoca actuală.

I. IONESCU.

CERERI

333. *Culegerea de probleme, aritmetica* (Partea III, *Teoria numerelor)* o am pregătită de un an de zile și dată D-lui G. G. CONSTANTINESCU pentru revizuire. D-sa având ocupațiuni de ordin militar nu poate îndeplini această însărcinare decât cu o iuțeală foarte mică, și de aceea apelez la un corespondent harnic al *Gazetei Matematice* ca să-l ajute sau să lucreze direct cu mine unele capitole. Aceste capitole trebuesc verificate, prescrise clar și îngrijit pentru tipografie. Răspunsurile mi se vor adresa direct mie, pe adresa I. IONESCU, Inginer Inspector General, Strada Răsuri 25, Bucureşti.

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

DR. A. KLEYER. Lehrbuch der Goniometrie. Nach eigenem System. Stuttgart 1888.

A. KLEYER. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Nach eigenem System. Stuttgart 1888.

DR. W. LÁSKA. Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Nach System KLEYER. Stuttgart 1890.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4905. *Să se dea o soluție generală, în numere întregi a sistemului*

$$a+b+c=d+e+f,$$
$$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2,$$
$$a^3+b^3+c^3=h^3.$$

A. MOESSNER.

Soluția autorului. După EULER [1]), soluția generală în întregi a ultimei ecuații este dată de

$$(1)\quad \begin{cases} a=(r+3s)(r^2+3s^2)-1\ ;\ b=-(r-3s)(r^2+3s^2)+1\ ; \\ c=-(r+3s)+(r^2+3s^2)^2\ ,\ h=r-3s-(r^2+3s^2)^2 \end{cases}$$

unde r și s sunt întregi arbitrari.

După o proprietate cunoscută, avem în general

$$A_1^n+A_2^n+\ldots+A_x^n=(p-A_1)^n+(p-A_2)^n+\ldots+(p-A_x)^n,$$

pentru $n=1, 2,$ dacă $px=2\Sigma A_i$.

In cazul de față, avem

$$x=3\ ,\quad 3p=2(a+b+c).$$

1) Formulele de mai sus sunt date de BINET și HERMITE, care au simplificat alte formule, date de EULER. A se vedea o notă a D-LUI G. G. CONSTANTINESCU. G. M. vol. XLV, p. 298.

Punem

$$p - a = d \ , \quad p - b = e \ , \quad p - c = f$$

şi astfel sistemul este rezolvat.

De exemplu, dacă luăm

$$r = 2 \ , \quad s = 1,$$

găsim

$$a = 34 \ , \quad b = 8 \ , \quad c = 44 \ , \quad h = 50$$

sau, simplificând prin 2,

$$a = 17 \ , \quad b = 4 \ , \quad c = 22 \ , \quad h = 25.$$

Pentru a avea întregi, să înmulţim aceste numere cu 3, deci

$$a = 51 \ , \quad b = 12 \ , \quad c = 66 \ , \quad h = 75 \ , \quad p = 86.$$

Obţinem soluţia

$$51 + 12 + 66 = 35 + 74 + 20,$$

$$51^2 + 12^2 + 66^2 = 35^2 + 74^2 + 20^2,$$

$$51^3 + 12^3 + 66^3 = 75^3.$$

Notă 1°. De această problemă s'a ocupat numai D-l GEORGE M. DUMITRESCU, care calculează produsul *abc* în funcţie de *d, e, f*, ajungând la concluzia că *a, b, c*, sunt rădăcinile unei ecuaţii de gradul al treilea, fără să se întrebe însă dacă această ecuaţie are rădăcinile întregi, ceeace constitue toată dificultatea problemei.

2°. Soluţia D-lui A. MOESSNER nu este cea generală. Pentru ecuaţia a treia D-sa dă în adevăr, soluţia generală. Mai departe însă, D-l A. MOESSNER nu face de cât să arate că, având trei numere *a, b, c*, putem găsi alte trei, *d, e, f*, care să satisfacă primele două ecuaţii, dar aceasta nu însemnează că nu mai sunt şi altele.

Totuşi soluţia generală a problemei este uşor de obţinut, complectând puţin rezultatele D-LUI A. MOESSNER.

In adevăr, odată determinată soluţia generală *a, b, c, h* a ultimei dintre ecuaţiile propuse, rămâne să se găsească toate numerele *d, e, f*, care, împreună cu *a, b, c*, să satisfacă primele două ecuaţii propuse. Ori această problemă este un caz particular al alteia, mai generală, ce am rezolvat în articolul „*Egalităţile multigrade*", G. M., vol. XLV, pag. 127 şi urm. Din teorema generală, enunţată în acel articol, pag. 130, rezultă că sistemul primelor două ecuaţii date, admite soluţii întregi, cu *a, b, c*, daţi, când

$$6\,(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = v^2 + 3u^2,$$

unde u şi v sunt întregi. Ori expresia de mai sus se poate scrie

$$v^2 + 3u^2 = (2a - b - c)^2 + 3\,(b - c)^2 = (2b - c - a)^2 + 3\,(c - a)^2$$

$$= (2c - a - b)^2 + 3\,(a - b)^2$$

şi mai pot fi eventual şi alte descompuneri de aceeaşi formă. Efectuând calculele, pentru formele de mai sus, găsim că d, e, f sunt egale, într'o ordine oarecare, cu a, b, c sau cu $p-a, p-b, p-c$, adică regăsim soluţia D-LUI A. MOESSNER, dar este posibil să mai fie şi altă soluţie, dată de o nouă descompunere de forma v^2+3u^2.

Astfel, în cazul exemplului D-LUI A. MOESSNER, $a=51$, $b=12$, $c=66$, găsim

$$v^2+3u^2=24^2+3\cdot 54^2=69^2+3\cdot 39^2=93^2+3\cdot 15^2$$

$$=57^2+3\cdot 45^2=39^2+3\cdot 51^2=96^2+3\cdot 6^2.$$

Primele trei descompuneri dau pentru d, e, f, numerele 35, 74, 20, într'o ordine oarecare. Celelalte mai dau soluţia $d, e, f=62, 56, 11$, într'o ordine oarecare.

Problema propusă este astfel rezolvată prin *soluţia generală a sistemului dat este dată de* (1), *precum şi de*

$$(2)\qquad d=\frac{A\pm v}{3},\quad e=\frac{a+b+c+u-d}{2},\quad f=\frac{a+b+c-u-d}{2}$$

În care u *şi* v *sunt daţi în toate modurile posibile de*

$$(3)\qquad 6(a^2+b^2+c^2)-2(a+b+c)^2=v^2+zu^2,$$

r şi s fiind întregi arbitrari.

M. G.

PROBLEMA 5020. *În triunghiul isoscel* BAC *paralelele duse din un punct* M, *luat pe baza* BC, *la cele două laturi* AB *şi* AC, *taie aceste laturi în punctele* N *şi* P.

Să se afle locul geometric al simetricului punctului M *în raport cu dreapta* NP, *când* M *descrie dreapta indefinită* BC.

LT. C. N. AVRAM.

Soluţie dată de D-l MIRCEA V. POPIŞCĂ (Liceul Militar Cernăuţi).

Fie S simetricul lui M faţă cu NP. Triunghiurile ANS şi APS sunt egale, având $\overline{AS}$ latură comună,

$$\overline{AN}=\overline{SP}\ (\text{deoarece } \overline{AN}=\overline{MP}=\overline{SP}),$$

$$\overline{NS}=\overline{AP}\ (\text{deoarece } \overline{NS}=\overline{NM}=\overline{AP}).$$

Rezultă egalitatea unghiurilor ANS, APS — exterioare triunghiurilor isoscele BNS, SPC, deci asemănarea acestor două triunghiuri isoscele, de unde

$$\sphericalangle ABS = \sphericalangle ACS$$

şi locul punctului S este cercul circumscris triunghiului ABC.

Soluţii apropiate date de D-nii: MIRCEA D. POPA (Liceul Militar Iaşi), CONSTANTIN PANTELIMON (Liceul Militar Iaşi), VIRGIL S. RAICU, CONSTANTIN V. DIACONESCU (Liceul Militar Ştefan cel Mare, Cernăuţi).

Soluţii analitice date de D-nii: ŞERBAN A. TEODOR (student-inginer), ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova), IOAN V. JAREGHIE (Lic. Militar Iaşi), GHEORGHE M. DUMITRESCU (Absolvent liceu Bucureşti) şi E. N. WEGENER (Bucureşti).

C. I. B.

PROBLEMA 5045. *Dacă* $P_x(y)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* y *din şirul natural al primelor* x *numere, să se arate că:*

$$P_{2n}(n) = Mn + 1.$$

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

Dacă $I_{2n}(n)$ reprezintă numărul numerelor prime cu n din şirul de numere naturale până la $2n$, atunci avem:

$$I_{2n}(n) = 2 \cdot I_n(n) = 2 \cdot \varphi(n).$$

Fie deci:

$$p_1, p_2, \ldots p_{\varphi(n)}, \ldots p_{2\varphi(n)}$$

numerele prime cu n şi mai mici ca $2n$, unde $p_1 = 1$ şi $p_{2\varphi(n)} = 2n - 1$, atunci dacă împărţim prin n numerele:

$$p_{\varphi(n)+1}, \; p_{\varphi(n)+2}, \ldots p_{2\varphi(n)}$$

care sunt mai mari ca n, resturile împărţirii vor fi într'o ordine oarecare:

$$p_1 \cdot p_2, \ldots p_{\varphi(n)}.$$

Ştim însă că:

1) $$p_1 \cdot p_2, \ldots p_{\varphi(n)} = Mn \pm 1.$$

Apoi cum:

2) $$p_{\varphi(n)+1} \cdot p_{\varphi(n)+2} \ldots p_{2\varphi(n)} = Mn + p_1 \cdot p_2 \ldots p_{\varphi(n)}.$$

Prin urmare:

$$P_{2n}(n) = p_1 \cdot p_2 \ldots p_{\varphi(n)} \ldots p_{2\varphi(n)} = Mn + [p_1 \cdot p_2 \ldots p_{\varphi(n)}]^2 = Mn + 1.$$

D-l P. P. DRĂGHICESCU (Liceul Militar, Iaşi) a trimis o bună soluţie.

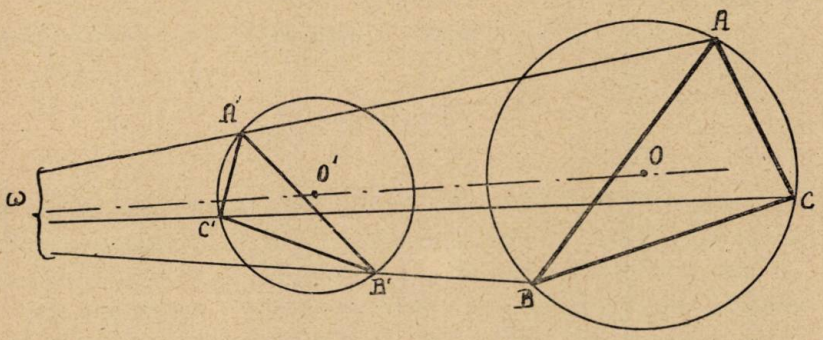
I. L.

PROBLEMA 5155. 1°. *Ce condiţie trebue să îndeplinească două triunghiuri* ABC *şi* A'B'C', *pentru ca patrulaterele* ABA'B', BCB'C', CAC'A' *să fie inscriptibile?*

2°. *Fiind dat un triunghiu* ABC, *să se arate cum poate fi construit un triunghiu* A'B'C' *îndeplinind condiţiunile de mai sus.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nii: PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iaşi) şi IULIAN PETRESCU (liceul Gh. Lazăr Bucureşti).



1°. Patrulaterele ABA'B', BCB'C', CAC'A' fiind inscriptibile rezultă că axele radicale ale acestor cercuri, luate câte două, se întâlnesc în centrul radical ω. Insă axele radicale sunt: BB', CC' şi AA' şi atunci cele două triunghiuri ABC şi A'B'C' sunt omologice, cu centrul de omologie în ω.

Se observă apoi că:

$$\overline{\omega A} \cdot \overline{\omega A'} = \overline{\omega B} \cdot \overline{\omega B'} = \overline{\omega C} \cdot \overline{\omega C'} = k$$

ceea ce arată că A'B'C' este transformatul prin inversiune al triunghiului ABC, centrul de inversiune fiind ω.

2°. Fiind dat ABC, vom alege arbitrar pe B' şi C' pe un cerc ce trece prin punctele B, C. Ducem apoi cercurile ABB' şi ACC' care prin intersecţia lor ne dă punctul A'.

Observaţiuni. 1°. Niciunul din rezolvitori nu a privit problema şi pe altă faţă. Anume să considerăm şi cercurile circumscrise O şi O' ale triunghiurilor ABC şi A'B'C'. Punctele ACC'A' fiind conciclice, dreptele AC şi A'C' se întâlnesc pe axa radicală a cercurilor O şi O'. La fel şi perechile de drept AB, A'B', apoi BC, B'C'. Deci axa de omologie a celor două triunghiuri este *axa radicală a cercurilor circumscrise* triunghiurilor ABC şi A'B'C'.

Se mai observă apoi că punctele A, A'; B, B' şi C, C' sunt antiomoloage pe cele două cercuri, iar dreptele care le unesc se întâlnesc în *centrul de asemănare* al celor două cercuri. Deci centrul de omologie al celor două triunghiuri este şi centrul de asemănare al cercurilor circumscrise lor.

Fiind dat ABC, rezultă atunci că putem duce un cerc O' arbitrar, determinăm centrul de asemănare ω al cercurilor O şi O' apoi ducem dreptele ωA, ωB, ωC. Acestea taie cercul O' în şase puncte dintre care 3 sunt omoloagele lui A, B, C şi 3 sunt antiomoloagele lor. Ultimele 3 puncte formează triunghiul A'B'C'.

2°. Corespondenţii noştri ar putea studia construcţia triunghiului A'B'C' când condiţiile sunt mai strânse decât în problema de faţă. De ex. laturile triunghiului A'B'C' să aibă direcţii date sau vârfurile să îndeplinească anumite condiţii.

Dacă primim studii interesante în acest sens le vom publica cu plăcere.

G. D. S.

PROBLEMA 5455. *Fie patrulaterul inscriptibil* BCDE *ale cărui diagonale se taie în punctul* I. *Fie încă intersecţiile* A *şi* A_1 *ale perechilor de drepte* (BC, DE) *şi* (BE, DC); ω *şi* ω_1 *punctele* MIQUEL *ale patrulaterelor* ABIE *şi* A_1DIE; *tangentele duse în la cercurile* BIC, DIE, BIE, CID *taie dreptele* AC, AD, A_1B, A_1C *respectiv în punctele* M, N, M_1, N_1; *tangentele duse în punctul* A *la cercurile* ABD, AEC *taie dreptele* IB, IE *în punctele* P, Q, *iar tangentele duse în punctul* A_1 *la cercurile* A_1BD, A_1EC *taie dreptele* ID, IE *în punctele* P_1, Q_1. *Să se arate că:*

1°. *Punctele* A, I, ω *sunt colineare. De asemenea punctele* A_1, I, ω_1.

2°. *Patrulaterul* $AA_1\omega\omega_1$ *este inscriptibil.*

3°. *Dreptele* MN *şi* PQ *se taie pe dreapta* AI; *dreptele* M_1N_1 *şi* P_1Q_1 *se taie pe* A_1I.

4°. *Punctele* M, N, M_1, N_1 *sunt colineare.*

5°. *Dreptele* PQ *şi* P_1Q_1 *se taie pe dreapta* AA_1.

HORIA M. BODNĂRESCU.

Soluție dată de D-nii: S-LT. CONSTANTIN PANTELIMON (Reg. 9 A. A. Ploești), P. P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iași) și MIRCEA D. POPA (Șc. Ofițeri Artilerie, Pitești).

1°. Punctul A se găsește pe axa radicală $I\omega$ a cercurilor BIC, DIE pentrucă

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE}.$$

Analog A_1 se găsește pe $I\omega_1$.

2°. Din cauza patrulaterelor inscriptibile formate avem

$$\overline{I\omega} \cdot \overline{IA} = \overline{IB} \cdot \overline{ID} = \overline{IC} \cdot \overline{IE} = \overline{I\omega_1} \cdot \overline{IA_1}$$

deci patrulaterul $AA_1\omega\omega_1$ este inscriptibil.

3°. Avem egalitățile de unghiuri [1])

$$\sphericalangle BIM = \sphericalangle BCI = \sphericalangle BDE$$

deci $IM \parallel AD$. In mod asemănător arătăm că $IN \parallel AC$. Deci figura AMIN este un paralelogram și MN trece prin mjlocul lui AI. De asemenea

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle BDA = \sphericalangle BCE$$

deci $AP \parallel CE$ și în mod asemănător arătăm că $AQ \parallel BD$; deci figura APIQ este un paralelogram, deci dreapta PQ trece prin mijlocul segmentului $\overline{AI}$. In mod analog, dreptele M_1N_1 și P_1Q_1 se întâlnesc în mijlocul segmentului $\overline{A_1I}$

4°. Se știe că fascicolul (AB, AI, AE, AA_1) este armonic; cum razele AM, AI, AN taie dreapta MN în părți egale, rezultă că $MN \parallel AA_1$. In mod analog arătăm că $M_1N_1 \parallel AA_1$; deci punctele M, N, M_1, N_1 se găsesc pe dreapta ce unește mijloacele segmentelor IA și IA_1.

5°. Fascicolul (IB, IA, IE, IA_1) este armonic și raționând ca mai sus deducem că dreptele PQ și IA_1 sunt paralele; deci PQ care trece prin mijlocul segmentului $\overline{IA}$ trece și prin mijlocul segmentului $\overline{AA_1}$. In mod analog, P_1Q_1 trece prin mijlocul segmentului $\overline{AA_1}$.

Notă. Redactarea pentru punctele 1° și 2° e ca în soluția D-lui P. P. DRĂGHICESCU; ultimele trei puncte sunt redactate după soluția autorului.

---

1) Pentru unele cazuri de figură unghiurile pot deveni suplimentare, în loc de egale; soluția nu suferă decât o ușoară adaptare.

PROBLEMA 5587. *Să se simplifice expresia*

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}-\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}-3}}{\sqrt[3]{4}-1}$$

G-L GH. BUICLIU.

I. *Soluţie.* Immulţim şi împărţim fracţia cu $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ şi avem succesiv:

$$E=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1)}-\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}}{(\sqrt[3]{2^2}-1)\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}}$$

sau

$$E=\frac{\sqrt[3]{2-1}-\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2^2}-2\sqrt[3]{2}+1)}}{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2^2}-1)^3(\sqrt[3]{2}-1)}}=$$

$$\frac{1-\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2^2}-6\sqrt[3]{2}+3}}{\sqrt[3]{(2^2-6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}-1)}}$$

sau

$$E=\frac{1-\sqrt[3]{2^2-6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2^2}-1}}{\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1)}}=\frac{1-\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2^2}-1)^3}}{\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^3}}.$$

De unde

$$E=\frac{1-\sqrt[3]{2^2}+1}{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)}=\frac{2-\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)}=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

G. GH. DONŢU
Liceul de Aplicaţie, Iaşi.

II. *Soluţie* dată de D-nii: MIREL STOENESCU (Bucureşti), P. P. DRĂGHICESCU, MIRCEA BÂRZESCU, N. GANEA, D. NACHE, (Lic. militar Iaşi), GH. D. OPREA, I. GR. ENĂCHESCU (Lic. militar, Timişoara).

Observând că

$$(\sqrt[3]{4}-1)^3 = 3(\sqrt[3]{2}-1) \quad \therefore \quad (\sqrt[3]{2}-1)^3(\sqrt[3]{2}+1)^3 = 3(\sqrt[3]{2}-1)^2$$

şi că

$$(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1) = 1$$

scoatem

$$\sqrt[3]{2}-1 = \frac{3}{(\sqrt[3]{2}+1)^3} \quad \text{şi} \quad \sqrt[3]{4}-1 = \frac{3}{(\sqrt[3]{2}+1)^2}.$$

Ducem valoarea acestor expresii în E şi obţinem după facerea calculelor rezultatul dela prima soluţie.

Au dat foarte bune soluţii analoage cu soluţia II, D-nii: ALFONS IFRIM (Lc. militar, Iaşi); A. H. CUBAT (Lc. de aplicaţii, Iaşi); MIRCEA C. MANOLACHE (Lc. internat, Iaşi) şi AD. I. POPESCU.

PROBLEMA 5610. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\frac{x^4+y^4}{a^4+b^4} = \frac{(x-y)^4}{(a-b)^4} \quad ; \quad ax+by = c.$$

I. I. STAMATE.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU (liceul militar, Iaşi), LT. M. GRUMĂZESCU, GEORGE M. NICOLAE (Colegiul Naţional „Carol I", Craiova), GEORGE GH. DONŢU (clasa a VII-a liceul de Aplicaţie, Iaşi), I. GR. ENĂCHESCU (clasa a VII-a liceul militar, Timişoara), D-TRU GH. VASILIU, NICOLAE N. POPA, MIHAI ANDREESCU (elevi clasa a VI-a liceul militar, Iaşi).

Prima ecuaţie se mai scrie

$$(x^4+y^4)(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4) =$$
$$= (a^4+b^4)(x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4).$$

Termenul $(x^4+y^4)(a^4+b^4)$ găsindu-se în ambele părţi ale ecuaţiei se reduce şi rămâne:

$$(1) \quad \begin{cases} ab(2a^2-3ab+2b^2)x^4 - 2(a^4+b^4)x^3y + \\ \qquad +3(a^4+b^4)x^2y^2 - 2(a^4+b^4)xy^3 + \\ +ab(2a^2-3ab+2b^2)y^4 = 0. \end{cases}$$

Impărţim cu y^4 şi căpătăm o ecuaţie reciprocă în $\frac{x}{y} = z$. Dacă notăm pentru uşurinţă $ab(2a^2-3ab+2b^2) = A$ şi $a^4+b^4=B$ atunci (1) se scrie sub forma:

$$Az^4 - 2Bz^3 + 3Bz^2 - 2Bz + A = 0$$

în care împărţind cu z^2 şi punând $z + \frac{1}{z} = t$, căpătăm:

$$At^2 - 2Bt + 3B - 2A = 0$$

cu rădăcinile:

$$t = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 3AB + 2A^2}}{A} = \frac{B \pm \sqrt{(B-A)(B-2A)}}{A}.$$

Insă $B - A = (a^2 - ab + b^2)^2$ şi $B - 2A = (a - b)^4$, aşa încât rădăcinile sunt:

$$t_1 = \frac{a^2+b^2}{ab} \quad ; \quad t^2 = \frac{3a^2 - 4ab + 3b^2}{2a^2 - 3ab + 2b^2}.$$

Rezultă:

$$(2) \quad z + \frac{1}{z} = \frac{a^2+b^2}{ab} \quad \text{şi} \quad z + \frac{1}{z} = \frac{3a^2 - 4ab + 3b^2}{2a^2 - 3ab + 2b^2}.$$

Gonind numitorii la prima ecuaţie obţinem:

$$abz^2 - (a^2 + b^2)z + ab = 0$$

cu rădăcinile $z_1 = \frac{a}{b}$, $z_2 = \frac{b}{a}$. Deoarece $z = \frac{x}{y}$, înseamnă că ecuaţia (1) are factorii $(bx - ay)$ şi $(ax - by)$.

A doua ecuaţie din (2) se poate scrie, revenind la necunoscutele x şi y:

$$(2a^2-3ab+2b^2)x^2-(3a^2-4ab+3b^2)xy+(2a^2-3ab+2b^2)y^2=0$$

care este cel de al treilea factor al ecuaţiei (1).

In definitiv rezolvarea sistemului propus se reduce la rezolvarea următoarelor sisteme:

$$\text{I} \begin{cases} ax - by = 0 \\ ax + by = c \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} bx - ay = 0 \\ ax + by = c \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} (2a^2 - 3ab + 2b^2)x^2 - (3a^2 - 4ab + 3b^2)xy + \\ \qquad + (2a^2 - 3ab + 2b^2)y^2 = 0 \\ ax + by = c. \end{cases}$$

Sistemul (I) ne dă soluția:

$$(3) \qquad x_1 = \frac{c}{2a} \quad , \quad y_1 = \frac{c}{2b}.$$

Sistemul (II) ne dă soluția:

$$(4) \qquad x_2 = \frac{ac}{a^2+b^2} \quad , \quad y_2 = \frac{bc}{a^2+b^2}.$$

Prima ecuație din sistemul (III) se mai scrie:

$$2(b^2x^2 + a^2y^2) - 3(ax + by)(bx + ay) + 2(ax + by^2) = 0$$

sau ținând seama de a doua ecuație a sistemului:

$$2(b^2x^2 + a^2y^2) - 3c(bx + ay) + 2c^2 = 0$$

la care se adaogă $ax + by = c$. Deducem $y = \frac{c - ax}{b}$, care dus în ecuația de mai sus ne dă:

$$2(a^4 + b^4)x^2 - c(4a^3 + 3b^3 - 3a^2b)x + c^2(2a^2 - 3ab + 2b^2) = 0$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt:

$$(5)\begin{cases} x_{3,4} = c \cdot \dfrac{4a^3+3b^3-3a^2b \pm ib(a-b)\sqrt{7a^2-10ab+7b^2}}{4(a^4+b^4)}. \\ y_{3,4} = c \cdot \dfrac{4b^3+3a^3-3ab^2 \mp ia(a-b)\sqrt{7a^2-10ab+7b^2}}{4(a^4+b^4)}. \end{cases}$$ Rezultă:

Soluțiile sistemului sunt date de (3), (4) și (5). S'a pus în evidență în (5) faptul că rădăcinile sunt imaginare (deoarece $7a^2 - 10ab + 7b^2 > 0$).

Soluție dată de D-nii: SLT. M. AL. VASILESCU-STABU, NICOLAE ROȘU, CORNELIU BRIGHIU (elevi clasa a V-a liceul militar, Iași), E. WEGENER (București), V. D. PĂLĂCEANU (Lic. Militar, Timișoara) și C. PANTELIMON.

Din sistemul dat, prima ecuație se mai scrie:

$$\frac{x^4+y^4}{a^4+b^4} = \frac{x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4}{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4} =$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + y^4}{a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 - 2ab^3 + b^4}.$$

Ultima fracție rezultă din suma numărătorilor către suma numitorilor, simplificată cu 2 și se poate pune sub formă de patrat, astfel încât putem scrie:

$$\frac{(x-y)^4}{(a-b)^4} = \frac{(x^2-xy+y^2)^2}{(a^2-ab+b^2)^2}$$

care se desface în:

$$(6)\quad \frac{(x-y)^2}{(a-b)^2} = \frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2} \text{ și } \frac{(x-y)^2}{(a-b)^2} = -\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}.$$

Făcând în prima ecuație diferența numărătorilor și a numitorilor putem scrie succesiv:

$$\frac{(x-y)^2}{(a-b)^2} = \frac{xy}{ab} = \frac{4xy}{4ab} = \frac{(x+y)^2}{(a+b)^2}.$$

Și se desface în

$$(7)\quad \frac{x-y}{a-b} = \frac{x+y}{a+b} \text{ și } \frac{x-y}{a-b} = -\frac{x+y}{a+b}$$

ecuații care împreună cu $ax + by = c$ ne duc la soluțiile (3) și (4).

A doua ecuație din (6) ne conduce la sistemul (III) cu soluțiile (5).

Observare. 1. Rezolvitorii dela prima soluție, afară de D-l P. P. Drăghicescu, au descompus ecuația (1) în factori prin grupări de termeni, fără a folosi faptul că ecuația e reciprocă.

2. Soluțiile imaginare sub forma definitivă (5) au fost date numai de D-l Lt. M. Grumăzescu.

3. S'au primit și *patru* soluții greșite, una cu o eroare de calcul care a schimbat soluțiile, însă două din ele cu grave erori de fond, deși vin dela corespondenți cunoscuți. Iată una din soluții: „Ținând seama de proprietățile rapoartelor ecuația

$$\frac{x^4+y^4}{a^4+b^4} = \frac{(x-y)^4}{(a-b)^4}$$

se poate înlocui cu rapoartele $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ şi în cazul acesta avem de rezolvat următorul sistem $ax + by = c$, $bx = ay$ şi găsim rădăcinile

$$x = \frac{ac}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{bc}{a^2 + b^2}.$$

Aceasta e toată soluţia!

In cealaltă soluţie se scrie

$$\frac{x^4 + y^4}{a^4 + b^4} = \frac{x^4}{a^4} = \frac{y^4}{b^4}$$

etc. Autorul găseşte numai soluţiile (3) şi (4), apoi vrea să dea o interpretare geometrică şi spune că prima ecuaţie a sistemului propus reprezintă o cuartică, iar dreapta $ax + by = c$ o taie numai în două puncte (câte a găsit) şi deci este bitangentă cuartică.

Ţin să lămuresc că prima ecuaţie a sistemului propus e omogenă în x şi y şi deci nu poate reprezenta *o cuartică veritabilă* ci se desface în *patru* drepte ce trec prin origină

Din soluţia dată se vede că două din aceste drepte sunt reale şi două imaginare.

G. D. S.

PROBLEMA 5665. *O persoană ţine în mâni un teanc de cărţi egale între ele, de greutate 0,5 kg, de lăţime a cotorului $l = 4$ cm, de înălţimea a cotorului $h = 14$ cm.*

Cărţile sunt alăturate una lângă alta cu lungimea orizontală şi înălţimea verticală. Presiunea mâinilor e reprezentată prin câte o forţă orizontală de 10 kg, aplicată la 3,5 cm de extremitatea de sus a cărţilor, pe cele 2 cărţi care sunt la extremităţile teancului.

Coeficientul de frecare maxim (acelaşi între 2 cărţi ca şi între cărţi şi mâni) este 0,3.

Să se determine numărul maxim de cărţi ce poate fi ţinut în mâni în acest mod.

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-l NICOLAE VERNESCU (Politehnica Bucureşti).

Forţele de frecare care se nasc între mâni şi cărţi vor fi verticale şi egale fiecare cu $0{,}3 \times 10 = 3$ kg. Ele ar putea ţine în echilibru o greutate de $2 \times 3 = 6$ kg, adică 12 cărţi. Să studiem dacă acest lucru e posibil.

Ne vom ocupa de volumele dela mijlocul teancului notându-le cu 1 şi 1′ (fig. 1). Se vede că în virtutea simetriei între cele 2 volume nu pot exista forţe de frecare, căci ele ar trebui conform principiului acţiunii şi reacţiunii să fie de sens contrar.

Luând partea din stânga a teancului şi scriind ecuaţiile de echilibru, se vede că pentru ca ecuaţia momentelor să fie satisfăcută, forţa de sprijin dintre volume se urcă la dreapta pentru volumul k, cu distanţa x_k faţă de forţa din stânga. Vom avea figura 1 în care pentru simplificare nu s'au mai trasat volumele II, III, IV.

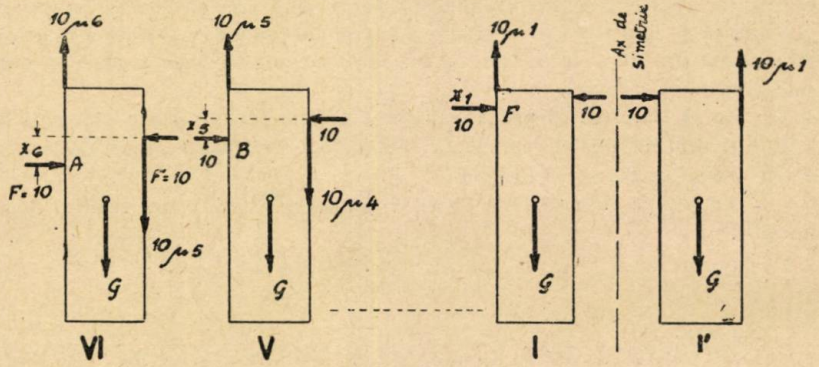


Fig. 1

Ecuaţiile de echilibru pentru volumele I, II ... VI vor fi notând cu μ_k coeficientul de frecare şi proiectând pe o axă verticală:

$$10\mu_1 = 0{,}5 \; ; \; 10\mu_2 = 0{,}5 + 0{,}5 \; ; \; 10\mu_3 = 0{,}5 + 0{,}5 + 05 = 3 \times 0{,}5$$
$$10\mu_4 = 4 \times 0{,}5 \; ; \; 10\mu_5 = 5 \times 0{,}5 \; ; \; 10\mu_6 = 6 \times 0{,}5.$$

De unde găsim

$$\mu_1 = 0{,}05 \; ; \; \mu_2 = 0{,}1 \; ; \; \mu_3 = 0{,}15 \; ; \; \mu_4 = 0{,}20 \; ; \; \mu_5 = 0{,}25 \; ; \; \mu_6 = 0{,}30.$$

Luând momentele faţă de punctele indicate în fig. 1, avem:

$$\mathfrak{M}_A = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}25 - 10 \times x_6 = 0$$
$$\mathfrak{M}_B = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 2 - 10 \times x_5 = 0$$
$$\mathfrak{M}_C = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 1{,}5 - 10x_4 = 0$$
$$\mathfrak{M}_D = 2 \times 0{,}2 + 4 \times 1 - 10x_3 = 0$$
$$\mathfrak{M}_E = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}5 - 10x_2 = 0$$
$$\mathfrak{M}_F = 2 \times 0{,}5 - 10x_1 = 0.$$

De unde găsim

$x_6 = 1{,}1$; $x_5 = 0{,}9$; $x_4 = 0{,}7$; $x_3 = 0{,}5$; $x_2 = 0{,}3$; $x_1 = 0{,}1$

și $$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 3{,}6\text{cm} > 3{,}5\text{cm}.$$

Deci nu pot fi 12 cărți.

Cercetând cazul a 11 cărți se vede că în virtutea simetriei asupra cărții din mijloc forțele verticale vor lucra ca în figura 2.

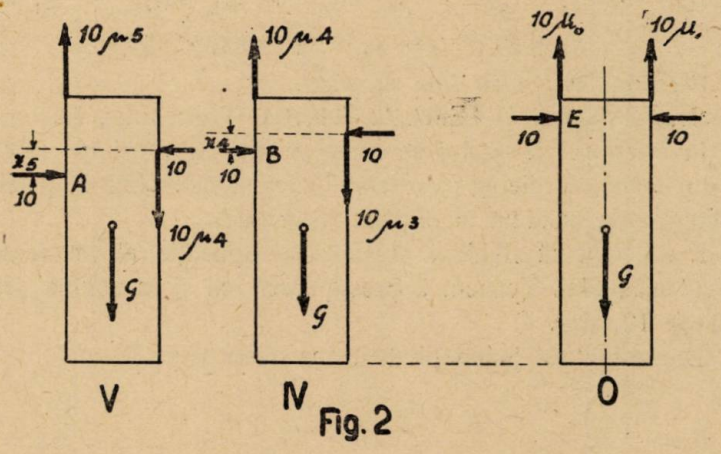


Fig. 2

Scriind echilibrul acestor forțe verticale asupra volumului din mijloc, găsim :

$$20\mu_0 = 0{,}5 \qquad \mu_0 = 0{,}025.$$

De asemenea echilibrul forțelor verticale pentru celelalte volume (fig. 2) ne dă

$$10\mu_1 = 0{,}5 + 0{,}25 \qquad \mu_1 = 0{,}075$$

$$10\mu_2 = 0{,}5 + 0{,}75 \qquad \mu_2 = 0{,}125$$

$$10\mu_3 = 0{,}5 + 1{,}25 \qquad \mu_3 = 0{,}175$$

$$10\mu_4 = 0{,}5 + 1{,}75 \qquad \mu_4 = 0{,}225$$

$$10\mu_5 = 0{,}5 + 2{,}25 \qquad \mu_5 = 0{,}275.$$

Luând acum momentele în raport cu punctele indicate în fig. 2 găsim

$$\mathfrak{M}_A = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 2{,}25 - 10x_5 = 0$$
$$\mathfrak{M}_B = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 1{,}75 - 10x_4 = 0$$
$$\mathfrak{M}_C = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 1{,}25 - 10x_3 = 0$$
$$\mathfrak{M}_D = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}75 - 10x_2 = 0$$
$$\mathfrak{M}_E = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}25 - 10x_1 = 0.$$

De unde

$x_5 = 1\text{cm}$; $x_4 = 0{,}8$; $x_3 = 0{,}6$; $x_2 = 0{,}4$; $x_1 = 0{,}2$

şi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3\text{cm} < 3{,}5$

Persoana *va putea ţine 11 cărţi.*

Soluţie dată de D-l EFTIMIE CRISTEA (Politehnica Bucureşti).

In interiorul teancului se naşte o linie de presiune. Dacă ea iese din teanc, cărţile îşi pierd stabilitatea şi cad. Linia de presiune îşi atinge cota maximă în mijlocul teancului.

E suficient să stabilim punctul de aplicaţie al presiunii în mijlocul teancului. Teancul îl presupunem ca şi în soluţia precedentă de 12 cărţi.

Din echilibrul jumătăţii de teanc avem (fig. 3).

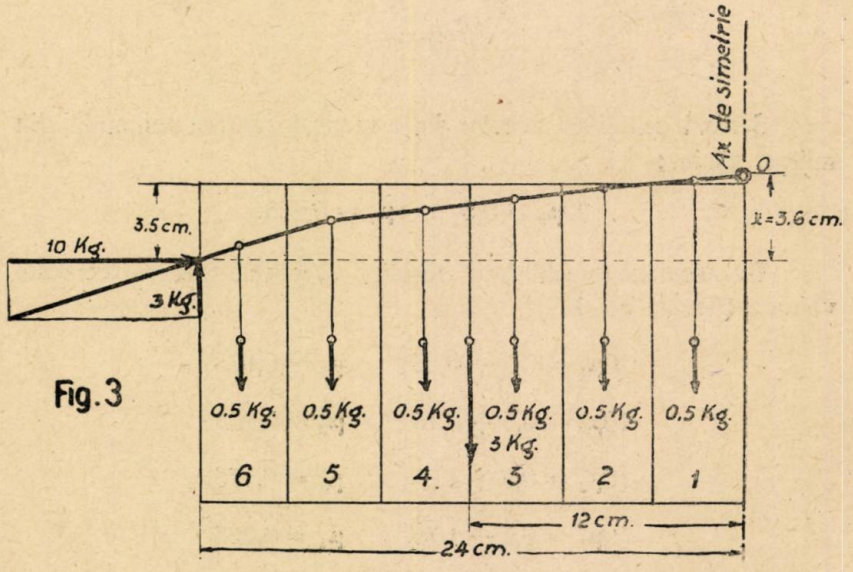


Fig. 3

$$\mathfrak{M}_0 = 10x - 3 \times 24 + 3 \times 12 = 0 \quad \therefore \quad x = 3{,}6 \text{ cm.}$$

Rezultă că linia de presiune iese din teanc.

Luând 11 cărţi (fig. 4), coeficientul de frecare va fi 0,275

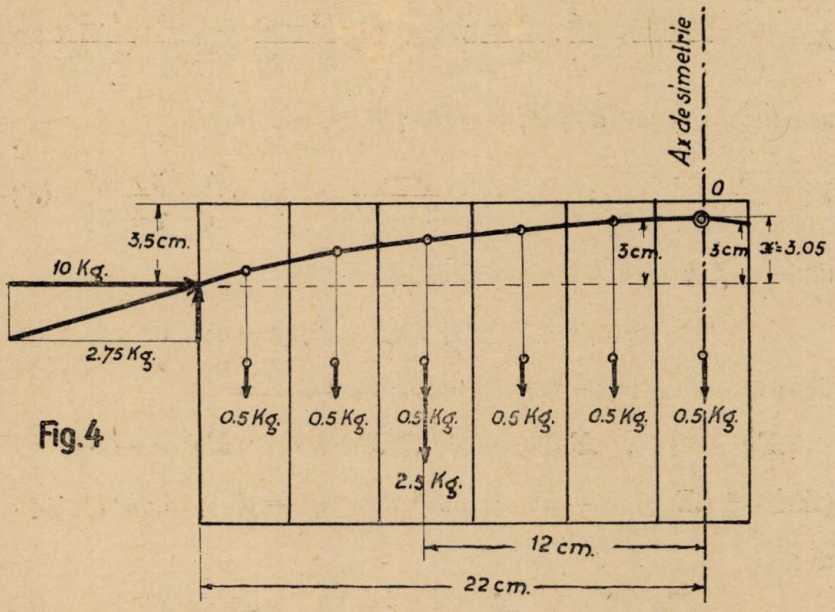


Fig. 4

$\mathfrak{M}_0 = 10x - 2{,}75 \times 22 + 2{,}50 \times 12 = 0 \quad , \quad x = 3{,}05$ cm

deci stabilitatea teancului e sigură pentru 11 cărţi.

G. Ţ.

PROBLEMA 5730. a, b, c *fiind rădăcinile ecuaţiei*

$$x^3 - px - q = 0,$$

să se afle ecuaţia ale cărei rădăcini sunt

$$\frac{a^2}{bc} \cdot \frac{a^2 - bc}{b^2 + c^2} \quad , \quad \frac{b^2}{ca} \cdot \frac{b^2 - ca}{c^2 + a^2} \quad , \quad \frac{c^2}{ab} \cdot \frac{c^2 - ab}{a^2 + b^2}.$$

CPT. EUG. ŞT. IACOB.

Soluţia I. Între rădăcinile a, b, c ale ecuaţiei date avem relaţiile cunoscute

$$\Sigma a = 0 \quad ; \quad \Sigma ab = -p \quad , \quad abc = q, \qquad (2)$$

cu ajutorul cărora, observând că $a^2 - 2bc = b^2 + c^2$, rădăcinile ecuației căutate pot fi puse sub forma

$$X_1 = \frac{a^2}{bc} \cdot \frac{a^2 - bc}{b^2 + c^2} = \frac{a^3}{q} \cdot \frac{a^3 - q}{a^3 - 2q}; \; X_2 = \frac{b^3}{q} \cdot \frac{b^3 - q}{b^3 - 2q}; \; X_3 = \frac{c^3}{q} \cdot \frac{c^3 - b}{b^3 - 2q} \quad (3)$$

sau încă, punând $\alpha = a^3$, $\beta = b^3$, $\gamma = c^3$, sub forma

$$X_1 = \frac{\alpha}{q} \cdot \frac{\alpha - q}{\alpha - 2q} \; ; \; X_2 = \frac{\beta}{q} \cdot \frac{\beta - q}{\beta - 2q} \; ; \; X_3 = \frac{\gamma}{q} \cdot \frac{\gamma - q}{\gamma - 2q}, \quad (3')$$

unde α, β, γ sunt rădăcinile ecuației

$$P(y) \equiv y^3 - 3q\,y^2 + (3q^2 - p^3)\,y - q^3 = 0, \quad (4)$$

deoarece din relațiile (2) deducem imediat

$$\Sigma a^2 = 2p \; , \; \Sigma a^2 b^2 = p^2 \; , \; \Sigma a^2 b = -\Sigma a^3 = -3q;$$

$$(\Sigma a^2 b^2)\,(\Sigma ab) = -p^3 \; ; \; \Sigma a^3 b^3 = 3q^2 - p^3 \; ; \; a^3 b^3 c^3 = q^3.$$

deci

$$\Sigma\alpha = 3q \; , \; \Sigma\alpha\beta = 3q^2 - p^3 \; , \; \alpha\beta\gamma = q^3 \quad (5)$$

Observăm însă, că în calculul coeficienților ecuației căutate, având rădăcinile (3'), intervin încă rădăcinile

$$U_1 = \frac{1}{\alpha - 2q} \; , \; U_2 = \frac{1}{\beta - 2q} \; , \; U_3 = \frac{1}{\gamma - 2q} \quad (6)$$

ale ecuației în U, care poate fi obținută din (3) prin două transformări succesive

$$Y = T + 2q \quad \text{și} \quad T = \frac{1}{U}, \quad (7)$$

anume :

$$q\,(q^2 - 2p^3)\,U^3 + (3q^2 - p^3)\,U^2 + 3q\,U + 1 = 0. \quad (8)$$

Fie ecuația căutată

$$X^3 + AX^2 + BX + C = 0,$$

unde avem succesiv

$$-A = \Sigma X_1 = \Sigma\left(1+\frac{\alpha}{q}+\frac{2q}{\alpha-2q}\right) = 3+\frac{1}{q}\Sigma\alpha+2q\,\Sigma\frac{1}{\alpha-2q}$$

$$= 6-\frac{2(3q^2-p^3)}{q^2-2p^3} = \frac{-10p^3}{q^2-2p^3}$$

$$B = \Sigma X_1 X_2 = \Sigma\,\frac{\alpha\beta(\alpha-q)(\beta-q)}{q^2(\alpha-2q)(\beta-2q)}$$

$$= \frac{U_1U_2U_3}{q^2}\cdot\Sigma\alpha\beta(\alpha-q)(\beta-q)(\gamma-2q)$$

$$= \frac{-1}{q^3(q^2-2p^3)}\Sigma\alpha\beta(\alpha\beta+q\gamma-2q^2)(\gamma-2q)$$

$$= \frac{-1}{q^3(q^2-2p^3)}\cdot\Sigma(5q^3\alpha\beta-12q^5+q^4\gamma-2q\alpha^2\beta^2),$$

dar

$$\Sigma\alpha^2\beta^2 = (\Sigma\alpha\beta)^2-2\alpha\beta\gamma(\Sigma\alpha) = 3q^4-6q^2p^3+p^6,$$

deci

$$B = \frac{p^3(2p^3-7q^2)}{q^2(q^2-2p^3)}.$$

$$-C = X_1X_2X_3 = \frac{\alpha\beta\gamma}{q^3}\cdot\frac{(\alpha-q)(\beta-q)(\gamma-q)}{(\alpha-2q)(\beta-2q)(\gamma-2q)}$$

$$= -U_1U_2U_3(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)$$

$$= \frac{P(q)}{q(q^2-2p^3)} = \frac{-qp^3}{q(q^2-2p^3)} = -\frac{p^3}{q^2-2p^3}.$$

Aşa dar ecuaţia cerută este următoarea:

$$q^2(q^2-2p^3)X^3+10p^3q^2X^2+p^3(2p^3-7q^2)X+p^3q^2=0.$$

Soluţia II-a, dată de D-l GEORGE GH. DONŢU.

Observăm că din relaţiile dintre coeficienţii şi rădăcini,

$$\Sigma a = 0\ ,\quad \Sigma ab = -p\ ,\quad abc = q \qquad (2)$$

deducem imediat

$$\Sigma a^2 = 2p\ ,\quad a^2-bc = b^2-ca = c^2-ab = p, \qquad (3)$$

deci rădăcinile ecuației căutate pot fi puse sub forma

$$y_1 = \frac{a^2(a^2-bc)}{bc(b^2+c^2)} = \frac{a^3 p}{q(2p-a^2)}\,;\; y_2 = \frac{pb^3}{q(2p-b^2)}\,;\; y_3 = \frac{pc^3}{q(2p-c^2)}, \quad (4)$$

deci ecuația căutată poate fi obținută din ecuația dată

$$x^3 - px - q = 0 \quad (1)$$

făcând transformarea

$$y = \frac{px^3}{q(2p-x^2)}, \quad (5)$$

cu alte cuvinte eliminând pe x între ecuația dată (1) și ecuația (5), adică între ecuațiile sistemului

$$x^3 - px - q = 0 \;\;,\;\; px^3 + qyx^2 - 2pqy = 0. \quad (6)$$

Intrebuințând metoda de eliminare a lui CAUCHY, obținem sistemul în x^2 și x

$$\begin{aligned} qyx^2 + p^2 x - pq(2y-1) &= 0 \\ p^2 x^2 + pq(1-y)x + q^2 y &= 0 \\ p(2y-1)x^2 - qyx - 2p^2 y &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

deci eliminantul

$$\begin{vmatrix} qy & p^2 & -pq(2y-1) \\ p^2 & pq(1-y) & q^2 y \\ p(2y-1) & -qy & -2p^2 y \end{vmatrix} = 0, \quad (8')$$

sau desvoltat după puterile lui y

$$q^2(q^2-2p^3)y^3 + 10p^3 q^2 y^2 + p^3(2p^3-7q^2)y + p^3 q^2 = 0. \quad (8)$$

Au rezolvat problema, pe diferite alte căi, Domnii: S-LT. CONSTANTIN PANTELIMON, P. P. DRĂGHICESCU, NICOLAE M. GEORGE, VLAD GH. JURIST, AUREL H. CUBAT, LUCIAN GH. MUNTEANU, CONST. I. CHIRIAC, CONST. PÂRVULESCU, IOHANNES MAHRENHOLZ, CONST. C. TINCU și MIRCEA I. PĂTRĂSCIOIU.

O. N. Ț.

PROBLEMA 5740. *Intre patratele a două numere consecutive este totdeauna cel puțin un număr prim.*

COMANDOR I LINTEȘ.

I. *Soluție* dată de D-l C. C. TINCU.

In „*Teoria Indicatorilor*“ de I. LINTEȘ, la pag. 100, se demonstrează că:

„*Intre numerele* $n(n+1)$ *și* $(n+1)^2$ *există totdeauna cel puțin un număr prim*“.

In consecință intervalul $n^2 \to (n+1)^2$ fiind mai mare decât $n(n+1) \to (n+1)^2$, va cuprinde sigur cel puțin un număr prim.

II. *Soluție* dată de D-l S. GH. MUNTEANU. Conform teoremei lui BERTRAND demonstrată de TCHEBYCEFF, între a și $2(a-1)$ există cel puțin un număr prim pentru $a \geqslant 5$.

Făcând $a = n^2$, avem:

$$2(a-1) = 2(n^2-1) > (n+1)^2$$

Adică:

$$n^2 > 2n+3$$

neegalitate adevărată pentru:

$$n > 3 \quad \text{sau} \quad n < -1.$$

Pentru $n = 1, 2, 3$ verificările sunt imediate.

Observație. Ulterior propunerii acestei probleme în *Revista Matematică* din Timișoara și într'o notă prezentată Academiei Române și Academiei de Științe din România, am demonstrat că: între n^2 și $(n+1)^2$ există cel puțin două numere prime.

I. L.

PROBLEMA 5750. *Să se găsească un număr de cinci cifre, produsul unui număr de trei cifre prin numărul obținut suprimând cifra mijlocie a acestuia, știind că numărul format de primele trei cifre ale numărului căutat este un multiplu al celui format de ultimele două (de douăzeci ori).*

M. GHERMĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: B. BEREANU, C. CHIRIAC, P. P. DRĂGHICESCU, N. ȘTEFĂNESCU, SLT. M. AL. VASILESCU-STABU, I. GR. ENĂCHESCU, M. BÂRZESCU, D. GH. VASILIU și M. CIUREANU.

Avem $N = abcde = mnp \times mp$, $abc = 20 . de$, deci $c = 0$, $ab = 2de$, așa că

$$N = 2001de = 3 \times 23 \times 29 \times de = mnp \times mp.$$

Se vede că $mp \neq de$, altfel $mnp = 2001$. Deci mp poate fi 23, 29, 3.23, 3.29, $3de$, 3α, 23α, 29α, α fiind un divizor al lui de.

Se mai vede că N se termină cu patratul cifrei p, deci $e = 1$, 4, 5, 6, 9.

Să examinăm aceste cazuri:

1°. $mp = 23$; rezultă $mnp = 2n3 = 3 \times 29 \times de = 87de$, ceea ce nu se poate căci singurul multiplu de 87 de forma $2np$ este 261.

2°. $mp = 29$; rezultă $mnp = 2n9 = 3 \times 23 \times de = 69de$, care iarăși nu se poate căci $3 \times 69 = 207$, $4 \times 69 = 276$.

3°. $mp = 3.23 = 69$; rezultă $mnp = 6n9 = 29de$, egalitate posibilă cu $de = 21$, $n = 0$, căci $609 = 29 \times 21$, și care dă soluția

$$N = 42021 = 69 \times 609.$$

4°. $mp = 3.29 = 87$; rezultă $mnp = 8n7 = 23de$, egalitate posibilă cu $de = 39$, $n = 9$, căci $897 = 23 \times 39$, așa că avem soluția

$$N = 78039 = 87 \times 807.$$

5°. $mp = 3de$; rezultă $mnp = 23 \times 29 = 667$, deci $mp = 67 \neq 3de$ căci 67 nu se divide prin 3.

6°. $mp = 3\alpha$; rezultă $mnp = 23 \times 29 \times \beta = 667 \times \beta$, unde $de = \alpha \times \beta$. Egalitatea precedentă este imposibilă, căci $667 \times \beta$ are mai mult ca trei cifre, afară de $\beta = 1$, dar atunci regăsim cazul 5°.

7°. $mp = 23\alpha$; rezultă $mnp = 3 \times 29 \times \beta = 87 \times \beta$, care arată că α poate fi 2, 3, 4, iar $\beta = 2, 3, \ldots 9$. Dacă $\alpha = 2$, $mp = 46$, $mnp = 4n6 \neq 87\beta$. Dacă $\alpha = 3$, $mp = 69$, $mnp = 6n9 = 87 \times 7 = 609$ și regăsim cazul 3°. Dacă $\alpha = 4$, $mp = 92$, $mnp = 9n2 \neq 87 \times \beta$.

8°. $mp = 29\alpha$; rezultă $mnp = 3 \times 23 \times \beta = 69 \times \beta$, care arată că α poate fi 2 sau 3. Dacă $\alpha = 2$, $mp = 58$, $mnp = 5n8 \neq 69\beta$. Dacă $\alpha = 3$, regăsim cazul 4°.

Rezultă că problema admite numai soluțiile

$$42021 = 69 \times 609 \quad , \quad 78039 = 87 \times 897.$$

Notă. 1°. Au găsit numai soluția 42021 prin încercări, D-nii M. D. COTARIU, V. PĂLĂCEANU, M. I. PĂTRĂȘCIOIU și C. C. TINCU.

2°. D-l P. P. Drăghicescu dă şi soluţiile în cazul condiţiei $abc = k \,.\, de$, unde k ia toate valorile posibile. Acestea sunt

$N = 999 \times 99 = 98901$	$(k = 989)$,	$N = 561 \times 51 = 28611$	$(k = 26)$,
$989 \times 99 = 97911$	$(k = 89)$,	$551 \times 51 = 28101$	$(k = 281)$,
$957 \times 97 = 92829$	$(k = 32)$,	$539 \times 59 = 31801$	$(k = 318)$,
$923 \times 93 = 85839$	$(k = 22)$,	$538 \times 58 = 31204$	$(k = 78)$,
$911 \times 91 = 82901$	$(k = 829)$,	$537 \times 57 = 30609$	$(k = 34)$,
$901 \times 91 = 81991$	$(k = 9)$,	$534 \times 54 = 28836$	$(k = 8)$,
$897 \times 87 = 78039$	$(k = 20)$,	$516 \times 56 = 28896$	$(k = 3)$,
$893 \times 83 = 74119$	$(k = 39)$,	$504 \times 54 = 27216$	$(k = 17)$,
$867 \times 87 = 75429$	$(k = 26)$,	$483 \times 43 = 20769$	$(k = 3)$,
$861 \times 81 = 69741$	$(k = 17)$,	$461 \times 41 = 18901$	$(k = 189)$,
$856 \times 86 = 73616$	$(k = 46)$,	$449 \times 49 = 22001$	$(k = 220)$,
$821 \times 81 = 69741$	$(k = 17)$,	$445 \times 45 = 20025$	$(k = 8)$,
$819 \times 89 = 72891$	$(k = 8)$,	$429 \times 49 = 21021$	$(k = 10)$,
$809 \times 89 = 72001$	$(k = 720)$,	$413 \times 43 = 17759$	$(k = 3)$,
$807 \times 87 = 70209$	$(k = 78)$,	$402 \times 42 = 16884$	$(k = 2)$,
$801 \times 81 = 64881$	$(k = 8)$,	$401 \times 41 = 16441$	$(k = 4)$,
$779 \times 79 = 61541$	$(k = 15)$,	$371 \times 31 = 11501$	$(k = 115)$,
$767 \times 77 = 59059$	$(k = 10)$,	$359 \times 39 = 14001$	$(k = 140)$,
$731 \times 71 = 51901$	$(k = 519)$,	$358 \times 38 = 13604$	$(k = 34)$,
$719 \times 79 = 56801$	$(k = 568)$,	$356 \times 36 = 12816$	$(k = 8)$,
$718 \times 78 = 56004$	$(k = 140)$,	$303 \times 33 = 09999$	$(k = 1)$,
$716 \times 76 = 54416$	$(k = 34)$,	$301 \times 31 = 09331$	$(k = 3)$,
$712 \times 72 = 51264$	$(k = 8)$,	$281 \times 21 = 05901$	$(k = 59)$,
$703 \times 73 = 51319$	$(k = 27)$,	$269 \times 29 = 07801$	$(k = 78)$,
$701 \times 71 = 49771$	$(k = 7)$,	$267 \times 27 = 07209$	$(k = 8)$,
$673 \times 63 = 40509$	$(k = 45)$,	$258 \times 28 = 07224$	$(k = 3)$,
$641 \times 61 = 59101$	$(k = 591)$,	$202 \times 22 = 04444$	$(k = 1)$,
$629 \times 69 = 43401$	$(k = 434)$,	$201 \times 21 = 04221$	$(k = 2)$,
$623 \times 63 = 39249$	$(k = 8)$,	$191 \times 11 = 02101$	$(k = 21)$,
$609 \times 69 = 42021$	$(k = 20)$,	$179 \times 19 = 03401$	$(k = 34)$,
$601 \times 61 = 36661$	$(k = 6)$,	$178 \times 18 = 03204$	$(k + 8)$,
$567 \times 57 = 32319$	$(k = 17)$,	$101 \times 11 = 01111$	$(k = 1)$.

3°. D-l Slt. M. Al. Vasilescu-Stabu a dat 16 din soluţiile dela punctul 2° precum şi soluţiile

$$55224 = 707 \times 78 \quad ; \quad 40509 = 643 \times 63$$

care însă nu îndeplinesc condiţia $abc = k \times de$.

4°. Tabloul de mai sus nu este complect. Iată de exemplu, soluţia:

$$501 \times 51 = 25551 \qquad (k = 5).$$

Recomandăm tratarea, într'o Notă, a cazurilor $k = 5, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19$, toate deodată, sau numai câte unele.

M. G.

PROBLEMA 5781. *O secantă variabilă dusă prin punctul fix* A *taie în* P *şi* Q *două drepte fixe* Δ *şi* Δ'.

Dacă B *şi* C *sunt simetricele lui* A *faţă de* Δ *şi* Δ', *să se afle locul geometric al intersecţiei cercurilor* APB *şi* AQC.

MIRCEA BÂRZESCU.

1. Să considerăm în primul rând punctul A în unghiul ascuţit al dreptelor Δ, Δ', iar secanta în o poziţie oarecare pentru care A este interior segmentului PQ.

Fie M al doilea punct de intersecţie al cercurilor APB şi AQC, iar O intersecţia dreptelor Δ, Δ'.

Cercurile APB şi AQC taie a doua oară respectiv dreptele Δ şi Δ' în P' şi Q'.

$\overline{PP'}$ şi $\overline{QQ'}$ fiind diametre respectiv în cercurile APB şi AQC, dreptele AP' şi AQ' sunt ambele perpendiculare în A pe secante PQ, deci dreapta P'Q' trece prin A. Unim punctul M cu B, A, C, O şi observăm că

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BMP' + \sphericalangle P'MA + \sphericalangle AMQ + \sphericalangle QMC, \quad (1)$$

dar

$$\sphericalangle BMP' = \sphericalangle BAP' = \sphericalangle P'PA = \sphericalangle P'MA, \quad (2)$$

$$\sphericalangle CMQ = \sphericalangle CAQ = \sphericalangle QQ'A = \sphericalangle QMA, \quad (3)$$

deci

$$\sphericalangle BMC = 2 \sphericalangle P'MA + 2 \sphericalangle AMQ = 2 \sphericalangle P'MQ, \quad (4)$$

De altă parte avem:

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOA + \sphericalangle COA, \quad (5)$$

iar

$$\sphericalangle BOA = 2 \sphericalangle P'OA \text{ şi } \sphericalangle COA = 2 \sphericalangle QOA, \quad (6)$$

de unde

$$\sphericalangle BOC = 2(\sphericalangle P'OA + \sphericalangle AOQ) = 2 \sphericalangle P'OQ, \quad (7)$$

dar

$$\left.\begin{aligned} &\sphericalangle P'QQ = 360^0 - \sphericalangle OP'A - \sphericalangle P'AQ - \sphericalangle OQA = \\ &= 360^0 - 90^0 - (90^0 + \sphericalangle PP'A) - (90^0 + \sphericalangle QQ'A) \\ &= 90^0 - \sphericalangle PP'A - \sphericalangle QQ'A = \\ &= 90^0 - \sphericalangle P'MA - \sphericalangle AMQ = 90^0 - \sphericalangle P'MQ, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Comparând (7) şi (8) deducem

$$\sphericalangle BOC = 180^0 - 2 \sphericalangle P'MQ \qquad (9)$$

şi ţinând seama de (4) avem

$$\sphericalangle BMC + \sphericalangle BOC = 180^0, \qquad (10)$$

adică patrulaterul OBMC este inscriptibil şi ca urmare locul punctului M este segmentul de cerc, din cercul BOC, capabil de suplementul unghiului BOC limitat la coarda BC.

In cazul figurii în care punctul A este exterior segmentului PQ, observăm ca în subcazul precedent de figură că dreapta P'Q' trece prin A şi avem

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BMA + \sphericalangle AMC = \sphericalangle BPA + \sphericalangle AQC =$$

$$= 2 \sphericalangle APP' + 2 \sphericalangle CQQ' = 2 \sphericalangle BAP' + 2 \sphericalangle CAQ' =$$

$$= 2 (\sphericalangle BAP' + \sphericalangle CAQ') = 2 (180^0 - \sphericalangle BAC)$$

$$= 2 \sphericalangle P'OQ' = \sphericalangle BOC,$$

deci punctul M aparţine segmentului de cerc BOC, capabil de unghiul BOC, limitat la coarda BC.

Aşa dar, locul punctului M, când secanta APQ ia toate poziţiile posibile, este cercul BOC.

2. Să presupunem acum punctul A în unghiul obtuz al dreptelor date Δ, Δ' şi astfel ca perpendicularele duse din A pe Δ şi Δ' sunt deoparte şi de alta a punctului O.

Să considerăm o poziţie oarecare a secantei pentru care punctul A este interior segmentului PQ.

Avem în acest subcaz relaţiile:

$$\sphericalangle BMC = 360^0 - \sphericalangle BMA - \sphericalangle CMA,$$

însă

$$\sphericalangle BMA = 180^0 - \sphericalangle BPA = 180^0 - 2 \sphericalangle OPA$$

$$\sphericalangle CMA = 180^0 - \sphericalangle CQA = 180^0 - 2 \sphericalangle OQA$$

deci

$$\sphericalangle BMC = 2 (\sphericalangle OPA + \sphericalangle OQA) = 360^0 - 2 \sphericalangle POQ$$

De altă parte

$$\sphericalangle BOP = \sphericalangle POA\,;\ \sphericalangle COQ = \sphericalangle QOA$$

deci

$$\sphericalangle BOC = 360^0 - \sphericalangle POQ - \sphericalangle POB - \sphericalangle COQ =$$

$$= 360^0 - \sphericalangle POQ - \sphericalangle POA - \sphericalangle AOQ = 360^0 - 2\sphericalangle POQ,$$

de unde rezultă că

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BOC,$$

deci punctul M se găseşte pe segmentul de cerc BOC.

Subcazul când punctul A este exterior segmentului PQ, precum şi celelalte cazuri de figură se studiază ca mai sus (cazul 1), unele relaţii suferind modificări neînsemnate.

In cazul când dreptele date Δ, Δ' sunt paralele, problema nu se mai pune, deoarece, cum este uşor de văzut, punctul M coincide în acest caz cu punctul A oricare ar fi poziţia secantei PQ, dusă prin A.

Domnul SLT. CONSTANTIN PANTELIMON a rezolvat foarte bine problema dând o soluţie aproape completă.

Domnii P. P. DRĂGHICESCU, TIBERIU TURCULEŢ şi DUMITRU NACHE au rezolvat problema considerând câte un singur caz de figură.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5879. *In cercul* O *se dau doi diametri perpendiculari* AB, CD *şi un punct oarecare* M *pe* CD. *Cercul este întâlnit în* N *de* AM *şi în* E, F *de perpendiculara în* M *pe* AN. *Fie* H *intersecţia lui* CD *cu* AF *şi* I *intersecţia cercului cu* NH. *Să se demonstreze că* NBFI *este trapez isoscel şi că* EI *este paralelă la* CD.

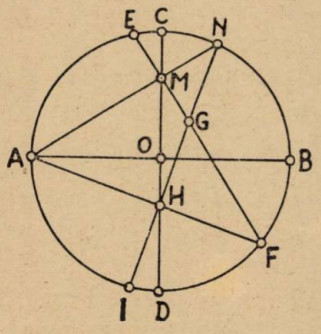
G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: S-LT. M. AL. VASILESCU-STABU, P. P. DRĂGHICESCU (Student-inginer) şi GEORGE NICOLAE (Colegiul Naţional „Carol I", Craiova).

FE este perpendiculară pe AN prin construcţie, iar BN e perpendiculară pe AN pentrucă unghiul ANB este înscris în semicerc. Rezultă că arcele EN şi BF sunt egale şi că deci

$$\measuredangle FAB = \measuredangle NFE \quad \therefore \quad \measuredangle MHA = \measuredangle MNF \qquad (1)$$

ca complimentele a două unghiuri egale. Din (1) rezultă că patrulaterul FHMN este inscriptibil şi cum unghiul din M este drept şi $\sphericalangle$FHN este drept, deci NH sau NI || BF, adică trapezul NBFI este isoscel.



Unghiurile din M şi H fiind drepte, punctul G de intersecţie ale dreptelor FM, NH este ortocentrul triunghiului ANF. Se ştie că M şi H sunt mijloacele lui GE şi GI, prin urmare EI este paralelă cu MH sau, ceea ceeste tot una, cu CD.

Au dat bune soluţii analoage, D-nii: S-LT. C. PANTELIMON; P. D. COLUMBEANU (Colegiul „N. Filipescu"); EM. E. MARINESCU (Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti); I. A. BARBU (Liceul „Ioniţă Asan", Caracal"); TR. GH. DUMITRESCU (Liceul „Traian", T.-Severin); GH. A. GRIGORE (Elev particular) şi ANDREI I. IONESCU (Liceul Internat Iaşi).

D-l G. M. NICOLAE a dat şi o soluţie analitică, ceea ce este prea complicat pentru o problemă aşa de elementară.

EXERCIŢII

39. *Să se găsească patratele de şase cifre de forma abccba.*

CPT. E. ST. IACOB.

R. Examinând ultimele 4 cifre pe care le poate avea un patrat perfect (Articolul: *Patrate isofinale*, G. M., Vol. XLIX, pag. 347) se stabilesc grupele *ccba*. De exemplu 0016,... 7769,..., 9924 etc. Apoi se scrie *ab* înaintea acestor grupe şi se obţin numere ca

$$610016,\ldots,\ 967769,\ldots,\ 429924,\ldots$$

Dintre aceste numere se găseşte soluţia

$$836^2 = 698896.$$

40. *Oricare ar fi* m *şi* n *întregi şi pozitive, să se arate că expresia:*

$$49^m + 4^{2m-n} \cdot 11^n - 16^m$$

este divizibilă cu 77 iar expresia

$$101^{2m} + 137^n \cdot 36^{2m-n} - 1296^m$$

este divizibilă cu 13837.

T. STOICESCU.

R. Pentru ca prima expresie să fie divizibilă cu 77, va trebui să fie divizibilă prin factorii 7 şi 11.

Divizibilitatea cu 7: $11^n = M7 + 4^n$; $4^{2m-n} \cdot 11^n = 4^{2m-n}(M7 + 4^n)$ $= M7 + 4^{2m} = M7 + 16^m = M7 + 2^m$ căci $16 = M7 + 2$, iar $16^m = M7 + 2^m$; deci: $49^m + 4^{2m-n} \cdot 11^n - 16^m = M7 + M7 + 2^m - M7 - 2^m = M7$.

Divizibilitatea cu 11: $49^m = M11 + 5^m$, iar $16^m = M11 + 5^m$ deci $49^m + 4^{2m-n} \cdot 11^n - 16^m = M11 + 5^m + M11 - M7 - 5^m = M11$.

Urmând acelaşi procedeu şi observând că $13837 = 101 \times 137$ găsim că expresia a doua se divide prin $M101 \times 137$.

41. *Să se discute ecuaţia:*

$$x + \frac{x(a^2+b^2) + \frac{k}{2}(a^2-b^2)}{k^2-4x^2} - c = 0$$

ştiind că a, b, c *şi* k *sunt numere date.*

T. STOICESCU.

R. Fie $f(x) = x + \frac{x(a^2+b^2) + \frac{k}{2}(a^2-b^2)}{k^2-4x^2}$; ecuaţia $f(x) - c = 0$ este de gradul al 3-lea. Dacă x tinde către $-\infty$ sau $+\infty$, $f(x)$ tinde către $-\infty$ sau $+\infty$; dacă x tinde către $-\frac{k}{2}$, $f(x)$ este infinit mare echivalent cu $-\frac{b^2}{2(k+2x)}$ care este mai mic decât zero pentru $x > -\frac{k}{2}$ şi mai mare decât zero pentru $x < -\frac{k}{2}$; dacă x tinde către $+\frac{k}{2}$, $f(x)$ este infinit mare echivalent cu $\frac{a^2}{2(k-2a)}$, mai mare decât zero pentru $x < \frac{k}{2}$ şi mai mic decât zero pentru $x > \frac{k}{2}$.

Avem tabloul semnelor lui $f(x) - c$ pentru valorile infinit mari şi cele vecine cu $\pm\frac{k}{2}$:

x	$-\infty$		$-\frac{k}{2}$		$+\frac{k}{2}$		$+\infty$
	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$		$+$

Ecuaţia $f(x) - c = 0$ are deci trei rădăcini reale, x_1, x_2, x_3 astfel ca:

$$x_1 < -\frac{k}{2} < x_2 < +\frac{k}{2} < x_3.$$

42. *Dreptunghiul* ABCD *are vârfurile* A, D *pe un cerc* O', *iar vârfurile* B, C *pe un cerc* O. *Cercurile* O', O *se taie în* T *pe latura* AB *şi în* T' *pe latura* DC *a dreptunghiului. Ştiind că dreptunghiul* TBCT' *înscris în cercul* O *are aria maximă, se cere raza cercului* O' *aşa încât dreptunghiul* ABCD *să fie echivalent cu dreptunghiul de arie maximă înscris în* O'.

GH. A. GRIGORE.

R. Fie x raza cercului O' şi A'B'C'D' dreptunghiul de arie maximă, înscris în cercul O'. Avem

$$\textit{aria}\ A'B'C'D' = \textit{aria}\ ABCD = \textit{aria}\ ATT'D + \textit{aria}\ TBCT'.$$

Din enunţ rezultă

$$A'B' \times B'C' = 2x^2 \quad \text{şi} \quad TB \times BC = 2r^2 = \overline{TB}^2 = \overline{TT'}^2$$

căci dreptunghiul de arie maximă înscris într'un cerc este patratul. Triunghiul dreptunghic ATT' dă

$$AT = \sqrt{\overline{AT'}^2 - \overline{TT'}^2} = \sqrt{4x^2 - \overline{TT'}^2}.$$

Din precedentele rezultă

$$2x^2 = \overline{AT} \cdot \overline{TT'} + TB \cdot TT' = r\sqrt{2}\sqrt{4x^2 - 2r^2} + 2r^2$$

$$\therefore \qquad x^2 = r^2 + r\sqrt{2x^2 - r^2}$$

ecuaţie care dă pe x.

43. *Să se demonstreze identitatea*

$$\operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 2^2x + \ldots + \operatorname{cosec} 2^n x = \frac{\operatorname{cosec}\frac{x}{2} - \operatorname{cosec} 2^n x}{4\operatorname{cosec}\left(2^{n+1} - 1\right)\frac{x}{2}}.$$

M. D. COTARIU.

R. Conform exerciţiului 7 din *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 141, avem

$$\sum \operatorname{cosec} 2^i x = \frac{1}{2}\sum \frac{\cos 2^i x}{\sin 2^{i+1} x} = \frac{\sin\left(2^{i+1} - 1\right)\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2} \cdot \sin 2^n x} = \frac{\operatorname{cosec}\frac{x}{2} - \operatorname{cosec} 2^3 x}{4\operatorname{cosec}\left(2^{n+1} - 1\right)\frac{x}{2}}.$$

44. *Dacă laturile unui triunghiu sunt în progresie aritmetică, atunci*

$$9\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right) - 8\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{C}{2} = 9.$$

M. COTARIU.

R. In exercițiile 12 și 19 publicate respectiv la pag. 236 și 381, Vol. XLVIII, *Gazeta Matematică* s'a demonstrat că

$$3 \sin \frac{B}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \quad \text{și} \quad \sin \frac{B}{2} 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Inmulțind a doua egalitate cu 3, apoi ridicând ambele egalități la patrat și scăzând una din alta găsim

$$9 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{C}{2} = 0$$

$$\therefore \quad 9 \left(1 - \cos^2 \frac{A}{2}\right) \left(1 - \cos^2 \frac{A}{2}\right) - \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{C}{2} = 0$$

care este tocmai relația din enunț.

45. *Să se demonstreze că*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} C_n^i = \frac{2^{n+1}}{n+1}, \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} C_n^i = 0$$

C_n^i *fiind simbolul combinărilor.*

E. N. WEGENER.

R. Avem evident identitatea

$$(1+x)^n dx = [1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots C_n^n x^n] dx$$

care prin integrare devine

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} C_n^1 + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} C_n^n$$

unde făcând $x = 1$ se găsește prima identitate.

Dacă în egalitatea precedentă facem $x = -1$, se găsește a doua identitate din enunț.

PROBLEME PROPUSE

5995. Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, știind că dacă îl scriem succesiv în sistemul zecimal și în sistemul cu baza 7, ultimele două cifre ale lui rămân aceleași.

V. THÉBAULT.

5996. Să se demonstreze că numărul $88..88_n 1$ nu este patrat perfect decât pentru $n = 1$.

G-L GH. BUICLIU.

5997. Fie în plan două triunghiuri înscrise sau circumscrise unei aceleiași conice.

Triunghiul format de dreptele ce unesc vârfurile corespunzătoare ale celor două triunghiuri este omologic cu triunghiul format de punctele de intersecție ale laturilor lor corespunzătoare.

IULIAN PETRESCU.

5998. Cercurile descrise din vârfurile triunghiului ABC, ca centre și de raze oarecare, determină trei coarde concurente. Cu extremitățile acestor coarde se pot forma patru perechi de triunghiuri omologice.

1°. Se cere să se construiască cercurile astfel încât unul din triunghiurile omologice, să se reducă la o dreaptă.

2°. Să se arate că triunghiul respectiv din perechea omologică este asemenea cu triunghiul ABC.

3°. Să se examineze cazul când trei triunghiuri din trei perechi de triunghiuri omologice, au fiecare vârfurile colineare.

G-L GH. I. POPESCU.

5999. Să se afle punctele de coordonate numere întregi, situate pe dreapta

$$3x - 5^p y + 1 = 0$$

p fiind un număr întreg și pozitiv.

I. V. MĂTIEȘ.

6000. Să se demonstreze identitățile:

1°. $C_n^1 C_{n-1}^k - 2C_n^2 C_{n-2}^{k-1} + 3C_n^3 C_{n-3}^{k-2} + \ldots + (-1)^k (k+1) C_n^{k+1} C_{n-k-1}^0 = 0$

pentru $1 \leqq k \leqq n-1$ și $C_{n-k-1}^0 = 1$.

2°. $C_n^1 C_{n-1}^k - 2^2 C_n^2 C_{n-2}^{k-1} + 3^2 C_n^3 C_{n-3}^{k-2} + \ldots + (-1)^k (k+1)^2 C_n^{k+1} C_{n-k-1}^0 = 0$

pentru $2 \leqq k \leqq n-1$ și $C_{n-k-1}^0 = 1$.

3°. $C_n^1 C_{n-1}^k - 2^p C_n^2 C_{n-2}^{k-1} + 3^p C_n^3 C_{n-3}^{k-2} + \ldots + (-1)^k (k+1)^p C_n^{k+1} C_{n-k-1}^0 = 0$

pentru $p \leqq k \leqq n-1$ și $C_{n-k-1}^0 = 1$.

Ce devine primul membru al acestei din urmă identități pentru $k < p$?

ȘERBAN GHEORGHIU.

6001. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu, avem relaţiunea

$$\Sigma\, 4\,[\sin^2 kA\,(n\sin 2kB - p\sin 2kC) + (n+p)\sin 2k(2A+C)$$
$$= 4\,(n-p)\sin kA\,\sin kB\,\sin kC$$

unde k este un număr nepereche, iar n şi p oarecare,

STELIAN CETĂŢEANU.

6002. Să se rezolve ecuaţia trigonometrică:

$$\sin x + \sec x = \cos x + \operatorname{cosec} x.$$

I. IONESCU.

6003. Să se arate că în general, există în plan, patru puncte (două reale şi două imaginare) egal depărtate de două drepte date şi de un punct dat.

Să se deducă:

Punctele A', B', C' conjugate comune punctelor A, B, C, din plan, faţă de două conice înscrise în triunghiul ABC, determină triunghiul A'B'C' conjugat celor două conice.

Triunghiul ABC este înscris şi omologic triunghiului A'B'C'.

AD. GHEORGHIU.

6004 Un tun trage în vid un proiectil cu o viteză iniţială şi un unghiu de tragere dat. Cu cât va fi sporită bătaia proiectilului, dacă la un moment dat, când proiectilul se află într'un punct pe traiectorie, i se aplică o forţă cunoscută (prin intermediul unui efect de rachetă), constantă şi dirijată de-a-lungul axului longitudinal al proiectilului şi dacă durata acţiunii acestei forţe este cunoscută.

COMANDOR I. LINTEŞ.

6005. Să se demonstreze că între tangenta T, subtangenta S_t, normala N şi subnormala S_n într'un punct la o cicloidă, avem relaţia

$$\left(\frac{S_t}{T}\right)^2 + \left(\frac{S_n}{N}\right)^2 = 1.$$

E. N. WEGENER.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

		Pag.
I. B. Florescu	O problemă cu patrate	126
M. Ghermănescu	Indicatori, puteri de numere întregi	325
I. Ionescu	$\sqrt{2}$	269
C-dor I. Linteş	Indicatori de ordin superior ale unei sume şi produs	709
C-dor I. Linteş	Indicatorul unei sume	593
C-dor I. Linteş	Operaţiuni cu numerele lui LEGENDRE	116
I. V. Măties	Patrate isofinale	397
P. Poulet	Multiperfecte şi amiabile inedite	654

2. Geometria

D. Barbilian	Cilindrul analagmatic	131
A. Dobrescu	Configuraţia formată de paralelele duse printr'un punct la laturile unui triunghiu.	272
Ad. Gheorghiu	Probleme de geometrie	336
Şerb. Gheorghiu	Asupra cercurilor de asemănare	329
I. A. Ilie	Generalizarea curbei lui DARBOUX	491
I. Ionescu	Valoarea numărului π	113
C. Ionescu-Bujor	O pagină a profesorului G. ŢIŢEICA	711
M. D. Popa	Asupra dreptei WALLACE-SIMSON	594
G-l Gh. I. Popescu	Din proprietăţile patrulaterelor complecte	57
G-l Gh. I. Popescu	O problemă din geometria triunghiului	661
I. C. Vasiliu	Extinderea în spaţiu a unei teoreme a D-lui Prof. POMPEIU	122

3. Algebra

N. T. Donciu	Asupra unei clase de identităţi algebrice	481
N. Gaiu	O aplicaţie a teoremei lui CESÀRO	712

4. Trigonometria

		Pag.
N. T. Donciu	Asupra unei metode pentru calculul unghiurilor lui EULER	413

5. Geometria analitică şi infinitezimală

P. P. Drăghicescu . . .	Despre hipocicloida lui STEINER.	719
Ad. Gheorghiu	Un şir de desfăşurate succesive	223
Şerb. Gheorghiu	Asupra hipocicloidei cu trei puncte de întoarcere	598
Oct. S. Ianculescu . . .	Formule pentru calculul suprafeţelor laterale ale solidelor rezultate din tăierea unui con circular drept cu un plan 392, 465,	537
C. Ionescu-Bujor	Asupra unor asocieri de linii şi suprafeţe .	493
N. N. Mihăileanu	Generalizări ale elipsei lui STEINER şi cubicei lui DARBOUX	666
G. D. Simionescu	O metodă pentru scrierea ecuaţiei tangentelor dintr'un punct exterior la cerc şi sferă. .	419
T. Vescan	Consideraţiuni asupra rezolvării ecuaţiei lui LAPLACE în coordonate toroidale	602

6. Mecanica

G. D. Simionescu	Forţe dirijate după laturile unui triunghiu .	25
V. Vâlcovici	O problemă de mecanică artileristică . . .	279
Cpt. I. G. Zamfirescu . .	O problemă de cinematică	73
Cpt. I. G. Zamfirescu . .	O problemă de mecanică artileristică . . .	216

7. Balistica

C-dor I. Linteş	Schiţarea unei balistice aeriene	207
S-Lt. C. Pantelimon . . .	Asupra unei teoreme a lui ROBERT-DUCHÊSNE.	219

8. Istoria Matematicilor

V. Marian	MAXIMILIAN HELL (HÖLL) şi activitatea sa la Cluj.	63

9. Diverse

G-l V. Atanasiu	Cuvântarea ţinută în şedinţa dela 29 Noembrie 1943	205
G-l Gh. Buicliu	Centenarul artileriei române.	201
I. Ionescu	Rezultatul exerciţiilor numerice abstracte .	653
Al. Stoenescu	Un an dela moartea lui A. GH. IOACHIMESCU.	381

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACȚIA ȘI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

		Pag.
∴	Lista membrilor societății *Gazeta Matematică*.	5
∴	Membri decedați	22

2. Premii și concursuri

Al. Al. Roșu și D. A. Stan	Premiile, bursele și publicațiile societății *Gazeta Matematică*	22
Al. Bunescu, I. Linteș, Cpt. Gh. I. Zamfirescu.	Raport pentru acordarea premiului „G-l Sc. Panaitescu“	30
Delegația Societății . . .	Concursul *Gazeta Matematică* din anul 1944 . . . . . 77, 338, 425,	498
O. Onicescu, Al. Pantazi.	Raport pentru decernarea premiului „Vasile Conta“	163
C. Ionescu-Bujor, Al. Pantazi	Raport pentru decernarea premiului „N. Gh. Botea“	289
G-l Gh. Buicliu, I. I. Chițulescu, I. Ionescu. . . .	Raportul comisiunii pentru premiul de aritmetică	425
I. I. Chițulescu, Al. Al. Roșu, D. Stoica. . . .	Premiul „Inginer Al. Roșu“	498
V. Alaci, Th. Angheluță, Al. Bunescu	Raport pentru acordarea premiului de algebră A. G. Ioachimescu	503
Al. V. Niculescu, Al. Pantazi	Raport asupra premiului „V. Cristescu“ .	604
I. I. Chițulescu, Al. Stoenescu, Gabriela Țițeica	Raport pentru decernarea premiului „Spiru Haret“	722

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica și Teoria numerelor

4[1])	*G-l Gh. Buicliu* . .	Factori și produse cu cifre diferite	81
13.	*G-l Gh. Buicliu* . . .	Factori și produse cu cifre diferite	237
22.	*G-l Gh. Buicliu* . . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite. . .	340
36.	*G-l Gh. Buicliu* . . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite. . .	564

1) Numerele din această coloană indică numărul de ordine al notei în Vol. XLIX.

		Pag.
44. *G-l Gh. Buicliu* . . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite. . .	670
7. *G. G. Constantinescu.*	Asupra problemei 5303	164
49. *P. P. Drăghicescu* . .	Asupra unor egalităţi multigrade	722
34. *I. B. Florescu*	Extinderi în legătură cu indicatorii	501
37. *I. B. Florescu*	Numere perfecte pare.	565
10. *M. Ghermănescu* . .	Asupra problemei 5047	167
41. *M. Ghermănescu* . . .	Asupra problemei 5363	605
1. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra problemei 3292	31
27. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra problemei 3733	427
19. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra problemei 5439	290
8. *C-dor I. Linteş* . . .	O corelaţie asupra produsului numerelor prime cu un număr dat şi inferior lui . .	164
5. *C-dor I. Linteş* . . .	O teoremă asupra numerelor prime cu un număr dat şi mai mici ca el	82
23. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra unei însumări de indicatori . . .	239
14. *C-dor I. Linteş* . . .	Numere care nu pot reprezenta indicatori .	341
9. *V. Mehedincu*	Observaţiuni asupra împrumutului reîntregirei	165
3. *A. Moessner*	Câteva identităţi curioase.	33
24. *T. Popoviciu*	Asupra notei 14 din G. M., XLIX, pag. 239.	343
45. *G. D. Simionescu* . .	O precizare asupra problemei 5288	671

2. Geometria

30. *G-l Gh. Buicliu* . . .	Relaţiuni între suprafeţe	432
46. *P. P. Drăghicescu* . .	Asupra problemei 3497	672
50. *Gh. V. Niculescu* . .	Contribuţii la geometria trapezului	725
15. *V. Thébault*	Asupra tetraedrului ortocentric	240
25. *V. Thébault*	Relaţiuni între suprafeţe de triunghiuri. . .	344

3. Algebra

51. *B. M. Bereanu* . . .	Notă asupra unui determinant.	726
20. *G. G. Constantinescu.*	Asupra criteriilor de convergenţă	292
42. *M. Cotariu*	Asupra unei formule	607
2. *C. G. Iliovici*	Valoarea numerică a polinoamelor	32
35. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra problemei 3041	504

4. Trigonometria

18. *I. S. Antoniu*	Asupra notei Nr. 27, Vol. XXXIV, pag. 294.	289
52. *Ad. Popescu*	Asupra articolului „O generalizare a sinusurilor şi cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică“.	728

5. Geometria analitică

6. *P. P. Drăghicescu* . .	O curbă ataşată unui triunghiu	82
38. *M. Ghermănescu* . . .	Asupra problemei 3573	566

		Pag.
53. *V. Ghiţescu*	Asupra exerciţiului 33, Vol. XLIX	728
47. *C. Ionescu-Bujor* . .	Asupra problemei 3573	673
15. *I. C. Vasiliu*	Asupra problemei 5179	240

6. **Mecanica**

21. *Oct. E. Gheorghiu*. .	Asupra distribuţiei vitezelor pe suprafaţa unui solid în mişcarea relativă	295
11. *V. Ghiţescu*	O demonstraţie elementară prin geometria analitică a teoremei lui VARIGNON. . . .	169

7. **Balistica**

43. *Cpt. C. Heytmanek* .	Asupra teoremei lui ROBERT-DUCHÊSNE . .	607
39. *C-dor I. Linteş* . . .	Câteva observaţiuni asupra articolului *«O problemă de mecanică artileristică»*. . .	567

8. **Diverse**

17. *G-l Gh. Buicliu* . . .	Redacţionale	289
29. *P. P. Drăghicescu* . .	Asupra problemei 5179	432
31. *M. Ghermănescu* .	Redacţionale	499
32. *I. Ionescu*	Asupra problemei 4111	499
33. *I. Ionescu*.	Cuvântul vector	500
12. *I. Ionescu*.	O erată	236
40. *I. Ionescu*.	LEIBNIZ sau LEIBNITZ	605
48. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra broşurii „Teoria indicatorilor" . . .	674
26. *T. Vescan*.	Asupra unei recenzii	426

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Examenul de admitere în Politechnica din Bucureşti . . . 505, 568, 675, 729
Examenul de astronomie la Facultatea de ştiinţe din Iaşi. 170
Examenul pentru trimis ofiţeri la studii în Germania 297, 345
Şcoala Ofiţeri de Infanterie. Examenul de admitere, Iulie 1943 242
Universitatea din Cluj. Secţia matematică dela Timişoara. Examenul din sesiunea Oct. 1942 34
Universitatea din Iaşi, sesiunea Oct. 1942 85

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări şi reviste recenzate

I, Ionescu	N. ABRAMESCU. Lecţiuni de Geometrie Analitică	731
I. Ionescu	TH. IONESCU. Cinquante ans de relations scientifiques entre les savants roumains et l'Académie des sciences de Paris	298

		Pag.
I. Ionescu	G. MIHOC. Tratat de matematici actuariale.	507
I. Ionescu	Le général V. NEGREI. Le dernier théorème de FERMAT	611
I. Ionescu	Ştiinţă şi Progres.	298

2. Lucrări nerecenzate

O. Behr	Die vollkommene deutsche Kreiszahl und die Quadratur des Kreises	87
M. Ghermănescu	Trigonometria plană şi sferică	676
I. Ionescu	Povestiri technice. Vol. I	677
V. Novacu	Introducere în Mecanica ondulatoare	677
Al. Pantazi	Elemente de geometrie diferenţială proiectivă a curbelor	39
Cpt. C-dor Gr. Zapan	Probleme rezolvate de matematici	87

3. Extrase, Suplimente, Teze

Dr. Ing. Pl. Andronescu	Calculul vectorial	433
Florica Câmpan	Surfaces parellèles et semblables	171
I. Curea	Die Horizontalseismometer der neuen Erdbebenwarte in Timişoara	676
I. Curea	Infiinţarea unei staţiuni seismice la Timişoara.	676
M. Ghermănescu	Asupra metodei părţilor proporţionale.	299
M. Ghermănescu	Sur une équation fonctionnelle qui caractérise des polynomes	299
N. N. Ghircoiaşu	O pagină de aur de istoria matematicelor	433
C-dor I. Linteş	Génie militaire. Notes sur quelques questions techniques de bouches à feu	87
C-dor I. Linteş	Le problème de la pénétration des projectiles dans un obstacle et de la perforation des blindages	507
C-dor I. Linteş	Les accélérations des projectiles dans l'âme.	171, 507
C-dor I. Linteş	Notes sur quelques questions techniques de bouches à feu	39, 87
C-dor I. Linteş	Realizările technice în artileria română în decursul timpului	731
I. I. Stamate	O problemă de aplicaţii geometrice ale analizei matematice	39
Al. Stoenescu	Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant	171
Al. Stoenescu	Sur les systèmes des forces sous l'action desquelles un mobile parcourt une trajectoire donnée	171

4. Reviste, Periodice

Pag.

Buletinul Politechnicei din Bucureşti 37
Bnletinul Soc. Politechnice din România 86, 171, 298
Bulletin de la section scientifique de l'Académie roumaine . 243, 298, 346, 507
Bulletin Scientifique de l'Ecole Poytechnique de Timişoara 731
Cercul Matematic 433
Chestiuni de examen 1943 38
Deutsche Matematik 38
Disquisitiones Mathematicae et Physicae 243, 433
Europäische Revue 243, 346, 610
Insemnări 433
Mathematica 86
Mathesis 86
Pozitiva 433
Revista Matematică din Timişoara. 38, 86, 171, 243, 298, 346, 433, 507, 610, 676, 731
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" 38, 433
România aeriană 38, 86, 171, 346
Seminarul matematic al Universităţii din Cluj 87
Ştiinţă şi Progres 433, 569, 610

F. CERERI *)

Nr. cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul	*Nr. cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1 . . .	24 (XXI)	?	31 . . .	277 (XXII)	?
4 . . .	24 „	?	32 . . .	277 „	259 (XXIII)
5 . . .	24 „	?			39, 186 (XXIV) ?
7 . . .	59 „	?	33 . . .	308 „	?
8 . . .	59 „	?	34 . . .	40 (XXIII)	?
10 . . .	91 „	?	35 . . .	40 „	?
11 **) . .	144 „	?	36 . . .	65 „	?
12 . . .	145 „	?	37 . . .	86 „	211 (XXIII) ?
13 . . .	145 „	219 (XXI) ?	38 . . .	112 „	?
14 . . .	183 „	?	39 . . .	137 „	?
15 . . .	219 „	?	40 . . .	157 „	?
16 . . .	254 „	?	41 . . .	185 „	?
17 . . .	294 „	264 (XXXVIII) ?	42 . . .	211 „	?
			43 . . .	235 „	?
20 . . .	420 „	?	44 . . .	259 „	?
23 . . .	17 (XXII)	?	45 . . .	275 „	?
24 . . .	75 „	?	46 . . .	13 (XXIV)	?
26 . . .	161 „	?	49 . . .	57 „	?
27 . . .	187 „	?	50 . . .	70 „	?
28 . . .	213 „	?	51 . . .	88 „	?
29 . . .	231 „	?	52 . . .	103 „	?
30 . . .	258 „	?	55 . . .	168 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns. Litera A înseamnă că răspunsul trebue trimis autorului cererii.

**) A se vedea nota matematică dela pag. 249, Vol. XLVI.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
56	168 (XXIV)	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 „	?
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	. . . 83
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91*)	26 (XXVIII)	. . . 39
92	57 „	?
93	57 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
122	306 (XXX)	?
123	337 „	?
124	383 „	?
126	423 „	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 „	?
247	499 „	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?

*) Cererea 91 a fost repetată sub No. 322 la pag. 553 Vol. XLVIII.

Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
252	241 (XLI)	?
253	292 „	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
259	629 „	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
270	90 (XLIII)	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
279	639 „	?
280	32 (XLIV)	?
284	479 „	?
289	248 (XLV)	?
290	306 „	?
291	419 „	?
292	479 „	?
294	530 „	?
296	638 „	?
297	205 (XLVI)	?
298	254 „	?
299	315 (XLVI)	?
301	483 „	?
302	534 „	?
303	583 „	?
304	641 „	?
305	30 (XLVII)	?
306	135 „	?
307*)	171 „	?
308	221 „	?
310	373 „	?
311	373 „	?
312	458 „	. . . 172
313	518 „	?
315	564 „	?
316	30 (XLVIII)	?
317	71 „	?
318	166 „	?
319	414 „	?
320	454 „	?
321	511 „	?
322**)	553 „	. . . 39
323	87 (XLIX)	?
324	173 „	. . . A
325	243 „	?
326	299 „	?
327	346 „	?
328	434 „	?
329	508 „	?
330	569 „	?
331	611 „	?
332	677 „	?
333	732 „	?

G. DIVERSE

Adunările şi şedinţele societăţii 87, 173, 244, 300, 508, 570
Conferinţele D-lui PROF. P. SERGESCU 434
Redacţionale 244, 434, 508, 612
Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică* . . . . . 39, 87, 173, 244, 300, 346, 434, 509, 470, 612, 677, 733.

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea pe materii a problemelor propuse în acest volum

Aritmetica şi teoria numerelor . . 5825, 38, 49, 50, 60, 1, 2, 3, 75, 6, 7, 8, 90, 1, 2, 905, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 35, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 66, 7, 80, 1, 2, 3, 95, 6.

*) La pag. 171, Vol. XLVII a fost propusă cu numărul greşit 306.
**) Vezi şi cererea 91.

Geometria . . . . . 5837, 44, 5, 52, 3, 4, 5, 6, 64, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 80, 2, 96, 7, 8, 9, 900, 1, 2, 11, 2, 3, 5, 6, 28, 9, 40, 1, 57, 8, 9, 73, 84, 5, 6, 7, 97, 8.
Algebra . . . . . 5839, 40, 1, 3, 51, 7, 72, 3, 87, 9, 93, 4, 5, 910, 24, 5, 6, 7, 46, 7, 53, 4, 5, 65, 8, 9, 88, 9, 99, 6000.
Trigonometria . . . . . 5842, 70, 1, 83, 5, 6, 930, 42, 3, 56, 70, 1, 2, 90, 6001, 2.
Calculul probabilităţilor . . . . . 5994.
Geometria analitică şi infinitezimală . . . . . 5846, 81, 4, 914, 31, 60, 1, 2, 74, 5, 91, 2, 3, 6003, 5.
Analiza şi calculul integral . . . 5858, 932, 44, 5, 79.
Mecanica . . . . . 5847, 8, 59, 74, 88, 903, 4, 18, 9, 33, 4, 48, 9, 63, 4, 76, 7, 8.
Balistica . . . . . 5917, 6004.

b) Repartizarea pe autori a problemelor propuse în acest volum

M. Adam 5930, 53, 68, 90
V. Alaci 5871, 86
Th. Angheluţă . . . 5873, 87, 95
I. S. Antoniu 5870, 932
R. Bădescu 5962, 79
Gh. Bazacov 5911, 86
D. D. Boiangiu 5977
R. Bouvaist 5958
Gh. Gh. Broşteanu 5975
G-l Gh. Buicliu . 5846, 52, 61, 79, 96, 907, 28, 39, 57, 74, 85, 96
Ad. Gheorghiu 5992, 6003
Şerb. Gheorghiu . . 5845, 53, 67, 84, 900, 14, 31, 45, 6000
M. Ghermănescu . . 5847, 58, 74, 6, 93, 906, 25, 46, 51
V. Ghiţescu 5901
A. Gloden 5983
Cpt. E. St. Iacob 5971
I. Ionescu . . . 5825, 37, 60, 75, 90, 905, 20, 35, 50, 65, 89, 6002
N. N. Ionescu 5960
C-dor I. Linteş . . 5848, 9, 62, 77, 91, 909, 22, 38, 63, 78, 94, 6004
I. V. Mătieş . 5921, 37, 55, 70, 99
St. S. Mihăiescu 5899, 993
N. N. Mihăileanu . .5865, 94, 913, 26, 40, 59, 73, 87
C. Mihu 5843, 57
O. Orănescu 5948
C. Pantelimon 5972
M. I. Pătrăşcioiu 5980
Iul. Petrescu 5997
Ad. I. Popescu 5885
G-l Gh. I. Popescu . . 5866, 998
St. Cetăţeanu 6001
G. G. Constantinescu . . 5927, 44
C. V. Costăchescu 5933
M. D. Cotariu 5916
A. D. Dobrescu 5851
G. Donţu 5976
P. P. Drăghicescu . 5844, 64, 82, 903, 42, 56, 84
I. B. Florescu . . 5838, 63, 78, 92, 908, 23
M. I. Focşeneanu . . 5839, 80, 917
N. Gaiu 5872
Maior I. M. Popescu 5954
Tib. Popoviciu . . . 5869, 89, 97, 910, 52, 67
P. Sergescu 5981

G. D. Simionescu . 5855, 81, 98, 924, 88
I. I. Stamate 5842, 943
Al. Stoenescu . 5888, 904, 34, 49
I. St. Teodorescu . . . 5841, 991
V. Thébault . 5850, 915, 36, 82, 95
Al. Ţigănoiu 5840
O. N. Ţino 5856
Gabriela Ţiţeica 5919
Şerb. Ţiţeica 5947
I. C. Vardala 5918
M. Al. Vasilescu-Stabu . 5929, 66
I. C. Vasiliu . 5854, 68, 83, 901
E. Wegener 5969, 6005
Cpt. I. Gh. Zamfirescu . . . 5859, 902, 12, 41, 64

c) Indicarea paginei la care problemele au fost propuse sau rezolvate

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
485 *)	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 **)	172 (VI), 238 (XVI)	NR
676	148 (VII)	
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
1000 ***)	220 „, 438 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1146 ****)	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1398	224 „	NR
1412	256 „	88
1424	288 (XIV)	612
1450	352 „	
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	
1656	239 „	
1676	279 „	
1702	360 „	
1711	399 „, 372 (XXXI)	
1735 *****)	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	NR
1764 ******)	120 „	NR
1790	240 „	NR
1823	400 „	NR
1831	439 „	NR
1835	440 „	
1840	466 „	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Vezi erata pag. 128, Vol. V.

**) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii. A se vedea articolul dela pag. 402, Vol. XLIV.

***) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

****) A se vedea nota matematică dela pag. 634, Vol. XLVI, în baza căreia problema rămâne nerezolvată, soluţia dela pag. 77 neräspunzând adevăratei înterpretări a enunţului.

*****) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

******) Pentru definiţia momentelor statice polare, a se vedea G. M., Vol. XVII, pag. 87.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
1898 . . .	199 (XVIII)	
1911*) . . .	239 „	. . . 245
1914**) . .	239 „	NR
1922 . . .	278 „	
1929 . . .	279 „	NR
1944 . . .	319 „	
1945***) . .	320 „	
1958 . . .	359 „	. . . 347
1959 . . .	360 „	. . . 835
1969 . . .	399 „	
2004 . . .	40 (XIX)	NR
2016 . . .	79 „	NR
2018 . . .	80 „	
2024 . . .	118 „	
2025 . . .	119 „	
2032 . . .	120 „	
2038 . . .	159 „	
2048 . . .	198 „	NR
2055 . . .	200 „	
2056 . . .	200 „	
2058 . . .	200 „	
2065 . . .	239 „	
2070****) .	240 „	NR
2074 . . .	278 „	NR
2079 . . .	279 „	
2083 . . .	280 „	
2106 . . .	358 „	
2108 . . .	359 „	
2110 . . .	359 „	
2118 . . .	399 „	
2133 . . .	439 „	
2147 . . .	462 „	
2170 . . .	119 (XX)	NR
2176 . . .	120 „	
2197 . . .	198 „	
2217 . . .	239 „	
2222*****)	240 „	
2227 . . .	279 „	
2235 . . .	280 „	
2240 . . .	318 „	
2246 ******)	320 „	
2247 . . .	320 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2248 . . .	320 (XX)	
2249 . . .	320 „	
2263 . . .	359 „	
2264 . . .	360 „	NR
2265 . . .	360 „	
2266 . . .	360 „	
2274 . . .	398 „	
2284 . . .	439 „	
2290 . . .	439 „	
2301 . . .	462 „	
2302 . . .	462 „	NR
2311 . . .	40 (XXI)	
2332 . . .	119 „	
2338 . . .	120 „ / 422 (XXXI)	NR
2343 . . .	157 (XXI)	
2344 . . .	158 „	
2357 . . .	199 „	
2365 . . .	200 „	
2370 . . .	239 „	
2375 . . .	240 „	
2381*******)	278 „	
2422 . . .	399 „	
2423 . . .	399 „	
2430 . . .	439 „	NR
2435 . . .	440 „	
2436 . . .	440 „	
2462 . . .	62 (XXII)	NR
2466 . . .	63 „	
2477 . . .	95 „	
2497 . . .	144 „	
2500 . . .	144 „	
2537 . . .	287 „	NR
2539 . . .	288 „	
2545 . . .	312 „	. . . 174
2553 . . .	47 (XXIII)	
2569 . . .	120 „	
2573 . . .	144 „	
2577 . . .	168 „	. . . 300
2586 . . .	216 „	
2587 . . .	216 „	. . . 302
2591********)	240 „	

*) Vezi şi problema 5796 rezolvată la pag. 259, Vol. XLIX.

**) Vezi erata pag. 280, Vol. XVIII.

***) Vezi erata pag. 360, Vol. XVIII.

****) Vezi erata pag. 280, Vol. XIX.

*****) Pentru calculul determinantului din enunţ a se vedea articolul dela pag. 126, Vol. XX şi nota dela pag. 172, Vol. XX.

******) Soluţia dela pag. 262, Vol. XXI nefiind exactă, se aşteaptă o nouă soluţie. — Pentru îndrumare a se vedea nota dela pag. 109, Vol. XLVII şi observarea dela pag. 112, Vol. XLVIII

*******) Vezi articolul dela pag. 77 şi 101, Vol. IX şi probema 3104, rezolvată la pag. 64. Vol. XXXI.

********) A se vedea punctul 4° pag. 244, Vol. XXXVIII şi punctul 9° pag. 441, Vol. XXXIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2593 . . .	264 (XXIII)	
2599 . . .	288 „	
2602 *) . .	318 (XXXI)	
2609 **) . .	32 (XXIV)	NR
2631 . . .	112 „	
2638 . . .	127 „	NR
2645 . . .	143 „	
2655 . . .	191 „	NR
2660 . . .	191 „	
2664 . . .	24 (XXV)	
2665 . . .	24 „	
2675 . . .	63 „	
2684 . . .	80 „	
2688 . . .	80 „	
2692 ***) .	108 „	
2713 . . .	143 „	
2731 . . .	191 „	
2752 . . .	264 „	
2758 . . .	56 (XXVI)	
2769 . . .	79 „	NR
2778 . . .	104 „	
2789 . . .	135 „	
2814 . . .	192 „	NR
2818 . . .	216 „	
2820 . . .	216 „	
2822 . . .	216 „	
2827 . . .	247 „	
2850 . . .	335 „	
2865 ****) .	70 (XXVII)	
2886 . . .	104 „	NR
2909 . . .	221 „	
2912 . . .	222 „	NR
2922 . . .	263 „	
2926 *****)	264 „	NR
2936 . . .	343 „	NR
2947 ******)	376 „	
2955 . . .	416 „	
2969 . . .	39 (XXVIII)	
2971 . . .	39 „	
2983 . . .	79 „	
2985 . . .	80 „	
2993 . . .	119 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2999 . . .	120 (XXVIII)	
3000 . . .	120 „	
3003 . . .	159 „	
3005 . . .	159 „	
3013 . . .	199 „	
3019 . . .	200 „	. . . 570
3054 . . .	360 „	
3070 . . .	400 „	
3071 . . .	439 „	
3073 . . .	439 „	
3081 . . .	479 „ 454 (XXXI)	. . . 175
3085 *******)	480 (XXVIII)	
3086 . . .	480 „	
3091 . . .	39 (XXIX)	
3095 . . .	40 „	
3108 . . .	80 „	
3118 . . .	120 „	
3134 ********)	199 „	
3150 . . .	240 „	
3161 . . .	318 „	NR
3173 . . .	358 „	
3177 . . .	359 „	
3178 . . .	360 „	
3180 . . .	360 „	
3189 . . .	400 „	
3198 . . .	440 „	
3220 . . .	40 (XXX)	
3227 . . .	80 „	
3228 . . .	80 „	. . . 571
3230 . . .	80 „	
3232 . . .	119 „	
3239 . . .	120 „	
3245 . . .	160 „	
3249 . . .	160 „	
3255 . . .	199 „	NR
3260 . . .	200 „	
3267 . . .	239 „	
3277 . . .	280 „	
3287 . . .	320 „	
3288 . . .	320 „	NR
3296 . . .	359 „	

*) Înlocuește problema 2602 propusă la pag. 16, Vol. XXIV.

**) Soluția dată la pag. 458, Vol. XXXIX nefiind satisfăcătoare, se așteaptă o nouă soluție la această problemă.

***) Vezi erata pag. 144, Vol. XXV.

****) Un caz este cuprins în problema 5181, rezolvată la pag. 224, Vol. XLVIII.

*****) Vezi erata pag. 360, Vol. XXXIII.

******) Vezi rectificarea pag. 448, Vol. XLIII.

*******) Vezi problema analoagă 3155 rezolvată la pag. 192 Vol. XXXI.

********) A se vedea soluția parțială dela pag. 254 și nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3298	359 (XXX)	NR
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3320	440 „	
3340	40 (XXXI)	
3341 *)	79 „	. . . 573
3360	120 „	
3389	240 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467 **)	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	
3488	159 „	
3493	160 „	
3495	199 „	
3499	199 „	
3504	200 „	. . . 677
3506	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	
3533	320 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3535	359 (XXXII)	NR
3536 ***)	438 „	NR
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	. . . 509
3551 ****)	39 (XXXIII)	NR
3572	480 (XXXII)	NR
3573	480 „	. . . 436
3584	79 (XXXIII)	
3589	80 „	
3597	120 „	
3607 *****)	159 „	
3610	160 „	. . . 303
3620	199 „	
3622 ******)	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	
3632******)	279 „	
3640 *******)	280 „	NR
3644	319 „	
3647	320 „	. . . 438
3653	359 „	NR
3657	359 „	
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	478 „	
3689	480 „	NR
3693	39 (XXXIV)	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3706	79 „	
3713********)	119 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3736	200 „	
3749	240 „	
3762	319 „	
3764	319 „	

*) Vezi nota dela pag. 453, Vol. XXXI.

**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.

***) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.

****) Inlocu şte enunţul dela pag. 399, Vol. XXXII.

*****) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.

******) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.

*******) Problema rezolvată la pag. 95, Vol. XLII este 3630, iar nu 3632. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

********) Problema rezolvată la pag. 35, Vol. XLII este 3639, iar nu 3640. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

*********) A se vedea erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3768 . . .	320 (XXXIV)	
3772 . . .	359 „	
3776*) . .	360 „	309 (XXXVI)
3780 . . .	360 „	
3784 . . .	399 „	
3787 . . .	400 „	
3790 . . .	400 „	
3792 . . .	439 „	
3793 . . .	439 „	NR
3804 . . .	479 „	
3807 . . .	480 „	
3808**) . .	480 „	
3810 . . .	480 „	
3817 . . .	40 (XXXV)	
3819 . . .	40 „	
3820 . . .	40 „	
3823 . . .	79 „	
3824 . . .	79 „	
3829 . . .	80 „	NR
3836 . . .	120 „	NR
3844 . . .	159 „	NR
3849 . . .	160 „	
3853 . . .	199 „	
3863 . . .	239 „	NR
3864 . . .	239 „	
3867 . . .	240 „	
3874 . . .	38 (XXXVIII)	
3876 . . .	279 (XXXV)	
3880 . . .	280 „	
3883 . . .	319 „	
3896 . . .	360 „	NR
3909 . . .	400 „	NR
3913 . . .	439 „	
3933 . . .	39 (XXXVI)	NR
3934 . . .	39 „	
3939 . . .	40 „	
3950 . . .	80 „	
3961 . . .	159 „	. . . 246
3965***) . .	159 „	. . . 98
3975 . . .	200 „	
3976 . . .	200 „	
3983 . . .	238 „	NR
3999 . . .	280 „	
4010 . . .	320 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4013 . . .	359 (XXXVI)	
4022 . . .	398 „	
4028 . . .	400 „	
4030 . . .	400 „	
4035 . . .	440 „	
4041 ****) .	38 (XXXVIII)	
4045 . . .	479 (XXXVI)	
	142 (XL)	NR
4053 *****) .	39 (XXXVII)	
4056 . . .	79 „	
4059 . . .	40 „	
4060 . . .	40 „	
4067 . . .	80 „	
4070 . . .	80 „	. . . 512
4074 . . .	119 „	
4075 . . .	120 „	
4080 . . .	120 „	
4084 . . .	159 „	
4085 . . .	159 „	NR
4096 . . .	200 „	
4098 . . .	200 „	. . . 176
4102 . . .	239 „	
4104 . . .	239 „	NR
4105 . . .	240 „	
4107 . . .	240 „	
4111 ******)	279 „	NR
4112 . . .	279 „	NR
4118 . . .	280 „	
4126 . . .	319 „	
4127 . . .	320 „	
4132 . . .	359 „	
4148 *******)	400 „	NR
4150 . . .	400 „	NR
4151 . .	438 „	NR
4155 . . .	439 „	
4167 . . .	479 „	NR
4169 . . .	480 „	NR
4172 . .	39 (XXXVIII)	
4184 . . .	79 „	
4185 . . .	79 „	
4192 . . .	118 „	. . . 307
4194 . . .	119 „	
4199 . . .	120 „	
4206 . . .	160 „	NR

*) Rezolvată în Vol. XXXVI. A se vedea nota dela pag. 310, Vol. XXXVI, la finele soluției problemei 3805.

**) A se vedea completarea enunțului la pag. 288, Vol. XL.

***) A se vedea și problema 3966 rezolvată la pag. 425, Vol. XXXVI.

****) Înlocuește enunțul dela pag. 479, Vol. XXXVI. A se vedea problema rezolvată la pag. 29, Vol. XXXIX și erata I) dela pag. 80, Vol. XXXIX.

*****) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

******) Vezi lămuriri la pag. 493, Vol. XLIX.

*******) Vezi erata pag. 200, Vol. XXXVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4210	160 (XXXVIII)	
4214	198 „	
4234	279 „	
4236	280 „	
4245	319 „	
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4270	400 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	
4281	479 „	. . . 440
4283 *)	479 „	NR
4285 **)	479 „	
4287	480 „	
4289	480 „	
4290	383 (XXXIX)	NR
4297	40 „	. . . 352
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4307	79 „	
4315	120 „	. . . 355
4316	120 „	
4319	120 „	NR
4326	159 „	
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	NR
4340	200 „	NR
4350	240 „	
4352	286 „	
4356	287 „	
4357	288 „	. . . 693
4358	288 „	NR
4360	334 „	
4362	334 „	. . . 616
4363	335 „	NR
4370	336 „	
4373	383 „	
4376	384 „	. . . 620
4380	384 „	NR
4384	431 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4393	478 (XXXIX)	
4395 ***)	479 „	NR
4399	480 „	NR
4402	480 „	
4404	526 „	
4405	526 „	. . . 356
4407	527 „	
4411	528 „	
4412	528 „	. . . 247
4416	46 (XL)	
4426	48 „	
4435	96 „	
4445	143 „	
4446	143 „	
4449	144 „	NR
4450	144 „	
4458	191 „	
4468	239 „	
4473	240 „	
4478 ****)	285 „	
4480	286 „	
4484	287 „	
4486 *****)	288 „	
4487	334 „	NR
4489	334 „	NR
4490	335 „	NR
4492	335 „	NR
4494	336 „	
4496	336 „	
4509	384 „	
4511	430 „	NR
4513	430 „	NR
4515	431 „	
4520	432 „	
4525	478 „	
4533	480 „	
4534	480 „	NR
4540	527 „	
4547	573 „	NR
4548	573 „	
4550	574 „	
4553 ******)	574 „	
4557	575 „	
4558	576 „	
4559	116 (XLI)	NR

*) Vezi erata pag. 160, Vol. XXXIX

**) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.

***) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

****) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

*****) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

******) I s'a dat o soluție la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota dela pag. 302., Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției, pentru cazul p și q imaginari.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4560 *)	116 (XLI)	
4561	116 „	NR
4566	118 „	
4568	118 „	
4571	119 „	
4573	119 „	
4576	119 „	
4578	120 „	
4581	166 „	
4587**)	262 „	
4589	168 „	. . . 575
4590	168 „	
4593	215 „	
4596	215 „	
4598 ***)	216 „	NR
4601	216 „	
4603	262 „	NR
4607 ****)	263 „	
4613	264 „	
4614	264 „	NR
4615	310 „	NR
4620	311 „	
4625	312 „	
4630	359 „	NR
4631	359 „	
4634	360 „	
4636	360 „	. . . 358
4637	360 „	
4638 *****)	360 „	
4640	406 „	
4641	407 „	NR
4644	407 „	
4647	408 „	NR
4657	454 „	
4660	455 „	NR
4664	503 „	
4670	504 „	
4671	504 „	
4672	504 „	
4673	504 „	
4674	504 „	
4680	550 „	
4683	551 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4685 ******)	552 (XLI)	NR
4686	552 „	NR
4688	598 „	
4690	598 „	
4693	599 „	. . . 513
4695	600 „	
4696	600 „	NR
4697	600 „	
4698	600 „	NR
4703	647 „	
4705	647 „	
4706	647 „	
4710	648 „	NR
4717	55 (XLII)	
4720	56 „	
4722	56 „	
4726	110 „	
4729	111 „	
4731 *******)	112 „	
4734	112 „	
4741	167 „	
4742	167 „	
4745	168 „	
4749	223 „	
4753	223 „	
4755	224 „	
4765	279 „	
4768	280 „	
4770	280 „	
4772	334 „	
4779	336 „	
4780	336 „	
4783	390 „	NR
4785	390 „	
4788 ********)	390 „	
4790	391 „	
4791	391 „	NR
4793	392 „	
4801	447 „	
4804	448 „	
4812	503 „	
4815	504 „	
4817	504 „	

*) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.

**) Inlocueşte problema 4587 dela pag. 168, Vol. XLI.

***) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.

****) Vezi erata pag. 312, Vol. XLI.

*****) A se vedea şi articolele dela pag. 288 şi 401, vol. XXXVIII.

******) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.

*******) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

********) Problema rezolvată la pag. 611, Vol. XLII, este 4787, iar nu 4788. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4821	558 (XLII)	
4825	559 „	
4826	559 „	
4836	615 „	
4839 *)	616 „	NR
4840	616 „	
4848	671 „	
4849	671 „	NR
4853	672 „	
4854	672 „	
4859	55 (XLIII)	
4866	56 „	
4870	110 „	
4879	166 „	. . . 575
4880	166 „	
4889	168 „	
4894	222 „	
4897	223 „	
4898	223 „	
4901	224 „	NR
4905	278 „	. . . 733
4909	279 „	
4913	280 „	NR
4914 **)	501 (XLV)	NR
4917	334 (XLIII)	
4920	334 „	. . . 577
4922 ***)	335 „	NR
4923	335 „	
4928	390 „	
4929 ****)	390 „	NR
4937	392 „	NR
4938	392 „	NR
4940	446 „	
4944	447 „	
4946	447 „	
4949 *****)	448 „	NR
4953 ******)	614 „	NR
4954	502 „	
4955	503 „	
4958	503 „	
4962	504 „	
4967	559 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4968	559 (XLIII)	
4969	559 „	
4973	560 „	NR
4974	560 „	
4977	614 „	
4981	615 „	
4984	616 „	
4985	616 „	
4986	616 „	. . 39
4989	670 „	
4991*******)	102 (XLVII)	
4992	671 (XLIII)	
4993	671 „	
4995	671 „	
4997	672 „	NR
5002	54 (XLIV)	
5006	55 „	
5009	55 „	NR
5010	56 „	NR
5012	56 „	
5013	56 „	
5016	109 „	
5020	110 „	. . 735
5021	110 „	
5022	111 „	
5026	112 „	
5027	112 „	
5028	112 „	NR
5030	166 „	
5031	166 „	
5033	166 „	
5034	167 „	
5037	167 „	NR
5040	168 „	
5043	168 „	NR
5045 ********)	222 „	736
5046	222 „	
5049	222 „	
5051	223 „	
5052*********)	223 „	
5053	223 „	NR
5054	223 „	

*) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

**) Inlocueşte problema 4914, propusă la pag. 280, Vol. XLIII.

***) A se vedea şi articolul dela pag. 286, Vol. XLII.

****) Numărul problemei rezolvate la pag. 494 este 4926 iar nu 4929.

*****) A se vedea punctul IV al articolului de la pag. 568, Vol. XLVI.

******) I s'a modificat enunţul dela pag. 502, Vol. XLIII.

*******) Inlocueşte problema 4991, propusă la pag. 670, Vol. XLVI. A se vedea şi erata dela pag. 152, Vol. XLVII.

********) Vezi erata pag. 280, Vol. XLIV.

*********) Vezi erata pag. 336, Vol. XLIV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5055	224 (XLIV)	310
5056 *)	190 (XLVIII)	99
5059	277 (XLIV)	
5060	277 „	
5064	278 „	
5068	278 „	NR
5069	279 „	
5072	280 „	
5073 **)	280 „	NR
5074	334 „	
5075 ***)	335 „	
5076	335 „	NR
5079	335 „	
5082	335 „	
5085	336 „	NR
5086	336 „	
5091	390 „	
5092	390 „	
5093	390 „	
5094	391 „	NR
5099	391 „	
5105	445 „	
5106	445 „	
5110	446 „	
5111	446 „	
5117	448 „	
5121	501 „	
5123	501 „	
5126	502 „	
5127	502 „	NR
5128	503 „	
5129	503 „	NR
5130	503 „	NR
5136	558 „	
5137	558 „	
5138	559 „	
5139	559 „	NR
5140	559 „	
5142	559 „	
5143	560 „	43
5144	560 „	
5145	560 „	
5146	560 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5155	615 (XLIV)	737
5157	615 „	311
5158	615 „	
5161	616 „	
5162 ****)	616 „	
5167	669 „	
5169	670 „	
5170	670 „	
5172	670 „	
5173	671 „	
5177	672 „	
5178	672 „	NR
5182	53 (XLV)	
5183	53 „	
5184	54 „	NR
5192	55 „	
5196	109 „	NR
5197 *****)	110 „	
5200	110 „	NR
5204	111 „	
5205	111 „	
5206	111 „	
5209	112 „	
5212	166 „	NR
5216	167 „	
5217	167 „	
5220	168 „	NR
5221	168 „	NR
5225	220 „	138
5226	221 „	
5227	221 „	
5230	221 „	NR
5234	222 „	
5236	223 „	
5242	278 „	
5245	278 „	
5247	279 „	252
5248	279 „	NR
5250	279 „	
5252	280 „	
5253	280 „	NR
5258	334 „	
5260 ******)	557 (XLVI)	178

*) Inlocueşte problema 505€ dela pag. 615, Vol. XVIII şi pe cea cu acelaşi număr dela pag. 224, Vol. XLIV.

**) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.

***) Vezi erata pag. 392. Vol. XLIV.

****) Vezi erata pag. 672, Vol. XLIV.

*****) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

******) Inlocueşte vechea problemă 5260 a cărei soluţie dela pag. 271, Vol. XLVI se anulează după cum se anulează şi noua problemă 5260, propusă la pag. 444, Vol. XLVI. A se vedea nota dela pag. 529, Vol. XLVI şi erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5267	335 (XLV)	
5272	389 „	
5274	390 „	NR
5276	390 „	
5261	334 „	
5262*)	334 „	
5279	391 „	
5284	392 „	NR
5286	392 „	NR
5288	446 „	. . .515
5289	446 „	NR
5290	446 „	
5292	446 „	
5293 **)	447 „	
5294	447 „	
5295	447 „	NR
5296	447 „	
5298	448 „	NR
5301	448 „	. . .624
5302	501 „	. . .253
5303	502 „	. . 100
5309	503 „	
5312	503 „	
5318	557 „	
5320	557 „	
5321	557 „	. . . 45
5322	558 „	
5324	558 „	
5325	558 „	
5326	558 „	
5327	559 „	
5332	613 „	
5333	613 „	
5334	614 „	
5335	614 „	NR
5337	614 „	. . .180
5339	615 „	
5342	615 „	NR
5343	616 „	
5344	616 „	NR
5349	670 „	NR
5351	670 „	
5354	671 „	
5355	671 „	
5357	671 „	NR
5358	671 „	
5360	672 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost Propusă	Rezolvată
5363	53 (XLVI)	. . .184
5366	54 „	
5367	54 „	
5370	55 „	NR
5371	55 „	
5376	56 „	NR
5380 ***)	110 „	
5381 ****)	110 „	
5382	110 „	NR
5383	111 „	NR
5384	111 „	
5388	112 „	NR
5391	112 „	
5392	165 „	. . .440
5394	166 „	. . .312
5395	166 „	
5396	166 „	
5397	166 „	
5404	168 „	. . .186
5405	168 „	NR
5408	221 „	NR
5410	222 „	
5411	222 „	NR
5412	222 „	
5413	222 „	. . .628
5416	223 „	
5418	224 „	
5419	224 „	
5421	224 „	NR
5422	578 „	NR
5425	278 „	NR
5426 *****)	389 „	
5427	278 „	
5429	279 „	
5430	279 „	
5431	279 „	
5432	280 „	
5433	280 „	
5434	280 „	. . .629
5435	280 „	
5440	334 „	
5441	334 „	
5443	335 „	
5448	336 „	NR
5449	336 „	
5450	336 „	NR
5453	389 „	

*) Vezi erata pag. 392, Vol. XLV.
**) Vezi erata pag. 560, Vol. XLV.
***) Vezi erata pag. 168, Vol. XLVI.
****) Vezi complectarea enunţului la pag. 248, Vol. XLVfl.
*****) Inlocueşte problema 5426 dela pag. 278, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5454	389 (XXVI)	.359
5455	389 „	.738
5456	390 „	
5458	390 „	
5459	391 „	
5460	391 „	NR
5462	391 „	NR
5463	392 „	187
5464	392 „	579
5465	392 „	
5466	392 „	NR
5467	445 „	
5470	446 „	NR
5472	446 „	NR
5475*)	502 „	
5478	447 „	
5479	448 „	NR
5481	448 „	NR
5484	503 „	NR
5485 **)	503 „	
5487	503 „	
5489	503 „	
5490	503 „	NR
5491	504 „	
5492	504 „	
5493	504 „	
5494	504 „	
5496	504 „	
5497	557 „	NR
5498	557 „	NR
5500	558 „	
5502	558 „	NR
5503	558 „	
5505	559 „	.441
5506	559 „	
5508	560 „	
5509	560 „	
5512	614 „	
5513	614 „	NR
5514	615 „	NR
5515	615 „	NR
5516	615 „	NR
5517	615 „	
5519	616 „	
5520	616 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5521 ***)	616 (XLVI)	
5522	616 „	
5523 ****)	293 (XLVII)	
5524	616 (XLVI)	
5525	616 „	NR
5527	664 „	
5528	669 „	NR
5532	670 „	.518
5533	670 „	
5534	670 „	
5535	671 „	
5536	671 „	
5538	671 „	NR
5539	671 „	
5540	672 „	
5542	54 (XLVII)	NR
5545	54 „	
5546	54 „	.518
5547	55 „	
5548	55 „	NR
5551	55 „	
5552	55 „	.520
5554	56 „	
5558	102 „	
5560	103 „	NR
5561	103 „	
5563 *****)	103 „	
5564	103 „	
5565 ******)	150 „	.313
5567	104 „	
5568	104 „	NR
5570	150 „	.697
5571	150 „	
5572	151 „	
5573	151 „	
5574	151 „	
5575 *******)	190 (XLVIII)	192
5576	151 (XLVII)	
5577	152 „	
5578	152 „	
5580 ********)	142 (XLVIII)	101
5581	199 (XLVII)	
5582	199 „	NR
5583	199 „	
5584	199 „	.360

*) Inlocueşte enunţul dela pag. 447, Vol. XLVI.
**) Vezi erata dela pag. 560, Vol. XLVI.
***) A se vedea erata de la pag. 672, Vol. XLVI.
****) Inlocueşte problema 5523 dela pag. 616, Vol. XLVI.
*****) Vezi erata pag. 152, Vol. XLVII.
******) Inlocueşte enunţul dela pag. 104, Vol. XLVII.
*******) Rectifică enunţul dela pag. 199, Vol. XLVII.
********) Inlocueşte enunţul dela pag. 151, Vol. XLVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5585	199 (XLVII)	
5587	200 „	.740
5588	200 „	
5589	200 „	
5591	200 „	NR
5593	246 „	
5595	246 „	
5596	247 „	
5597	247 „	NR
5598	247 „	
5599	247 „	
5600	247 „	
5601	248 „	
5602	248 „	
5606	294 „	.361
5607	204 „	
5608	294 „	
5609	295 „	
5610	295 „	741
5611	295 „	521
5612	295 „	
5615	296 „	
5616	296 „	
5618	342 „	363
5619	342 „	
5620	342 „	
5621	343 „	
5622	343 „	
5623	343 „	
5624	343 „	
5625	343 „	
5626	344 „	.254
5630	389 „	.256
5632	390 „	
5633	390 „	NR
5934	390 „	
5635	391 „	
5636	391 „	NR
5637	391 „	.523
5638	392 „	
5639	392 „	
5640	392 „	
5643	438 „	
5646	439 „	
5647	439 „	NR
5649	439 „	
5650	439 „	
5651	440 „	NR
5652	440 „	.318
5653	440 „	.366
5655	486 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5656	486 (XLVII)	.648
5657	486 „	
5658	486 „	NR
5659	486 „	46
5662	487 „	NR
5663	488 „	
5664	488 „	
5665	488 „	745
5666	488 „	.368
5667	533 „	.582
5668	533 „	NR
5669	533 „	.102
5670	534 „	
5671	534 „	NR
5672	534 „	NR
5673	534 „	
5674	535 „	
5675 *)	574 (XLVIII)	.700
5676	535 (XLVII)	
5677 **)	536 „	
5678	536 „	NR
5680	582 „	NR
5681	582 „	NR
5682	582 „	NR
5683	583 „	
5684	583 „	
5685	583 „	.371
5687	583 „	
5688	584 „	.670
5690	584 „	NR
5691	46 (XLVIII)	.372
5693	46 „	
5695	46 „	.583
5696	47 „	
5697	47 „	
5698	47 „	.633
5699	48 „	NR
5700	48 „	
5701	48 „	NR
5702	48 „	
5704	93 „	
5707	94 „	
5708	94 „	
5709	94 „	NR
5710	95 „	.103
5711	95 „	.524
5712	95 „	
5713	96 „	NR
5714	96 „	48
5715	142 „	NR
5716	142 „	.701

*) Inlocuește enunțul dela pag. 535, Vol. XLVII.

**) Vezi erata dela pag. 584, Vol. XLVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5718 . . .	143 (XLVIII)	. . .105
5719 . . .	143 „	
5721 . . .	143 „	
5723 . . .	143 „	. . .526
5724 . . .	144 „	
5726 . . .	144 „	. . .529
5727 . . .	190 „	. . 639
5728 . . .	190 „	NR
5729 . . .	190 „	
5730 . . .	191 „	. . .749
5731 . . .	191 „	NR
5732 . . .	191 „	
5733 *) . .	191 „	
5734 **) . .	191 „	
5735 . . .	192 „	
5736 ***) . .	525 „	NR
5737 ****) .	192 „	NR
5738 . . .	192 „	NR
5739 . . .	238 „	
5740 . . .	238 „	
5742 . . .	238 „	NR
5743 . . .	238 „	
5744 . . .	238 „	
5745 . . .	239 „	NR
5746 . . .	539 „	NR
5747 . . .	240 „	
5748 . . .	240 „	NR
5749 . . .	240 „	NR
5750 . . .	286 „	. .753
5751 . . .	286 „	NR
5752 . . .	286 „	
5753 . . .	286 „	. . 447
5754 . . .	286 „	. . .448
5755 . . .	287 „	. . .317
5756 . . .	287 „	. . .193
5757 . . .	287 „	NR
5758 . . .	287 „	
5759 *****) .	288 „	NR
5760 . . .	288 „	. . .105
5763 . . .	334 „	. . .106
5764 . . .	334 „	
5765 . . .	334 „	
5766 . . .	335 „	NR
5767 . . .	335 „	
5768 . . .	335 „	. . .639
5769 . . .	335 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5770 . . .	335 (XLVIII)	
5771 . . .	336 „	
5772 . . .	336 „	NR
5773 . . .	336 „	
5774 . . .	336 „	. . .640
5776 . . .	381 „	. . .257
5777 . . .	381 „	NR
5778 . . .	382 „	
5779 . . .	382 „	
5780 . . .	382 „	NR
5781 . . .	383 „	. . .756
5782 . . .	383 „	
5783 . . .	383 „	
5784 . . .	384 „	
5785 . . .	384 „	
5786 . . .	384 „	
5787 . . .	384 „	NR
5788 . . .	430 „	. . .107
5789 . . .	430 „	
5790 . . .	431 „	. . .258
5791 ******)	431 „	. . .525
5792 . . .	431 „	NR
5793 . . .	431 „	
5794 . . .	431 „	
5795 . . .	431 „	NR
5796 *******)	432 „	. . .259
5797 . . .	432 „	
5798 . . .	432 „	
5799 . . .	432 „	NR
5800 . . .	478 „	NR
5801 . . .	478 „	. . .643
5802 . . .	478 „	. . .262
5803 . . .	478 „	NR
5804 . . .	478 „	
5805 . . .	479 „	
5806 . . .	479 „	NR
5807 . . .	479 „	
5808 . . .	479 „	
5809 . . .	479 „	NR
5810 . . .	480 „	NR
5811 . . .	480 „	. .452
5812 . . .	525 „	. . .455
5813 . . .	526 „	
5814 . . .	526 „	NR
5815 . . .	526 „	
5816 . . .	526 „	NR

*) Vezi erata pag. 240, Vol. XLVIII.

**) Vezi erata pag. 240, Vol. XLVIII.

***) Inlocueşte enunţul dela pag. 192, Vol. XLVIII.

****) Vezi erata dela pag. 288, Vol. XLVIII.

*****) Vezi erata pag. 384, Vol. XLVIII.

******) Vezi erata dela pag. 480, Vol. XLVIII.

*******) Vezi şi problema 1911, rezolvată la pag. 245, Vol. XLIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5817 . . .	526 (XLVIII)	
5818 . . .	527 „	NR
5819 . . .	527 „	NR
5820 . . .	527 „	NR
5821 . . .	528 „	NR
5822 . . .	528 „	NR
5823 . . .	528 „	NR
5824 . . .	528 „	NR
5825 *) . .	110 (XLIX)	. . .317
5826 . . .	575 (XLVIII)	
5827 . . .	575 „	
5828 . . .	575 „	. . .645
5829 . . .	575 „	NR
5830 . . .	575 „	
5831 . . .	575 „	. . .318
5832 . . .	576 „	
5833 . . .	576 „	. . .531
5834 . . .	576 „	NR
5835 . . .	576 „	
5836 . . .	576 „	. . .107
5837 . . .	54 (XLIX)	. . .456
5838 . . .	54 „	
5839 . . .	55 „	
5840 . . .	55 „	
5841 . . .	55 „	
5842 . . .	55 „	
5843 . . .	55 „	
5844 . . .	56 „	NR
5845 . . .	56 „	
5846 . . .	56 „	
5847 . . .	56 „	NR
5848 . . .	56 „	
5849 . . .	110 „	
5850 . . .	110 „	
5851 . . .	110 „	
5852 . . .	110 „	
5853 . . .	110 „	NR
5854 . . .	111 „	
5855 . . .	111 „	NR
5856 . . .	111 „	. . .645
5857 . . .	112 „	NR
5858 . . .	112 „	NR
5859 . . .	112 „	NR
5860 . . .	198 „	NR
5861 . . .	198 „	
5862 . . .	198 „	
5863 . . .	198 „	NR
5864 . . .	198 „	
5865 . . .	198 „	
5866 . . .	199 „	NR
5867 . . .	199 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5868 . . .	199 (XLIX)	NR
5869 . . .	199 „	
5870 . . .	200 „	
5871 . . .	200 „	
5872 . . .	200 „	
5873 . . .	200 „	NR
5874 . . .	200 „	. . .648
5875 . . .	264 „	
5876 . . .	264 „	
5877 . . .	265 „	
5878 . . .	265 „	NR
5879 . . .	265 „	. . .758
5880 . . .	265 „	
5881 . . .	265 „	NR
5882 . . .	266 „	
5883 . . .	266 „	
5884 . . .	266 „	NR
5885 . . .	266 „	
5886 . . .	267 „	
5887 . . .	267 „	NR
5888 . . .	267 „	
5889 . . .	267 „	
5890 . . .	321 „	
5891 . . .	321 „	
5892 . . .	322 „	NR
5893 **) . .	376 „	NR
5894 . . .	322 „	NR
5895 . . .	322 „	
5896 . . .	322 „	
5897 . . .	322 „	NR
5898 . . .	323 „	
5899 . . .	323 „	NR
5900 . . .	323 „	
5901 . . .	323 „	NR
5902 . . .	324 „	NR
5903 . . .	324 „	
5904 . . .	324 „	
5905 . . .	376 „	. . 585
5906 . . .	376 „	
5907 . . .	377 „	
5908 . . .	377 „	
5909 . . .	377 „	. .703
5910 . . .	377 „	NR
5911 . . .	378 „	
5912 . . .	378 „	
5913 . . .	378 „	NR
5914 . . .	378 „	
5915 . . .	379 „	NR
5916 . . .	379 „	
5917 . . .	379 „	
5918 . . .	379 „	

*) Inlocuește problema 5825 dela pag. 574, Vol. XLVII.
**) Completează enunțul dela pag. 322, Vol. XLIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5919	379 (XLIX)	
5920	460 „	
5921	460 „	NR
5922	460 „	
5923	461 „	NR
5924	461 „	NR
5925	461 „	
5926	461 „	
5927	462 „	NR
5928	462 „	
5929	462 „	NR
5930	463 „	NR
5931	463 „	NR
5932	404 „	NR
5933	404 „	NR
5934	404 „	NR
5935	533 „	NR
5936	533 „	
5937	533 „	NR
5938	534 „	NR
5939	534 „	
5940	534 „	
5941	534 „	NR
5942	534 „	NR
5943	535 „	NR
5944	535 „	NR
5945	535 „	NR
5946	535 „	NR
5947	535 „	NR
5948	535 „	NR
5949	536 „	NR
5950	589 „	NR
5951	589 „	NR
5952	590 „	
5953	590 „	NR
5954	590 „	
5955	590 „	NR
5956	590 „	
5957	590 „	NR
5958	591 „	NR
5959	591 „	NR
5960	591 „	NR
5961	591 „	NR
5962	591 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5963	592 (XLIX)	NR
5964	592 „	NR
5965	649 „	NR
5966	650 „	
5967	650 „	NR
5968	650 „	NR
5969	650 „	NR
5970	650 „	NR
5971	650 „	
5972	651 „	NR
5973	651 „	NR
5974	651 „	NR
5975	651 „	NR
5976	651 „	NR
5977	651 „	NR
5978	652 „	NR
5979	652 „	NR
5980	705 „	NR
5981	706 „	NR
5982	706 „	NR
5983	706 „	NR
5984	706 „	NR
5985	707 „	NR
5986	707 „	NR
5987	707 „	NR
5988	707 „	NR
5989	707 „	NR
5990	707 „	NR
5991	708 „	NR
5992	708 „	NR
5993	708 „	NR
5994	708 „	NR
4995	762 „	NR
5996	762 „	NR
5997	763 „	NR
5998	763 „	NR
5999	763 „	NR
6000	763 „	NR
6001	764 „	NR
6002	764 „	NR
6003	764 „	N
6004	764 „	NR
6005	764 „	NR

I. EXERCIȚII *)

1. Repartizarea exercițiilor pe materii

Aritmetica și Teoria numerelor . . . . . 13(109), 13(264), 19(457), 20(457), 30(586), 34(648), 35(704), 36(704), 39(759), 40(759).

*) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exercițiul al cărui număr precede paranteza.

Geometria . . . . . 4(54), 16(374), 22(458), 25(459), 37(704), 38(705), 42(761).
Algebra . . . . . 1(52), 2(53), 3(53), 7(196), 8(196), 10* (196), 11(263), 12(263), 14(320), 15(329), 17(375), 24(459), 27(532), 29(531), 41(760), 45(762).
Trigonometria . . . . 9(197), 18(375), 21(458), 23(458), 26(531), 28(532), 31(687), 43(761), 44(766).
Calculul integral şi infinitezimal . . . . 5(54), 33(588).

b) Repartizarea exerciţiilor pe autori

M. Adam 26, 38
V. Gh. Andrei 8, 17
M. D. Cotariu . . . 21, 31, 43, 44
A. H. Cubat . . . 22, 24, 25, 29
P. P. Drăghicescu . . 9, 15, 16, 35
V. Ghiţescu 4
Grigore A. Gh. 42
Cpt. G. St. Iacob . . 1, 3, 7, 12, 13, 14, 18, 19, 30, 39
M. C. Manolache 6
Gh. V. Niculescu 36
C. I. Staicu 20
T. Stoicescu . 5, 10, 11, 23, 27, 28, 32, 33, 40, 41
S-Lt. M. Al. Vasilescu-Stabu . 34
E. N. Wegener 2, 37, 45

J. TABLOUL NUMELOR

A. A. V., 433.
Abason E., 112, 303.
Abramescu N., 6, 25, 86, 223, 299, 313, 316, 441, 447, 450, 596, 597, 731, 732.
Adam M., 463, 531, 590, 650, 705, 706.
Adreian D. E., 630.
Ahmas, 114, 236.
Ahmes, 236.
Aiaci V., 6, 86, 171, 200, 243, 267, 346, 563, 731.
Alasia C., 174.
Aldea** V. Minea 47, 255, 363, 365, 524, 583.
Aldea N. N., 6.
Alembert D., 49, 294, 245, 367, 455.
Alexandru Ion I Cuza, 201.
Alexiu I., 6.
Amărăşteanu F. M., 7.
Amiot A., 39.
Andarache I., 363.
Andonie Gh. 7.
Andreescu M. M., 363, 741.
Andrei Gh. A., 47, 48, 105, 254, 339, 363, 425, 450, 508, 629.
Andrei Gh. Val., 196, 375.
Andronache B. I., 508.
Andronescu Pl., 7, 433, 454.
Angelescu A., 22, 244, 246.
Angheluţă Th., 6, 7, 86, 200, 267, 292, 293, 322, 489, 490, 563, 731.
Aniţescu N. N., 433.
Antoniu Corn, 7.
Antoniu S. I, 5, 6, 7, 46, 178, 180, 200, 244, 290, 306, 464.
Apolonius, 613, 614.
Argeşanu C., 346.
Arghiriade Em., 5, 7, 719.
Arhimede, 113, 114.
Armeanca I., 7, 86.
Aron I. Gh., 339.
Asachi Gh., 434.
Atanasiu V. G-l., 201, 204, 244.
August G. H., 86.
Avram N. Lt., 735.
Avramescu A., 7, 38.
Avramescu C., 7.

Bachet de Méziriac, 411.
Badea A. I., 253.
Bădescu A. L., 7.
Bădescu R., 7, 244, 541, 652.
Badoureau, 432.
Bădulescu Alexandra, 7.
Baidaff Ig. B., 7.
Bakonyi C. C., 47, 254, 441, 579, 634.
Bălan G. Şt., 7.
Bălănescu I. Dr. g-l, 346.
Băleanu I., 86.

*) A se vedea erata 2) de la pag. 268.
**) Acelaşi cu *Minea V. Adea.*

Ballan E., 7.
Ballieu H., 86.
Banciu I., 22.
Bănulescu M. Cpt., 206.
Barbilian D., 5, 7, 163, 329, 333, 334, 507.
Barbu A. I., 317, 577, 703, 759.
Bardan D. Col., 204.
Bărglăzan A., 731.
Barkhauesen H., 298.
Barth C., 433.
Bârzescu M., 105, 258, 508, 740, 754, 756.
Bârzescu I. Vasile-Mircea. 338, 363, 372. 425, 456,
Bazacov Gh 378, 508, 706.
Becker K. J., 570.
Behr O., 87.
Belcot C., 37.
Beneş P., 8.
Bereanu B., 447, 754.
Beroniade C. V., 338.
Bertrand J., 100, 293, 294, 295, 573.
Bibescu Gheorghe, Domnitor 201.
Binet, 733.
Birck, 429.
Blându N. I., 435.
Bodnărescu M. H., 43, 191, 244, 579, 629, 738.
Bogdan Gabriela, 433.
Bogdan Gr. Gh, 43, 45, 433.
Bogdan N., 86.
Bolangiu D. D., 178' 253, 311, 652.
Boldescu R. P., 633.
Bolognese Pietro, 569.
Bolyai, 133.
Bompiani E., 243.
Borel Em., 174.
Borneanu G., 8.
Borza Al., 569.
Bosinceanu C., 524.
Botea G. Em., 6, 8.
Botea G. N., 288, 289, 574.
Botez St. M., 8, 186, 187, 569.
Bouvaist R, 298, 591.
Brahy Ed, 729.
Braşoveanu D-tru, 703.
Bratu E., 37·
Bratu Gh., 22.
Brenner N. A., 8.
Brianchon, 80.
Brighiu Corn., 743.
Broşteanu Gh. Gh., 651.
Bruckner V., 8.
Brumărescu T., 86.
Brunhes Ed.*, 172·
Brunhes j., 172
Brunhes, Monsegniorul, 172.
Bruno **, 162.
Bucurescu I, Cpt., 8.
Budeanu I. C., 8, 171, 244, 346.
Bühl, 427.
Buicliu Gh. G-l., 5, 6, 8, 45, 56, 82, 99, 110, 173, 198, 204, 205, 239, 244, 246, 265, 289, 299, 322, 341, 344, 365, 377, 381, 382, 397, 409, 410, 426, 432, 448, 452, 462, 509, 512, 523, 534, 552, 565, 583, 584, 585, 590, 616, 643, 644, 651, 671, 676, 703, 706, 740, 758, 761.
Bujoreanu N., 8.
Bumbu V., 731.
Bunescu D. A., 5, 8, 30, 173, 244, 499, 563.
Bunescu D. E., 8.
Bungescu I. Col., 8, 206.
Bungeţeanu Preduţa, 22.
Buradescu T., 8.
Buricel-Tecuciu Gh., 87.
Burileanu Şt. G-l., 8, 203, 500.
Buşilă Bd., 8, 246.
Buşilă D. C., 9.
Buşilă G. I., 9.
Buzincu I. I., 48, 524.

Caille, 64.
Căldăraru L., 438.
Călugăreanu G., 86, 731.
Cambureanu V. D., 9.
Cambureanu V. V. 9.
Câmpan Florian, 171, 243.
Candea C., 171, 731.
Cantea Z., 60.
Cantuniar Cr., 339, 425.
Capriel I., 9.
Caracostea D. A., 9.
Carafoli E., 9.
Caramalău E., 452, 455, 585, 644.
Caraman E., 9.
Caranfil E. N., 508.
Cârlănescu C., 508.
Carmichael R, 375.
Carnot, 594, 595, 597.
Caronnet Th., 346.
Cârstea D. Marin, 317.
Cârstoiu I. C., 105.
Cârstoiu I., 37, 731.
Cartianu Ch., 9.
Căruntu D. F., 450, 524, 629.
Cassian Gh. G-l., 9.
Cătuneanu N. Tr., 255.
Cauchy A., 36, 38, 294, 295, 481, 482, 483, 484, 487, 752.
Cazacu N. C., 9.
Cazanacli V. P., 9.
Ceauşescu V., 354.
Cernescu N., 37.
Cernescu T., 731.
Cesar Iulius, 175.
Cesaro, 712, 713, 718, 719.
Cetăţeanu St., 178, 184, 363, 515, 764.
Ceva, 79, 672.
Charlemagne, Fratele, 172.
Chevrel, 428.
Chiriac I. C, 526, 585, 644, 752, 754.
Chintescu M. M., 630.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A, 9.
Chiţulescu I. I., 5, 6, 9, 25, 244, 426, 499, 722.
Cim A., 605.
Ciobanu I., 569.
Cioc D, 638.
Cioc M., 9.
Ciorănescu I. N., 9, 381.
Ciorapciu F. M., 10.
Ciumaşu V., 338, 425.
Ciureanu M., 754.
Ciurileanu D., 37.
Claudian V., 10.
Clavius Chr., 71.
Clifford, 133, 140.
Cocea Gh. Th., 359.
Cole, 565.

*) Acelaşi cu Fratele *Gabriel Marie.*
**) Acelaşi cu Fratele *Gabriel Marie.*

Columbeanu D. P., 99, 105, 106, 254, 259, 339, 363, 425, 644, 759.
Comberousse Ch. de, 102.
Constantinescu R. D., 703.
Constantinescu George Ing. 10.
Constantinescu Gh. Prof., 309, 512.
Constantinescu Gh. Gh., 5, 6, 10, 100, 164, 173, 257, 295, 302, 433, 440, 462, 517, 535, 616, 693, 732, 733.
Constantinescu D. Ilie, 318, 380.
Constantinescu N. Ilie, 339, 380, 425, 648.
Constantinescu I. M., 105, 585.
Constantinescu D. Mircea, 648.
Constantinescu T., 10, 381.
Constantinescu Z., 10.
Copernic, 433.
Coriolis, 50.
Coşereanu I., 10.
Coşniţă C., 29, 299, 621, 666, 669.
Costăchescu V. C. Cpt., 10, 464.
Costinescu D., 10.
Cotariu D. M., 47, 99, 105, 192, 196, 255, 319, 363, 379, 447, 448, 458 523, 524, 583, 585, 587, 607, 638, 644, 645, 754, 761.
Cotulbea I. C., 311.
Coulomb, 64.
Crăciuneanu C. Cpt., 10.
Creangă I., 298.
Creţoiu P., 37.
Cristescu V., 25, 48, 197, 202, 531, 532.
Crivelius I., 63, 65, 71.
Cubat H. A., 102, 103, 107, 254, 257, 317, 319, 448, 456, 458, 459, 533, 583, 585, 741, 752.
Cuningham, 654.
Curea I., 676, 731.

Dainelli, 642.
Damian V. Corn., 255
Damian N. St., 193, 638.
Dandelin, 389.
Darboux G., 491, 492, 666, 669.
Dăscălescu Hr., 10.
David M., 611.
Davidescu Ana, 10.
Deaux R., 86.
Delsarte, 427.
Desargues, 154.
Descartes, 44, 514, 646.
Diaconescu C. C., 736.
Diaconescu V. C., 100.
Dimitriu I. Călin, 585.
Dimitriu Tigran, 48, 524.
Dinescu P. Al. T., 10.
Diocles, 584.
Dirichlet, 343.
Dobrescu D. Andrei, 10, 110, 279.
Donciu T. N., 10, 42, 418, 434.
Doneaud E. Andrée, 338.
Donţu G. G., 102, 103, 105, 192, 254, 363, 365, 448, 490, 508, 585, 644, 651, 740, 741, 751.
Dovgan V. Gh., 311.
Draeger M., 38.
Drăganu M., 346, 433, 501, 569.
Drăghicescu P. P., 22, 23, 42, 43, 45, 46, 56, 84, 99, 100, 103, 105, 106, 177, 184, 185, 197, 198, 247, 252, 254, 256, 257, 259, 262, 266, 288, 289, 312, 313, 316, 320, 321, 324, 339, 360, 361, 363, 365, 371, 374, 433, 438, 447, 450, 517, 518, 520, 521, 526, 531, 534, 578, 579, 583, 585, 590, 624, 627, 629, 630, 633, 640, 644, 673, 698, 699, 700, 701, 703, 704, 705, 721, 724, 737, 739, 740, 741, 744, 752, 755, 758.
Drăghicescu P. C., 338.
Dragodănescu I. N. Cpt., 206.
Dragomirescu-Buzne Ed. Maior, 10, 206, 244.
Drosescu Gh. I., 10.
Dubbel H., 391, 538.
Duchêsne, 219, 221, 607.
Dumitrescu A. D., 11.
Dumitrescu F. Dan, 23.
Dumitrescu I. Gh., 6, 11.
Dumitrescu M. Gh., 734.
Dumitrescu C. I., 11.
Dumitrescu M. 736.
Dumitrescu F. Sorin, 338.
Dumitrescu G. Tr., 107, 577, 644, 751.
Dumitrescu V., 37.

Eftimie D. C., 45, 254, 363, 366, 368, 530, 579, 629, 748.
Enache I., 644.
Enăchescu Gr. I., 47, 99, 102, 105, 192, 363, 508, 524, 526, 699, 740, 741, 754.
Enăchescu V. T., 338.
Eneström G., 244
Enulescu O., 515.
Escott, 657
Euclide, 113.
Euler, 71, 79, 87, 240, 244, 413, 462, 490, 574, 601, 639, 654, 657, 719, 721, 733.

Felix C. G-l., 11.
Fermat, 79, 434, 611.
Feuerbach, 623, 639.
Filip V. I., 338.
Filipescu Gh. Elena, 677.
Filipescu Em. Gh., 22.
Fitz Patrick j., 428, 510, 512.
Florescu B. I., 130, 198, 265, 307, 309, 322, 355, 377, 461, 505, 566, 574, 674, 675, 696.
Florescu M. U., 11, 358.
Florian Z., 11.
Florian G. P., 338.
Focşeneanu I, M., Maior, 5, 6, 11, 55, 265, 302, 379, 616
Foerster M., 391, 538.
Fölsing I., 87.
Franz j., 63, 66.
Froelich G., 63, 65, 66, 71.
Frömster A, 617.
Fundăţeanu C. I., 22.

Gabriel * Marie, Frère (F. G.M.), 172, 173, 174, 355.

*) Acelaşi cu *Brunhes Ed.* şi *Bruno.*

Gafencu Rodica, 11.
Gaicu S., 253.
Gaiu G. Em., 126.
Gaiu Gh. N., 200, 719.
Gâlcă I. T., 11.
Galileo Galilei, 299.
Ganea M. N., 585.
Ganea D. N., 43, 254, 740.
Gâţă Gh. Gh., 339.
Gauss, 71, 86, 338.
Gauss Fr. Ch., 411.
George Er., 38.
George M. Nicolae, 255, 363, 447, 448, 456, 585.
Georgescn Colipso, 570.
Georgescu P. I. G-l., 206, 244.
Georgescu I. N., 11, 244.
Georgescu N. N., 11.
Georgescn V., 171.
Georgescu-Roegen N., 11.
Georgescu-Roegen Otilia, 6, 11.
Georgescu-Val N., 11.
Geppert Maria-Pia, 38.
Gerold Carol, 435.
Ghenea T. G-l, 244.
Gheorghieş Al. G-l., 11, 206.
Gheorghiu C. Ad., 5, 11, 39, 173, 236, 338, 707, 764.
Gheorghiu Al., 12.
Gheorghiu V. C., 433.
Gheorghiu Em. dr., 433.
Gheorghiu Gh. Cpt., 23, 30.
Gheorghiu Th. Gh., 6, 12, 48, 86, 247, 260, 433, 450.
Gheorghiu S. I., 12.
Gheorghiu Margareta, 38.
Gheorghiu Marius, 254.
Gheorghiu A. M., 12.
Gheorghiu C. Oct., 104, 105, 184, 192, 254, 363, 364, 456, 524, 526, 633.
Gheorghiu E. Oct., 43, 47, 99, 297, 311, 512, 629.
Gheorghiu A. Şerb., 12, 56, 111, 174, 175, 199, 266, 323, 335, 379, 447, 463, 507, 520, 521, 531, 535, 579, 583, 585, 602, 763.
Ghermănescu M., 5, 6, 12, 56, 86, 100, 101, 112, 169, 174, 187, 191, 192, 200, 204, 243, 245, 246, 259, 262, 264, 292, 298, 299, 300, 302, 303, 316, 322, 327, 329, 352, 376, 433, 437, 438, 440, 461, 499, 513, 535, 566, 571, 573, 574, 589, 606, 640, 648, 676, 698, 699, 732, 735, 753, 755.
Ghermani D., 12, 86.
Ghica Al., 12.
Ghica Grigore, Domnitor, 201.
Ghika Al., 298.
Ghimuş D. A. Col., 12, 244.
Ghiolu Stavri, 570.
Ghircoiaşu V. N., 12, 299, 433.
Ghişoiu I. P., 12, 247.
Ghiţă M. V., 339, 425.
Ghiţescu Sp., 12.
Ghiţescu V., 5, 6, 12, 54, 103, 104, 170, 318, 320, 526, 528, 591, 720.
Gligor N. I., 254, 524.
Gloden A., 105, 401, 429, 654, 705, 722, 731.
Gogu C., 202.
Goldbach, 620,
Goormaghtigh R., 86, 344.
Gospodin T., 624.
Grădinescu A., 610.
Grausz F. C., 38.
Grigore A. Gh., 318, 586, 703, 759, 761.
Grigorescu C., 12.
Grigorescu Em., 246.
Grigorescu G., 246.
Grigorescu Ion, 570.
Grimme, 237,
Groeser R., 38.
Grumăzescu M. S-Lt., 44, 47, 311, 524, 741, 744.
Gugiuman I., 38.
Guimares R., 39.
Guţu I. A., 12.
Guţu C-tin, 265.
Guţu I. I., 12.
Guţu V., 12.

Haim D., 574.
Hanganu D. M., 13.
Haret Sp. R., 338.
Haret C. Sp., 508.
Hell* M., 63, 64, 65, 71, 72.
Hermite, 733.
Heytmanek C. Cpt., 609.
Hilbert D., 38.
Hoffmann V. C., 87.
Hoffman E. J., 38.
Hohenberg Fr., 38.
Höll** M., 63, 64, 65, 72.
Hortopanu D., 611.
Huideş V. A., 338, 644.
Humbert E., 346.

Iacob Caius, 86, 243, 425, 569.
Iacob St. E. Cpt., 52, 53, 102, 105, 192, 196, 254, 263, 264, 317, 318, 320, 363, 365, 375, 585, 586, 644, 651, 744, 759.
Iancu I., 311.
Ianculescu S. O., 396, 480, 563.
Ianculescu R., 13.
Ieşan Şt. Al., 425.
Ifrim Alfons, 644, 741.
Ignat Gh. M., 339, 425.
Ignat Virgil, Col., 298.
Ilie A. I., 493.
Ilie D. M., 37,
Iliescu C. C., 103, 105, 106, 254, 339, 363, 365, 425, 524, 644.
Iliescu D. Em., 175.
Iliescu Gh., 5, 13, 381, 612.
Iliescu Tr. G-l, 13.
Iliovici G. C., 33.
Ioachimescu Gh. A., 22, 25, 381, 705.
Ioachimescu A. Gh., 13.
Ioanovici A., 13, 677.
Ion Vodă cel Cumplit, 201.
Ionescu I. Andrei, 759.
Ionescu B. Al., 574.
Ionescu M. Cornellu, 585.
Ionescu V. D., 6, 13, 25, 86, 181, 610.
Ionescu P. H., 13, 247.
Ionescu Ion, 5, 6, 13, 39, 54, 87, 88, 89, 99, 101, 107, 110, 115, 174, 175,

*) Acelaşi cu *Höll M.* **) Acelaşi cu *Hell M.*

176, 178, 198, 204, 205, 236, 237, 243, 244, 247, 253, 256, 264, 271, 299, 300, 317, 318, 321, 346, 372, 376, 397, 426, 434, 435, 440, 441, 455, 456, 460, 500, 501, 508, 509, 533, 539, 570, 573, 575, 582, 585, 586, 589, 605, 611, 612, 649, 654, 677, 706, 732, 733, 764.
Ionescu N. N., 591, 637.
Ionescu V. N., 254, 320, 448, 524, 577, 585, 648.
Ionescu F. P., 39, 105, 254, 289, 365, 703.
Ionescu I. Paul, 13.
Ionescu Stan, 38.
Ionescu Th., 299.
Ionescu Tib., 13.
Ionescu-Bujor C., 5, 6, 13, 389, 498, 674, 711, 712, 736.
Ionescu-Fulger Corneliu, 644.
Ionescu-Ţiu D. C. Cpt., 5, 6, 13, 244, 310, 317.
Ionescu-Zane D. Gh., 13.
Istrati C. Dr., 399.
Istrati C. Lt.-C-dor, 13.
Iuga G., 610, 676.

Janet G., 611.
Jareghie V. I., 311, 736.
Jiletcovici G. Al., 43.
Jipa Al., 44.
Jonquière de, 243.
Joseph* Frère (F. J.), 172, 173, 174.
Jung F., 38.
Jurist Gh. Vlad, 48, 105, 254, 339, 365, 425, 448, 523, 524, 585, 638, 752.
Jusserand**, 172.

Kaufmann N., 13.
Kepler, 513.
Kirilov Gh., 500, 508.
Kleyer A., 612, 733.
Klinghardt J., 654.
Klompers Th., 87.
Kneschke A., 38.
Knopp, 714, 715.
Koppenfels W. von, 38.
Kraitchik M., 130, 461, 512, 566, 654.
Kraus W., 38.
Kubota M., 175.

Lagrange C. J., 507, 572.
Laguerre, 531.
Laguarta E., 86.
Laisant A. C., 677.
Lalescu Tr., 347.
Lambru D. Maria, 39, 87, 174.
Lamoth P., 13.
Laplace P. S., 36, 433, 602, 603, 612.
Lascu Bal, 13.
Lascu I., 86.
Laska W., 733.
Lavoisier, 38.
Lazu C., 13.
Legendre M. A., 116, 604.
Lechi H. B., 71,
Lehmer, 562.
Leibniz G. G., 605.
Leibovici S., 43.
Lemoine E., 27, 175, 253, 279, 623, 624, 667.
Letac Ad., 431.
Leonida D., 14.
Leţia Val., 339, 425.
Lettenmeyer F., 38.
Lietzmann W., 87.
Lindemann F., 113.
Linné Carol, 569.
Linteş G. I. C-dor, 5, 14, 30, 32, 38, 39, 56, 82, 87, 102, 103, 105, 106, 110, 122, 165, 171, 198, 204, 215, 239, 243, 244, 258, 259, 262, 265, 292, 298, 312, 321, 336, 343, 346, 355, 356, 360, 377, 429, 433, 436, 440, 460, 505, 507, 518, 520, 534, 565, 568, 592, 594, 639, 645, 652, 675, 697, 703, 707, 711, 731, 736, 737, 753, 764.
Lipka St., 38.
Liteanu I. Gh. G-l, 5, 6, 14, 25, 203, 244, 526.
Livada F. Gr., 14.
Lobatchevsky, 133.
Longchamps G., 240.
Lucas Ed., 291, 347, 565, 566, 669.
Ludolph de Colonia, 113.
Lupan I. M., 178.

Macarovici Gh. C., 433.
Mahrenholz J., 105, 192, 258, 447, 448, 524, 585.
Maier G. J., 612.
Malaxa C. Elena, 14.
Malaxa N., 14.
Malcoci C., 14.
Malen Fr. I., 435.
Man I. A., 338.
Manafu V., 14.
Mândreanu M., 102, 192.
Mănescu Ioan, 243.
Manoilescu M., 24.
Manolache C. M., 109, 254, 317, 320, 456, 698, 741.
Manoliu Sp. M., 318.
Manu Gh. G-l, 203, 434.
Manughevici C., 731.
Mărculescu Orighen, 736.
Marcus B., 579.
Mareş I. Em., 98, 99.
Mareş T., 14.
Margulius M., 174.
Marian V., 6, 14, 299.
Marinescu S. Em., 758.
Marinescu I. I., 448.
Marinescu C. Marinel, 105, 339, 425.
Marinescu Stelian, 338, 425.
Marion V., 69, 72.
Marteş Gr, 43, 311.
Martine, 70.
Martonfi I., 72.
Mateescu Cr., 14.
Mateescu Dan, 14.
Mătieş V. I., 14, 43, 44, 45, 346, 397, 410, 413, 434, 460, 507, 533, 590, 611, 650, 763.
Mavrodin D. D., 352.
Mayer T., 64.
Mehedincu V., 14, 167.
Menciu C., 569.
Menelaus, 46, 79.
Mereuţă E., 14.
Mereuţă V., 14.
Mersenne, 565, 566.
Meth P., 434, 677.
Michel Ch., 42, 491.

*) Acelaşi cu *Jusserand.*
**) Acelaşi cu *Joseph Frère.*

Micle Şt., 433.
Miclescu A. Maior, 15, 244.
Miculescu Luli, 244.
Mihăiescu S. Şt. 15, 83, 303, 323, 433, 639, 700, 707, 721.
Mihăileanu N. N., 5, 6, 15, 105, 174, 199, 246, 311, 322, 360, 378, 461, 518, 534, 577, 591, 597, 651, 669, 706.
Mihăilescu I. St., 339, 425.
Mihăilescu Virg., 206.
Mihalopol C., 15.
Mihoc Gh., 15, 507, 508.
Mihu C., 15, 45, 55, 112, 311.
Milea C. C., 629.
Minea * V. Aldea, 638.
Mineur Ad., 629.
Miquel, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 338, 597, 738.
Mircea M. E., 15.
Mirea N. St., 512.
Mirescu P., 15.
Mirodescu N. P., 611.
Mitescu C., 15.
Mititelu C. Cl., 15, 626.
Mititelu C. I., 15.
Miu M. I., 15.
Mizicu M., 577.
Möbius, 131.
Mocnik F., 435.
Modâlcă S. Em., 23, 103, 109, 180, 311, 366, 452, 530.
Moessner A., 33, 731, 733, 734, 735.
Moivre, 80.
Montel P., 86, 537.
Morariu Tib., 611.
Morţum Gh. Em., 15, 371, 372.
Moscovici E. N., 43.
Moutard, 86.
Muică Col., 434.
Müller J., 374.
Munteanu Gh. L., 585, 752.
Munteanu G. S., 753.
Musceleanu S. Doru, 254, 365, 698.
Mustăcescu Tr., 339, 425.
Myller A., 298.
Myller-Lebedeff Vera, 38.

Nache D. D., 99, 258, 318, 338, 372, 425, 508, 644, 740, 758.
Nadolu Gr., 105, 448, 585, 638.
Natalis, 237.
Neamţu P., 15.
Negoescu N., 508.
Negrea A. M., 187, 354, 579, 623, 624, 629.
Negrei V. G-l, 611.
Negrescu C. I., 441, 629.
Negură G. St., 15.
Neicu M., 508.
Neisz F., 38.
Nestor G. D., 15.
Nestorescu Val. Col., 206.
Neuberg J., 329.
Neubüsser, 612.
Newton Isac, 64, 71, 504, 582.
Nichifor A. G., 15.
Nicolae C. Al., 254.
Nicolae M. Gr., 318, 319, 447, 698, 741, 752, 758, 759.
Nicolau Al., 15.
Nicolau H. C., 16, 174, 302.
Nicolau T. M., 16, 570.
Nicomede, 73.
Niculescu V. Al., 5, 6, 16, 361, 363, 605.
Niculescu Cr., 16.
Niculescu V. Eug., 38.
Niculescu V. Gh., 704, 726.
Niculescu C. Mircea, 311, 579.
Niculescu Miron, 16.
Niculescu I. R., 16.
Niewenglowski B, 44, 82, 83, 432, 700.
Novacu Val., 570, 677.

Onea N., 86.
Onicescu O., 6, 16, 86, 507.
Oprea D. Gh., 740.
Oprescu C. C., 433.
Orănescu O., 16, 516.
Orăşanu D. C., 16.
Orăşeanu Gr., 16.
Orha F. I., 338.

Paciurea D., 611.
Pălăcianu D. V., 99, 102, 105, 107, 142, 255, 257, 258, 261, 317, 320, 339, 363, 365, 425, 441, 524, 582, 630, 644, 743, 754.
Panaite N. Th., 16.
Panaitescu Sc., 22, 205.
Pantazi Al., 5, 6, 16, 39, 163, 244, 289, 302, 499, 605.
Pantazi C. G-l, 86, 201.
Pantelimon V. C., 43, 45, 48, 192, 222, 252, 255, 311, 319, 452, 499, 524, 579, 585, 607, 608, 627, 629, 630, 651, 699, 700, 736, 739, 743, 752, 758, 750.
Papelier G., 437.
Parteni-Antoni C., 38.
Pârvan D. I., 105, 254.
Pârvu A., 16.
Pârvulescu V. C., 192, 585, 752.
Păsărică Fl., 5, 16.
Pascal, 80, 336, 571.
Patriciu G. T., 22, 612.
Patru M., 171.
Păunescu C. Victor, 105.
Pătrăscioiu I. M., 102, 105, 192, 644, 752, 754.
Păucă M., 433.
Paulat I., 171.
Păunescu N. I., 365.
Pavel Dorin, 17, 38.
Pavelescu M., 433.
Pavica A. V., 105, 339, 425.
Pell, 127.
Perlea G. D., 17.
Persu A., 17.
Petrescu S. Gh., 17.
Petrescu Iulian, 23, 737, 763.
Petrescu Mihai, 311.
Petrescu P. Lt.-Col., 17.
Petrescu St., 243.
Petrini S. G., 435.
Petrovanu D. G-l, 204.
Philipide M., 17.
Picard C. Sophie, 86.
Picquet H., 584.
Pintilie I. I., 629, 630.
Pitiş L. N.-A., 105, 106, 258, 262, 577, 585.

*) Acelaşi cu *Aldea V. M.*

Pițigoi Victor, 107, 644.
Pitiș N., 192, 196, 639.
Planck, 299.
Pleșu I. Lucian, 255.
Polya, 713, 714.
Pompeiu D., 86, 112, 298, 317, 569, 661, 674, 731.
Poncelet, 136, 137, 138, 140, 141, 142, 158.
Pop Em., 433.
Popa D. A., 629.
Popa N. A., 178, 185, 252, 316, 433, 518.
Popa D. M., 43, 46, 184, 252, 358, 570, 597, 624, 629, 630, 736, 739.
Popa N. N., 741.
Popescu I. Ad., 47, 105, 255, 267, 365, 447, 524, 728, 741.
Popescu I. Barbu, 317, 586, 644, 703.
Popescu N. C., 574.
Popescu Daniel, 611.
Popescu I. Gh. G-l, 62, 199, 204, 206, 615, 616, 666, 763.
Popescu I., 22.
Popescu M. I. Maior, 17, 244, 590.
Popescu L., 86, 171.
Popescu Gh. M., 23, 48, 103, 105, 255, 447, 518, 521, 579, 583, 629, 630, 633, 698.
Popescu A. Victor, 17.
Popescu Valentin, 346.
Popescu-Botoșani Gh., 17.
Popescu-Zorica Al., 508.
Popinceanu N., 38.
Popișcă V. M., 735.
Popovăț M., 433.
Popovici And., 86, 171, 346.
Popovici C. Prof., 86.
Popovici C. C., 508.
Popoviciu Tib., 6, 17, 199, 268, 290, 233, 344, 356, 357, 378, 590, 616, 620, 650, 693, 697.
Popp N. C-dor, 17, 204.
Popp I. Tr., 17.
Popŭ G. Slugerulŭ, 434.
Portocală M., 17.
Portocală N., 435.
Potopeanu Gh. G-l, 12, 206, 244.
Poulet M. C. A., 411.
Poulet P., 660.
Powers, 566.
Prager Em., 653, 654.
Praporgescu N., 17, 507.
Profiri N., 508.
Protopopescu Gr. Col, 17.
Provinceanu M., 17.
Ptolomeu, 79, 192.
Purica I., 611.
Puchiu T. Gh., 450, 524, 629.

Raabe, 292, 293, 294, 295.
Radian Dan, 171.
Radoslav D. I., 85.
Rădulescu I. M., 18, 193, 194.
Rădulet R., 731.
Raicu S. V., 736.
Răiculeanu Al., 86.
Râmniceanu I. C., 289.
Râșcanu I. G-l, 346.
Regiomontanus, 114.
Reischer L. H., 44, 311.
Revici T., 18.
Reynold, 37.
Ricatti, 316.
Riemann, 36, 86.
Ripianu D., 442, 447, 624, 628.
Rizeanu Al. G-l, 244.
Robert*), 219, 221, 607.
Roedemeyer Fr. 171.
Rogoz V. I, 317, 338, 425, 644, 703.
Rohr I. A., 43, 311.
Rojas I. Morano j., 171.
Rolle 80, 248, 249, 449, 452, 706.
Romanescu Cicerone, 43.
Romașcan G. Georgeta, 6, 18.
Roșca R., 37.
Rosenzweig S. M., 178.
Roșu Al., 245.
Roșu Al. Al., 5, 6, 18, 25, 244, 499.
Roșu T. N., 103, 105, 192, 339, 425, 743.
Roșu V., 17.
Rouché E., 102.
Rouchet, 434.
Rudio F., 87.
Rüger B., 653, 654.
Rusu L. M., 517, 629.
Ruzvan I. T., 18.

Sacter O., 42.
Saichin O. A., 311.
Șaint-Robert**), 607, 608, 609.
Sălăgeanu A., 18.
Saligny M., 18.
Salmon, 163.
Sanielevici M., 507.
Săpunaru S. Gh., 18.
Sarian M., 18.
Săruleșteanu Em., 99.
Șaur I., 508.
Șavin C. I. Lt., 18.
Sbârnea D. Gh., 45.
Schanks, 236.
Schileru-Dili C. I., 18.
Schneidt M., 38.
Schotlan S., 87.
Schrenks, 113, 236.
Schulz G., 38.
Seelhof, 566.
Segal J., 355.
Șeibulescu A. C., 300,
Șeiceanu Z., 113, 114, 115.
Șenchi F., 178.
Șeni Cl., 256, 363, 365, 524, 638.
Seni D. Gh., 338.
Șerban A. T., 43, 187, 736.
Șerbănescu Gh. V., 18.
Șergent Em., 433.
Sergescu B., 18.
Sergescu P., 6, 18, 87, 434, 705, 731.
Sfințescu I. C., 18.
Siadbei V., 433.
Sichitiu I., 202.
Sikorski G., 37.
Silaș G., 574.
Simionescu I. Cr., 433.
Simionescu D. G., 5, 6, 18, 29, 45, 111, 167, 244, 253, 255, 266, 323, 424, 466, 523, 624, 633, 639, 672, 706, 737, 738, 745.
Simionescu I., 569.
Simionescu M., 19.

*) Același cu *Saint-Robert*.
**) Același cu *Robert*.

Simson T., 61, 83, 84, 301, 302, 432, 520, 544, 545, 598, 600, 601, 602, 705, 706, 707, 719, 721.
Sipos P., 63.
Şleahtenea D., 19.
Smântânescu A., 19.
Solacolu Şerb., 171.
Sondat P., 623.
Sosigene, 175.
Soula J., 86.
Soye De-, 434.
Spacu G. P., 38.
Staicu I. C., 105, 185, 192, 255, 313, 339, 363, 425, 457, 639, 644.
Staicu D., 100.
Stamate I. I., 19, 39, 55, 99, 254, 255, 299, 311, 433, 535, 741.
Stambuleanu Ad., 86.
Stamatescu I. G., 19.
Stamatescu I., 19.
Stan I. A. Cpt., 5, 6, 19, 244.
Stan A. D., 19, 25, 300, 677.
Stanciu V., 569.
Stancu M. I., 105, 254,
Stancu S. Marin, 19.
Stancu S. Mircea, 19.
Stănculescu I. I., 19.
Stănculescu S. M., 45, 366.
Stănescu Al. 171.
Stanislavievici I., 171.
Ştefănescu S. D., 455.
Ştefănescu E., 397.
Ştefănescu A. N., 629.
Ştefănescu D. N. Lt., 19, 98, 99, 106, 311, 372, 579, 583, 584, 754.
Ştefănescu-Goangă A., 19.
Steiner, 28, 29, 45, 84, 240, 666, 719, 721.
Stelian B, Fl., 577.
Steopoe A., 171.
Stephan P., 509.
Stewart, 79.
Stieltjers, 461.
Stoenescu I. Al., 6, 19, 37, 48, 52, 107, 109, 244, 267, 324, 366, 367, 368, 371, 381, 412, 455, 464, 536, 722.
Stoenescu D. Mirel, 42, 43, 47, 106, 252, 254, 316, 363, 365, 441, 524, 526, 585, 629, 630, 740.
Stoenescu N. G-l, 244.
Stoianovici Şerb., 45, 629.
Stoica D. Al., 19.
Stoica V. D., 5, 20, 173, 244, 499.
Stoicescu T. T., 20, 54, 197, 263, 268, 458, 532, 587, 588, 759, 760.
Stoika V. V., 20.
Stoilov S., 86.
Strejea N. Iorgu, 425.
Strubecker K., 38.
Stuart A. H., 433.
Sturm, 249, 250, 251.
Sudan G, 346.
Sulițeanu C., 311.
Szegö, 713, 714.
Szymanski P., 86, 731.

T. C., 569.
Tacquet A, 71.
Tailer G., 574.
Tănăsescu M. A. G-l, 20.
Tănăsescu A. T., 20, 38.
Tănăsescu V., 524.
Tautz G., 38.
Tchebyceff, 86, 100, 753.
Teodoreanu L., 171.
Teodoreanu V., 20.
Teodorescu C. C., 6, 20.
Teodorescu St. I., 55, 245, 260, 261, 351, 521, 579, 583, 640, 642, 699, 707.
Teodorescu V. N., 22.
Thébault V., 86, 110, 172, 173, 242, 345, 379, 432, 533, 620, 623, 701, 705, 731, 761.
Theodoru H., 20, 244.
Thierrin H. G., 20.
Tigănoiu I. Al., 55, 448, 585, 676.
Tigran D., 698.
Tilibaşa N., 86, 171.
Tilică C. Şt., 629, 630.
Timerding E. H., 434, 677.
Tincu C. C., 106, 526, 585, 639, 644, 703. 752, 753, 754.
Ţino N. O., 5, 6, 20, 111, 610, 628, 629, 630, 633, 645, 648, 677, 693, 752, 758.
Ţintea M. I., 20.
Ţiţeica Gabriela, 6, 20, 25, 244, 380, 722, 745, 740.
Ţiţeica George, 22, 86, 98, 175, 632, 633, 711, 712, 731, 732.
Ţiţeica G. Radu, 6, 20.
Ţiţeica Şerban, 6, 20, 426, 427, 535.
Ţiţirigă C., 202.
Tofan C. A., 338, 644.
Tomescu Şt. I., 20.
Toporescu Er., 37.
Toulouse Dr., 203.
Tounchat Marie-Antoinette, 433.
Trefilov I. M., 43, 45.
Trestianu N. Sever, 254.
Tripşa I. I., 338.
Tudoran M. I., 508.
Tudoran M. Lydia, 22, 363, 426.
Tullea C. Gh., 20.
Turcu R. Sandu, 43.
Turculeț T. T., 254, 372, 758.
Tutuc I., 299.
Twain M., 324.
Tzony M., 508.

Udrea C. I., 339, 425.
Udrischi Tr. C-dor, 346.
Ulescu A., 20.
Ureche Gh. Gh., 202.

Văduva Fl. M., 586, 703.
Vâlcovici V., 20, 25, 171, 204, 288, 346, 528, 530.
Vandermonde, 726, 727.
Vardala I., 21, 244, 380, 677.
Varignon, 169.
Vârnav Sp., 346.
Vasilache I., 21.
Vasilescu C. Gr. 21.
Vasilescu C. I., 21.
Vasilescu I. T., 21.
Vasilescu-Stabu A. M., 106, 254, 311, 317, 358, 364, 374, 463, 520, 644, 645, 648, 650, 700, 754, 755, 758.
Vasiliu Amilcar, 299.
Vasiliu G. Dan, 21.
Vasiliu G. D-tru, 47, 339, 363, 365, 368, 425, 426, 452, 499, 508, 518, 521, 524, 578, 585, 629, 630, 633, 741, 754.
Vasiliu C. E., 21.

Vasiliu D. Gh., 21.
Vasiliu C. I., 21, 84, 111, 126, 199, 240, 246, 265, 303, 317, 323.
Vasiliu M., 21.
Vasiliu M. V., 433.
Vernescu N., 745.
Vescan T. T., 21, 299, 427, 604, 612.
Vessiot E., 537.
Viard Jeannine, 243.
Viciu A. A., 21.
Vijelie Gh., 630.
Vişa E., 38, 86, 508.
Vissarion C. Al., 346.
Vlad N. Constantin-Mircea, 338.
Vlad Voevod, 201.
Vlădicescu Al., 171, 346.
Vlăduţiu O., 37.
Vlaicu Aurel, 171.
Voicu D. Gh., 629.
Voinea P. R., 23, 317, 363, 456, 518, 523, 583, 629.
Volanschi A. Dan, 254.
Vrânceanu G. G., 262, 317, 320, 338, 357, 425, 644, 645, 703.
Vulcan Victor, 254.

Wallace, 594, 595.
Weber, R. H., 38.
Wegener N. E., 53, 101, 106, 107, 196, 243, 289, 316, 317, 318, 320, 363, 365, 447, 448, 523, 524, 579, 583, 585, 624, 630, 644, 650, 700, 704, 736, 743, 761, 764.
Weierstrass, 143, 163.
Wilson, 39.
Winkler E., 434.
Woinarovski R., 21, 243.
Wolf Ch., 66.
Wronski H., 87.

Zamfirescu C. Gr., 22, 86.
Zamfirescu G. I. Cpt., 6, 21, 30, 76, 112, 219, 279, 280, 281, 324, 378, 534, 592.
Zapan Gh., 6, 21.
Zapan Gr. C-dor, 5, 6, 21, 87, 204, 244.
Zarankiewicz M., 86.
Zlatcu St. C., 21.

K. LUCRĂRI CITATE *)

1. Cărţi, Lucrări extrase, Teze

		Pag.
N. Abramescu	Lecţiuni de geometrie analitică	223
Th. Angheluţă	Curs de algebră superioară	489, 490
M. Bănulescu şi Ed. Dragomirescu-Buzne	Construcţii de guri de foc	206
Ed. Brahy	Exercices méthodiques de calcul integral	729
Ch. Bruhus	Nouveau manuel de logarytme à sept décimales	172
I. Bungescu	Măsurarea altitudinii în tragerile antiaeriene	206
Şt. Burileanu	Teoria generală a calculului probabilităţilor	203
R. D. Carmichael	Analyse indéterminée	355
A. Cim	Le livre	605
Chr. Clavius	Epitoma Arithmeticae practicae	71
C. Coşniţă	Coordonnées barycentriques	29, 299, 621
V. Cristescu	Culegere de probleme de trigonometrie	48, 197, 531, 532, 666, 667, 669
Crivelius	Elementa arithmeticae numericae et literalis	63
M. David şi P. N. Mirodescu	România	611
N. I. Dragodănescu	Materialul pentru tragerile antiaeriene	206
H. Dubbel	I. Band	391
Euler	De numeris amicalibus	657
F. G. M.	Exercices de géometrie	174
F. G. M.	Exercices de mécanique	174
F. G. M.	Exercices de trigonométrie	355

*) In acest capitol nu sunt trecute lucrările citate în *Bibliografie* şi în *Diverse*. Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică*.

Pag.

M. Foerster . . . . . I. Band 391
Er. Froehlich . . . . . Introductis facilis in Mathesim, ad usum tyronum Phylosophiae Provinciae Austriae 65
Ch. Fr. Gauss . . . . . Récherches arithmetiques 411
I. P. Georgescu . . . . . Studiul gurilor de foc 206
Al. Gheorghieș . . . . Curs de tragerile artileriei 206
Gh. Gheorghiu . . . . . Studiul matematic al perforării plăcilor de blindaj 30
M. Ghermănescu . . . . Probleme și propoziţiuni din dinamica punctului 642
M. Hell . . . . . Anleitung zur nützl. Gebrauch der künstl. Stahlmagnete 64
M. Hell . . . . . Aurorae Borealis theoria nuova 64
M. Hell . . . . . De paralaxi solis ex obs. transitus veneris anni 1769 64
M. Hell . . . . . De satellite Veneris 64
M. Hell . . . . . Dissertatio de transitu Veneris ante discum solis die 3 lun. 1769. Wardochnusi in Finmarchia observato 64
M. Hell . . . . . Elementa mathematica naturali 64
M. Hell . . . . . Exercitationum mathematicorum 71
M. Hell . . . . . Math. astron., sine usu quadrantis 64
M. Hell . . . . . Tabulae lunares TOB. MAYER cum supplemento 64
M. Hell . . . . . Tabulae solares N. L. DE LA CAILLE cum supplemento 64
M. Hell . . . . . Von der Osterfeier 64
M. Hell . . . . . Von der wahren Grösze, die der Durchmesser des vollen Mondes oder der Sonne zu haben scheinen 64
Hütte, ... des-Ingenieurs Taschenbuch 391, 538
A. G. Ioachimescu . . . Culegere de probleme de algebră 705
I. Ionescu . . . . . Culegere de probleme de aritmetică . . 318, 732
I. Ionescu . . . . . Maxime și minime geometrice 582
Th. Klompers . . . . . Algèbre financière 87
M. Kraitchik . . . . . Mathématique des jeux 512
M. Kraitchik . . . . . Recherches sur la theorie des nombnes . 130, 461
Knopp . . . . . Theorie und Anwendung 714, 715
C. A. Laisant . . . . . L'Initiation Mathématique 677
I. Linteș . . . . . Teoria indicatorilor. . . . 105, 325, 440, 675, 753
Gh. Liteanu . . . . . Culegere de probleme de trigonometrie sferică 203
F. Lucas . . . . . Théorie des nombres 291, 341
G. Manu . . . . . Aritmetica și Algebra culeasă și prelucrată pentru școlele din România 203
Ch. Michel . . . . . Compléments de géometrie moderne . . .42, 491
Virg. Mihăilescu . . . . Calculul corecţiunilor balistice și atmosferice . 206

Pag.

Val. Nestorescu . . . . Propuneri la alcătuirea tablelor de tragere . 206
B. Niewenglowski . . . Cours d'Algèbre 44
B. Niewenglowski . . . Cours de géometrie analitique . 82, 83, 432, 700
G. Papelier . . . . . Exercices de géométrie moderne 437
F. Patrick et Chevrel . Exercices d'arithmétique 427, 510, 512
H. Picquet . . . . . Traité de géométrie analitique 584
Polya und Szegö . . . . Aufgaben und Lehrsätze der Analysis . . 713, 714
Gh. I. Popescu . . . . . Apărarea antiaeriană 206
Gh. Potopeanu . . . . . Reperajul prin sunet 206
P. Poulet . . . . . La chasse aux nombres 657
E. Rouché & Ch. de Comberousse . . . . . Traité de géométrie 102
B. Rüger . . . . . Heitere Rechenstunden 653
R. P. Tacquet . . . . . Theoria et praxis arithmetices 71
G. Ţiţeica . . . . . Culegere de probleme de geometrie 312
T. Vescan . . . . . Considérations sur certaines recherches quantiques de l'école française de plysique théorique 426

2. Periodice

Albina 434
Annalles de la Société scientifique de Bruxelles 243
Armata 207
Association française pour l'avancement des sciences 279
Buletinul asociaţiei de matematici pure şi aplicate 293
Buletinul societăţii române de ştiinţe 434
Bulletin de l'école polytechnique de Bucarest 567
Bulletin de l'école polytechnique de Timişoara 357
Bulletin de mathématiques et de physique de l'école polytechnique de Bucarest 175
Clujul medical 69
Ephemerides astronomicae ad meridianum Vindobonesen 63
Gazeta Matematică 5, 10, 22, 23, 24, 25, 31, 39, 44, 45, 52, 77, 78, 81, 83, 84, 88, 89, 99, 105, 110, 112, 113, 126, 128, 153, 164, 167, 169, 173, 175, 185, 200, 202, 204, 205, 206, 223, 234, 237, 240, 244, 246, 260, 279, 288, 289, 290, 292, 302, 303, 318, 329, 334, 338, 339, 340, 342, 343, 344, 361, 365, 372, 375, 380, 381, 388, 389, 396, 397, 401, 409, 410, 426, 427, 430, 432, 434, 450, 458, 464, 494, 498, 499, 500, 503, 504, 510, 563, 565, 566, 567, 585, 596, 597, 598, 600, 601, 604, 605, 606, 607, 612, 633, 639, 642, 652, 653, 654, 672, 673, 696, 703, 708, 711, 719, 721, 722, 725, 728, 734, 759, 781, 762.
Gazeta Militară 207
Journal des mathématiques élémentaires 99
Mathesis 242, 461, 623, 624

Pag.

Natura 113, 114
Nouvelles annalles 432, 623
Pitagora 633
Revista aeronautică 215
Revista artileriei 202, 204, 206, 207, 215
Revista matematică din Timişoara 255, 327, 410, 431, 573, 753
Ştiinţă şi Progres 42, 45
Suplimentul cu Exerciţii. Gazeta Matematică 339
The Tohoku Mathematical Journal 431
Universul 500

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Pag. 421 Vol. XLVII	200
„ 112 „ XLIX	200
Prob. 5756, 5865	208
Pag. 177, 196 Vol. XLIX	268
Pag. 131, 132, 152, 318 Vol. XLIX	380
„ 221, 310	464
„ 383, 384, 385, 391, 393, 394	536
„ 398, 402, 408, 411, 412, 413	592
„ 423, 424, 500	652

M. PUBLICAŢIUNI INAFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

M. Ghermănescu . . . . Trigonometrie plană şi sferică.
Regulamentele premiilor şi burselor societăţii „Gazeta Matematică“.
Suplimentul cu exerciţii, Vol. X. 9 numere . . . . . 144 pagini

N. FOTOGRAFII ŞI PLANŞE

Fotografia reprezentând pe A. Gh. Ioachimescu când semnează actul de fundaţie la punerea pietrei fundamentale a localului *Gazeta Matematică* 381
Medalia jubiliară a centenarului Artileriei 201, 203

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (2947, 4236, N, P); *Constantinescu N. Ilie* (5896, 906, 16, 26, 36, 42, 54, 66, 71; *Constantinescu R. M.* (5839, 41, 42, 52, 62, 65, 69, 86, 906, 16, 22, 26, 28, 40, 42, 52, 54, 56, E, P); *Diaconu C.* (5896, 907, 16, 20); *Manoliu M.* (5875, 85, 907, 08, 16, 26, 54, 56, 66, 71); *Wegener N.* (4102, 496, 5416, 954, 56, 66, 71, 98),

---

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 950

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 200 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 200

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 25.306.